1° Facsimile di compitino

Esercizio 1 Posto $f(x) = x^3 + e^x$, $x \in \mathbb{R}$,

(i) verificare che f è invertibile, con inversa di classe C^∞;

(ii) calcolare il 2° polinomio di Taylor di f^{-1} nel punto $y_0 = 1$.

Esercizio 2 Calcolare, se esistono, i due limiti

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right], \qquad \lim_{x\to+\infty}\left[e^{\sqrt{1+x^2}} - e^x\right].$$

Esercizio 3 Tracciare approssimativamente il grafico della funzione

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{se } x \le 0 \\ \max\{2-|x-2|, (x-2)\} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Risoluzione:

Esercizio 1 La f è di classe C^∞, ed è bigettiva perché

$$f'(x) = 3x^2 + e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Poiché $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$, essendo $f \in C^\infty$ si ricava induttivamente che f^{-1} è derivabile infinite volte; in particolare, $f''(x) = 6x + e^x$, e

$$(f^{-1})''(y) = -\frac{1}{[f'(f^{-1}(y))]^2} f''(f^{-1}(y))\,(f^{-1})'(y) =$$

$$= + \frac{f''(f^{-1}(y))}{[f'(f^{-1}(y))]^3} \, ;$$

poichè $f^{-1}(1)=0$, si ottiene, detto $P(y)$ il polinomio cercato,

$$P(y) = f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)(y-1) + \frac{(f^{-1})''(1)}{2}(y-1)^2 =$$

$$= 0 + \frac{1}{f'(0)}(y-1) + \frac{f''(0)}{2f'(0)^3}(y-1)^2 =$$

$$= y-1 + \frac{1}{2}(y-1)^2 .$$

Esercizio 2 Primo limite:

$$\frac{1}{x}\left[\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right] = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right] = \frac{\sin x - \cos x \operatorname{arctg} x}{x \operatorname{arctg} x \sin x} =$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{6} - \left(1-\frac{x^2}{2}\right)\left(x - \frac{x^3}{3}\right) + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} = \frac{x^3\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) + o(x^3)}{x^3 + o(x^3)} ,$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left[\frac{1}{\operatorname{arctg} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right] = \frac{2}{3} .$$

Secondo limite:

$$e^{\sqrt{1+x^2}} - e^x = e^x\left[e^{\sqrt{1+x^2}-x} - 1\right] = e^x\left[e^{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}} - 1\right] \simeq$$

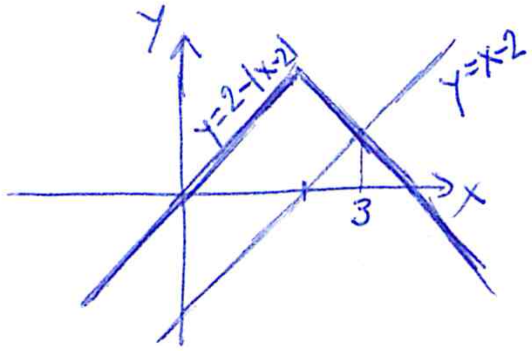
$$\simeq e^x \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+x} \longrightarrow +\infty \quad \text{per } x \to +\infty .$$

Esercizio 3. Anzitutto,

$$\max\{2-|x-2|,\, x-2\} = \begin{cases} 2-|x-2| & \text{se } 2-|x-2| \geq x-2 \\ x-2 & \text{se } 2-|x-2| < x-2, \end{cases}$$

vale a dire (vedere figura)

$$\max\{2-|x-2|,\, x-2\} = \begin{cases} 2-|x-2| & \text{se } x \leq 3 \\ x-2 & \text{se } x > 3. \end{cases}$$



Dunque

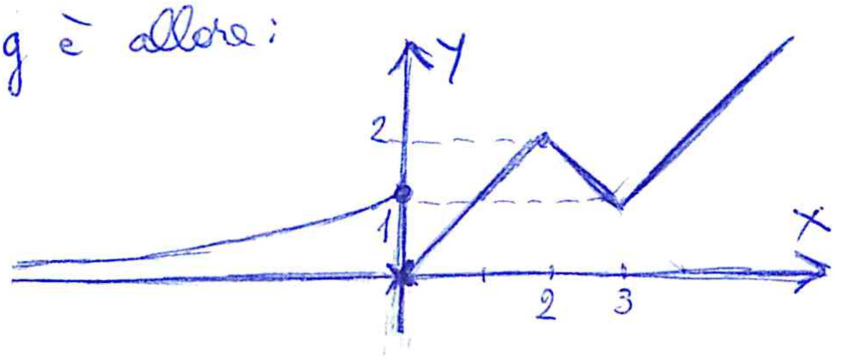
$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{se } x \leq 0 \\ 2-|x-2| & \text{se } 0 < x \leq 3 \\ x-2 & \text{se } x \geq 3 \end{cases} \qquad 2-|x-2| = \begin{cases} x & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ 4-x & \text{se } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

Ciò premesso: all'infinito si ha

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1-x} = 0 \quad \text{(con asintoto orizzontale } y=0\text{)},$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (x-2) = +\infty \quad \text{(con asintoto obliquo } y=x-2\text{)}.$$

Il grafico di g è allora:



Si può osservare che $g > 0$, g è crescente in $]-\infty, 0]$, in $]0, 2]$ e in $[3, \infty[$, mentre è decrescente in $[2, 3]$. Risulta $\inf_{\mathbb{R}} g = 0$, $\sup_{\mathbb{R}} g = +\infty$ ma g non ha né minimo né massimo.

