ANALISI 1 | gi 14/3/19

Monotonia di f e segno della derivata

Teo. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile, con I intervallo di $\mathbb{R}$.

(i) f è crescente in $I \iff f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$;

(ii) f è decrescente in $I \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$;

(iii) $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente crescente, ma il viceversa è falso;

(iv) $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ è strettamente decrescente, ma il viceversa è falso.

dim. (i) ($\Rightarrow$) se $x' > x$ si ha $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} \geq 0$; se $x' \to x$ si deduce $f'(x) \geq 0$.

($\Leftarrow$) Se $x' > x$, applicando il teorema di Lagrange a f in $[x, x']$ si ha per ipotesi

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = f'(\xi) \geq 0,$$

da cui $f(x') \geq f(x)$.

(ii) Si applica (i) a $-f$.

(iii) Stessa procedura di (i)($\Leftarrow$).

(iv) Si applica (iii) a $-f$.

Il viceversa di (iii) è falso perché $f(x) = x^3$ è strettamente crescente, pur essendo $f'(0) = 0$.

Il viceversa di (iv) è falso (esempio $f(x) = -x^3$). $\square$

Differenziabilità

Vogliamo costruire il calcolo differenziale per funzioni reali di N variabili ($N \geq 1$).

Come sappiamo, se $N=1$ e $f: I \to \mathbb{R}$ (I intervallo), f è derivabile in un punto x_0, interno a I, se e solo se esistono $L \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $\omega:]-\delta, \delta[\setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ con $\lim_{h \to 0} \omega(h) = 0$, tali che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Lh + h\omega(h) \quad \forall h \in]-\delta, \delta[\setminus \{0\};$$

in tal caso, si ha $f'(x_0) = L$ e la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

<u>Definizione</u> L'applicazione lineare $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$\varphi(h) = f'(x_0)h \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

è detta <u>differenziale di f in x_0</u> e si denota con $df(x_0)$. Perciò

$$[df(x_0)](h) = f'(x_0)h \quad \forall h \in \mathbb{R}.$$

Dunque, in dimensione $N=1$, l'esistenza della derivata di f in x_0 e l'esistenza del differenziale di f in x_0 sono la stessa cosa.

Vediamo cosa succede quando $N > 1$.

Siano $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \dots, \underline{e}_N$ i vettori della base canonica di $\mathbb{R}^N$:

$$\underline{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0) \quad [1 \text{ sta nella } i\text{-esima posizione}]$$

Ogni $\underline{x} = (x_1 \dots x_N)$ di $\mathbb{R}^N$ si può scrivere come $\underline{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i \underline{e}_i$.

<u>Derivate parziali</u> Sia $f: A \to \mathbb{R}$, con A aperto di $\mathbb{R}^N$; sia $\underline{x}_0 \in A$. La derivata parziale i-sima di f in $\underline{x}_0$ è il numero

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{e}_i) - f(\underline{x}_0)}{h} \qquad \text{(se esiste)}.$$

Si noti che si fa un incremento nella sola direzione i-sima: il vettore $\underline{x}_0 + h\underline{e}_i$ ha le stesse coordinate di $\underline{x}_0$ ad eccezione della i-esima.

Le derivate parziali si denotano indifferentemente con i simboli

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0), \qquad D_i f(\underline{x}_0), \qquad f_{x_i}(\underline{x}_0).$$

Le regole di calcolo per le derivate parziali sono semplici: si deriva rispetto alla variabile x_i, trattando tutte le altre come costanti.

<u>Esempi</u> $(N=2)$ Se $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^4}$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^4}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y^3}{\sqrt{x^2+y^4}};$$

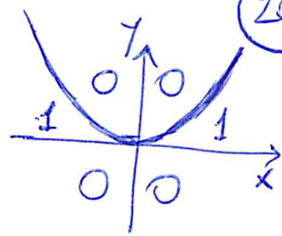
$(N=3)$ Se $f(x,y,z) = e^x(x+y-z^2)$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^x(x+y-z^2+1), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = e^x, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2ze^x.$$

Sfortunatamente, l'esistenza delle derivate parziali per una funzione di N variabili non è tanto importante, perché non implica neanche la continuità: ma questo non deve sorprendere, perché l'esistenza di esse condiziona il comportamento di f solo sulle N rette parallele agli assi, passanti per il punto $\underline{x}_0$.

