Esercizi

- Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, tale che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lambda$, ove $\lambda \in \mathbb{R}$. Provare che esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $f'(\xi) = 0$.

[Infatti: se $f(x) \equiv \lambda$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f'(\xi) = 0$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}$. Altrimenti, esiste $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) \neq \lambda$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon < |f(x_0) - \lambda|$. Esistono due semirette $]-\infty, -M]$ e $[M, +\infty[$ tali che $|f(x) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ con $|x| \geq M$. Sull'intervallo chiuso e limitato $[-M, M]$, la f è continua (essendo derivabile), quindi ha massimo e minimo. Ora, $f(x_0)$ è diverso dai valori $f(M)$ e $f(-M)$: infatti

$$|f(x_0) - f(\pm M)| = |(f(x_0) - \lambda) - (f(\pm M) - \lambda)| \geq$$

$$\geq |f(x_0) - \lambda| - |f(\pm M) - \lambda| \geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Quindi il massimo o il minimo di f in $[-M, M]$ è raggiunto in un punto $\xi \in]-M, M[$. In questo punto, come sappiamo, deve essere $f'(\xi) = 0$.]

- Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivabile, e sia $f(x_0) = \max_{[a,b]} f$. Allora

$$f'(x_0) \begin{cases} \leq 0 & \text{se } x_0 = a \\ = 0 & \text{se } x_0 \in]a,b[, \\ \geq 0 & \text{se } x_0 = b. \end{cases}$$

[Se x_0 è uno dei due estremi, il rapporto incrementale $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si può fare solo da destra se $x_0=a$ e solo da sinistra se $x_0=b$. Quindi se ne può solo stabilire il segno: negativo se $x_0=a$, positivo se $x_0=b$.]

- Sia $f:]a,b[\to \mathbb{R}$ derivabile. Se $\exists \lim_{x\to a^+} f'(x)=\lambda\in\mathbb{R}$, allora f è prolungabile con continuità ad $[a,b[$ ed $\exists f'(a)=\lambda$.

[. Fissato $\varepsilon>0$, avremo $|f'(x)-\lambda|<\varepsilon$ se $|x-a|<\delta_\varepsilon<\varepsilon$, e $|x_n-a|<\delta_\varepsilon$ se $n\ge\nu_\varepsilon$. Inoltre se $x,x'\in[a,a+\delta_\varepsilon]$ si ha

$$|x-x'|\le|\max\{x,x'\}-a|\le\delta_\varepsilon.$$

Per il teorema di Lagrange, per ogni $x,x'\in]a,a+\delta_\varepsilon[$ esiste $\xi\in]a,a+\delta_\varepsilon[$ punto intermedio fra x e x', tale che

$$|f(x)-f(x')|=|f'(\xi)|\cdot|x-x'|\le[|\lambda|+\varepsilon]\cdot\varepsilon.$$

Scelto $x'=x_{\nu_\varepsilon}$, ne segue per ogni $x\in]a,a+\delta_\varepsilon[$

$$|f(x)|\le|f(x)-f(x_{\nu_\varepsilon})|+|f(x_{\nu_\varepsilon})|\le|f(x_{\nu_\varepsilon})|+\varepsilon(|\lambda|+\varepsilon).$$

Poiché l'insieme $\{f(x); x\in]a,a+\delta_\varepsilon[\}$ è limitato, esso contiene una successione convergente: cioè esiste $\{x_n\}\subseteq]a,a+\delta_\varepsilon[$ tale che $\exists\lim_{n\to\infty} f(x_n)=c\in\mathbb{R}$. Proviamo che $\lim_{x\to a^+}f(x)=c$: dato $\varepsilon>0$,

si ha per $n\ge\nu_\varepsilon$, scelto $k>k_\varepsilon$ opportuno,

$$|f(x_n)-c|\le|f(x_n)-f(x_{n_k})|+|f(x_{n_k})-c|\le\varepsilon(|\lambda|+\varepsilon)+\varepsilon.$$

Dunque il prolungamento continuo di f ad $[a,b[$ si ottiene ponendo $f(a)=c$.