2° facsimile di compitino

Esercizio 1. In quali punti $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ la funzione
$$f(x,y)=|y|\ln(1+x^2)$$
è differenziabile?

Esercizio 2 Calcolare, se esistono, i due limiti
$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{x}{(1-x)^2}-\sin x\right],\qquad \lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Esercizio 3 Tracciare approssimativamente il grafico della funzione
$$g(x)=\sqrt{|x|}+|x-1|.$$

Risoluzione

Esercizio 1 Nei punti (x,y) con $y\neq0$, la funzione f è certamente differenziabile, in virtù del teorema del differenziale totale: infatti, se $y>0$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy}{1+x^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\ln(1+x^2),$$
mentre ovviamente, se $y<0$,
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\frac{2xy}{1+x^2},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\ln(1+x^2),$$
e queste funzioni sono continue. Invece, nei punti $(x,0)$, $x\neq0$, la f non è differenziabile, poiché non esiste $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$:
$$\lim_{y\to0^+}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=\ln(1+x^2),\quad \lim_{y\to0^-}\frac{f(x,y)-f(x,0)}{y}=-\ln(1+x^2).$$

Rimane il punto $(0,0)$: qui,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0,$$

e inoltre

$$\frac{|f(x,y)|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{|y| \ln(1+x^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \ln(1+x^2) \longrightarrow 0$$

per $\sqrt{x^2+y^2} \to 0$. Dunque f è differenziabile in $(0,0)$.

<u>Esercizio 2</u> Primo limite:

$$\frac{1}{x^2}\left[\frac{x}{(1-x)^2} - \sin x\right] = \frac{1}{x^2}\left[x\left(1+x+x^2+o(x^2)\right)^2 - \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[x\left(1+2x+3x^2+o(x^2)\right) - x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right] =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left[2x^2 + o(x^2)\right],$$

e dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left[\frac{x}{(1-x)^2} - \sin x\right] = 2.$$

Secondo limite:

$$\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x\cos x}} = e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\left(\frac{\sin x}{x\cos x}-1\right)\right)},$$

$$\simeq e^{\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{\sin x}{x\cos x}-1\right)} = e^{\frac{1}{x^2}\frac{\sin x - x\cos x}{x\cos x}} =$$

$$= e^{\frac{1}{x^3}\left(x - \frac{x^3}{6} - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right)} \simeq e^{\frac{x^3}{3x^3}},$$

ossia

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{1}{3}}.$$

Esercizio 3 La funzione g è continua, non negativa e si ha

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}-x+1 & \text{se } x\le 0\\ \sqrt{x}-x+1 & \text{se } 0\le x\le 1\\ \sqrt{x}+x-1 & \text{se } x\ge 1.\end{cases}$$

In particolare,

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=+\infty, \quad \text{(senza asintoto obliquo)}$$

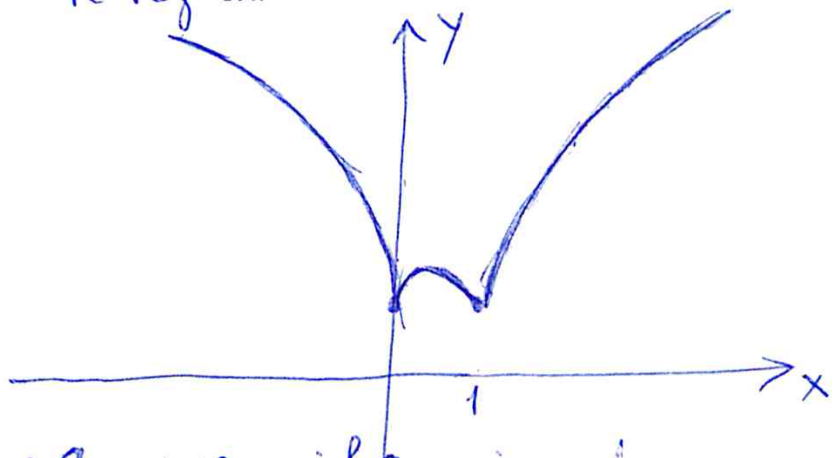
$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \quad \text{(senza asintoto obliquo)}.$$

Inoltre

$$g'(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2\sqrt{-x}}-1 & \text{se } x<0\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}-1 & \text{se } 0<x<1\\ \frac{1}{2\sqrt{x}}+1 & \text{se } x>1,\end{cases}$$

mentre $g'(0)$ e $g'(1)$ non esistono. Si vede allora che g è decrescente in $]-\infty,0]$, crescente in $[0,\frac{1}{4}]$, poichè $\frac{1}{2\sqrt{x}}-1=0$ per $x=\frac{1}{4}$, decrescente in $[\frac{1}{4},1]$, e infine crescente in $[1,\infty[$.

Il grafico è il seguente:



Risulta $\sup_{\mathbb{R}} g=+\infty$, $\inf_{\mathbb{R}} g=\min_{\mathbb{R}} g=1$.