<u>Esempio</u> Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0<y<x^2 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$



Si ha $f(0,0)$, $f(h,0)=0$, $f(0,h)=0$ $\forall h\neq 0$,

quindi

$$\exists\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0,$$

$$\exists\ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0,$$

però f non è continua in $(0,0)$, perché

$$f(x,\tfrac{1}{2}x^2) = 1 \quad \forall x\neq 0, \qquad f(0,0)=0.$$

Ma allora qual'è la proprietà che garantisce ad una funzione di N variabili l'esistenza del piano (N-dimensionale) tangente al grafico di f in un punto $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$? Questa proprietà è la <u>differenziabilità</u>.

<u>Definizione</u> Sia $f: A\to\mathbb{R}$, con A aperto di $\mathbb{R}^N$; sia $\underline{x}_0\in A$. Diciamo che f è <u>differenziabile</u> in $\underline{x}_0$ se esistono $\underline{a}\in\mathbb{R}^N$, $\delta>0$, e $\omega: B(\underline{0},\delta)\setminus\{\underline{0}\}\to\mathbb{R}$, con $\lim_{\underline{h}\to\underline{0}}\omega(\underline{h})=0$, tali che

$$f(\underline{x}_0+\underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \langle \underline{a},\underline{h}\rangle_N + |\underline{h}|_N\,\omega(\underline{h}) \quad \forall \underline{h}\in B(\underline{0},\delta)\setminus\{\underline{0}\}.$$

Il vettore $\underline{a}$ della definizione è <u>unico</u>: infatti se si avesse

$$f(\underline{x}_0+\underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle_N + |\underline{h}|_N\, \omega_1(\underline{h})$$
$$f(\underline{x}_0+\underline{h}) = f(\underline{x}_0) + \langle \underline{b}, \underline{h} \rangle_N + |\underline{h}|_N\, \omega_2(\underline{h}), \qquad \underline{h}\in B(\underline{0},\delta)\setminus\{\underline{0}\},$$

otterremo per differenza

$$0 = \langle \underline{a}-\underline{b}, \underline{h} \rangle_N + |\underline{h}|_N \left(\omega_1(\underline{h}) - \omega_2(\underline{h})\right),$$

e posto $\omega(\underline{h}) = \omega_2(\underline{h}) - \omega_1(\underline{h})$,

$$\left\langle \underline{a}-\underline{b}, \frac{\underline{h}}{|\underline{h}|_N} \right\rangle_N = \omega(\underline{h}), \qquad \underline{h}\in B(\underline{0},\delta)\setminus\{\underline{0}\}.$$

Scegliamo $\underline{h} = t(\underline{a}-\underline{b})$, $0<|t|<\delta$: allora

$$|\underline{a}-\underline{b}|_N = \omega(t(\underline{a}-\underline{b})), \qquad 0<|t|<\delta,$$

e se $t\to 0$ si ricava $|\underline{a}-\underline{b}|_N = 0$, ossia $\underline{a}=\underline{b}$.

Dunque $\underline{a}$ è unico; ma possiamo dire di più. In conseguenza della definizione, se f è differenziabile in $\underline{x}_0$, allora

(i) $\exists \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \dfrac{f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) - \langle \underline{a}, \underline{h} \rangle_N}{|\underline{h}|_N} = 0,$

(ii) $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0) = a_i, \qquad 1\le i\le N.$

La (i) è evidente; per la (ii) basta scegliere $\underline{h} = t\,\underline{e}_i$ in (i), con $0<|t|<\delta$, e fare il limite per $t\to 0$ dopo aver moltiplicato per $\frac{|t|}{t}$, cioè per ± 1.

Definizione Il gradiente di f in $\underline{x}_0$ è il vettore $\nabla f(\underline{x}_0)$, definito da $\nabla f(\underline{x}_0) = (D_1 f(\underline{x}_0), D_2 f(\underline{x}_0), \dots, D_N f(\underline{x}_0))$.