Se poi $\{x'_n\} \subseteq]a,b[$ è un'altra successione convergente ad a, sarà

$$|x'_n - a| < \delta_\varepsilon \quad \forall n \geq \mu_\varepsilon,$$

e allora per $n \geq \max\{\nu_\varepsilon, \mu_\varepsilon\}$ si ha

$$|f(x'_n) - c| \leq |f(x'_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - c| < (|\lambda| + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon$$

ossia $f(x'_n) \to c$. Abbiamo così mostrato che per ogni successione $\{x_n\} \to a^+$ risulta $f(x_n) \to c$. Ciò, per il teorema ponte, ci garantisce che

$$\exists \lim_{x \to a^+} f(x) = c.$$

Prolunghiamo f ad $[a,b[$ ponendo

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in]a,b[\\ c & \text{se } x = a. \end{cases}$$

La $\bar{f}$ è continua in $[a,b[$ e derivabile in $]a,b[$. Per il teorema di Lagrange applicato ad $[a,x]$, con $x \in]a,b[$, si ha

$$\frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(a)}{x-a} = f'(\xi), \quad \text{con } a < \xi < x;$$

poiché quando $x \to a^+$ anche $\xi \to a^+$, si ottiene

$$\bar{f}'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{\bar{f}(x) - \bar{f}(a)}{x-a} = \lim_{\xi \to a^+} f'(\xi) = \lambda. \Big]$$

- Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che

$$f(0) = 0, \qquad |f'(x)| \leq |f(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Allora $f \equiv 0$.

[Sia x_0 un punto di massimo per $|f|$ in $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Allora esiste ξ, con $0 < |\xi| < |x_0|$, tale che

$$|f(x_0)| = |f(x_0) - f(0)| = |f'(\xi)|\,|x_0| \leq |f(\xi)| \cdot \frac{1}{2} \leq \frac{|f(x_0)|}{2};$$

ne segue $|f(x_0)| = 0$, ossia $f = 0$ su $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Sia ora x_1 un punto di massimo per $|f|$ in $[-1,1]$. Allora esiste ξ_1, con $\frac{1}{2} < |\xi_1| < |x_1|$, tale che (supposto ad esempio $\frac{1}{2} \leq x_1 \leq 1$):

$$|f(x_1)| = |f(x_1) - f(\tfrac{1}{2})| = |f'(\xi_1)|\,|x_1 - \tfrac{1}{2}| \leq |f(\xi)| \frac{1}{2} \leq \frac{|f(x_1)|}{2},$$

da cui $x_1 = 0$ cioè $f \equiv 0$ in $[-1,1]$. Iterando il procedimento $2k$ volte, si ottiene $f \equiv 0$ in $[-k,k]$. Poichè k è arbitrario, si ha la tesi.]

- $$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \forall x \in]-1,1[.$$

[$$\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x) - \ln(1-x)\right] = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^n + 1\right]\frac{x^{n+1}}{n+1} = [n = 2k]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} 2\frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{2k+1}.]$$

• Provare che $\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ diverge, mentre $\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]$ converge.

$$\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}e\left[1-e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}-1}\right]=\right.$$

(confronto asintotico)

$$=\sum_{n=1}^{\infty}e\left[-\left(\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}-1\right)\right]=e\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right].$$

D'altra parte,

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{1}{x}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{k+1},$$

quindi

$$1-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=-\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{\frac{1}{n^k}}{k+1}=+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2}\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{\frac{1}{n^{k-2}}}{k+1},$$

da cui

$$1-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\simeq\frac{1}{2n}\quad\text{per } n\to\infty.$$

Perciò, per confronto asintotico,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\simeq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{2n}=\infty.$$

In modo del tutto analogo si trova (rifacendo il conto con n^2 al posto di n)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[e-\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]\simeq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e}{2n^2}<\infty\Big].$$