Dunque il vettore $\underline{a}$ nella definizione di differenziabilità è precisamente $\nabla f(\underline{x}_0)$. Perciò f è differenziabile in $\underline{x}_0$ se e solo se

$$\exists \lim_{\underline{h}\to\underline{0}} \frac{f(\underline{x}_0+\underline{h})-f(\underline{x}_0)-\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h}\rangle_N}{|\underline{h}|_N} = 0 .$$

In tal caso, l'applicazione lineare $\varphi: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definita da

$$\varphi(\underline{h}) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h}\rangle_N , \quad \underline{h}\in\mathbb{R}^N,$$

è detta differenziale di f in $\underline{x}_0$ e si denota con $df(\underline{x}_0)$. Perciò

$$[df(\underline{x}_0)](\underline{h}) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h}\rangle_N .$$

Osservazione Se f è differenziabile in $\underline{x}_0$, allora f è continua in $\underline{x}_0$. Il viceversa è falso.

dim. Se f è differenziabile in $\underline{x}_0$, allora per $\underline{h}\to\underline{0}$ si ha

$$f(\underline{x}_0+\underline{h}) - f(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{h}\rangle_N + |\underline{h}|_N\, \omega(\underline{h}) \to 0 .$$

Viceversa, la funzione $f(\underline{x}) = |\underline{x}|_N$ è continua in $\mathbb{R}^N$, dato che $\big|\, |\underline{x}|_N - |\underline{x}_0|_N \big| \le |\underline{x}-\underline{x}_0|_N$, ma non è differenziabile in $\underline{0}$: infatti, se lo fosse, esisterebbe $\underline{a}\in\mathbb{R}^N$ tale che

$$\frac{|\underline{h}|_N - \langle \underline{a}, \underline{h}\rangle_N}{|\underline{h}|_N} = 1 - \left\langle \underline{a}, \frac{\underline{h}}{|\underline{h}|_N}\right\rangle_N \to 0 \quad \text{per } \underline{h}\to\underline{0};$$

dunque $\underline{a}\neq\underline{0}$. Ma, scelto $\underline{h} = -t\underline{a}$ con $t>0$, otterremmo $1+|\underline{a}|_N = 0$, assurdo. □

Piano Tangente al grafico di f

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nel punto $\underline{x}_0 \in A$. Un generico piano passante per $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ ha equazione

$$z = f(\underline{x}_0) + \langle \underline{b}, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle_N ,$$

ove $\underline{b} \in \mathbb{R}^N$. Si tratta di un piano N-dimensionale in $\mathbb{R}^{N+1}$, che a sua volta è il grafico della funzione affine

$$\varphi_{\underline{b}}(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \langle b, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle_N .$$

Per ciascuna di queste funzioni $\varphi_{\underline{b}}$, ossia per ogni $\underline{b} \in \mathbb{R}^N$, vale la relazione

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \left[f(\underline{x}) - \varphi_{\underline{b}}(\underline{x}) \right] = 0 :$$

infatti, essendo f continua in $\underline{x}_0$, così come $\varphi_{\underline{b}}$, si ha

$$f(\underline{x}) - \varphi_{\underline{b}}(\underline{x}) = f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \langle \underline{b}, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle_N \to 0 \quad \text{per } \underline{x} \to \underline{x}_0 .$$

Ma se vogliamo l'approssimazione più precisa

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{\left[f(\underline{x}) - \varphi_{\underline{b}}(\underline{x}) \right]}{|\underline{x} - \underline{x}_0|_N} = 0 ,$$

l'unica scelta possibile è che sia $\underline{b} = \nabla f(\underline{x}_0)$. Infatti

$$\frac{f(\underline{x}) - \varphi_{\underline{b}}(\underline{x})}{|\underline{x} - \underline{x}_0|_N} = \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \langle \underline{b}, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle_N}{|\underline{x} - \underline{x}_0|_N} =$$

$$= \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0) - \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle_N}{|\underline{x} - \underline{x}_0|_N} + \frac{\langle \nabla f(\underline{x}_0) - \underline{b}, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle_N}{|\underline{x} - \underline{x}_0|_N} ;$$

il 1° addendo tende a 0 per $\underline{x} \to \underline{x}_0$ grazie alla differenziabilità di f, il 2° invece tende a 0 per $\underline{x} \to \underline{x}_0$ se e solo se $\underline{b} = \nabla f(\underline{x}_0)$ (altrimenti, con $\underline{x} = \underline{x}_0 + t(\nabla f(\underline{x}_0) - \underline{b})$ si vede che il limite è $|\nabla f(\underline{x}_0) - \underline{b}|_N$).

Per questa speciale proprietà di approssimazione, è giustificata la seguente

Definizione Se f è differenziabile in $\underline{x}_0$, il piano tangente al grafico di f in $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ è il piano N-dimensionale di equazione

$$z = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle_N .$$

Dunque la nozione di differenziabilità è quella che garantisce l'esistenza del piano tangente al grafico della funzione.

È importante allora fornire condizioni sufficienti per la differenziabilità.