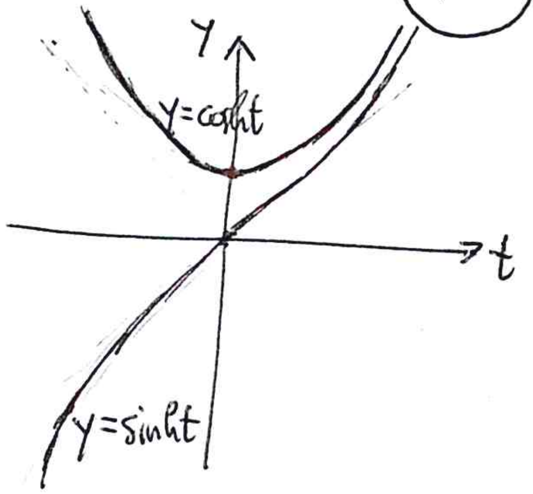
Seno iperbolico e coseno iperbolico

Poniamo

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

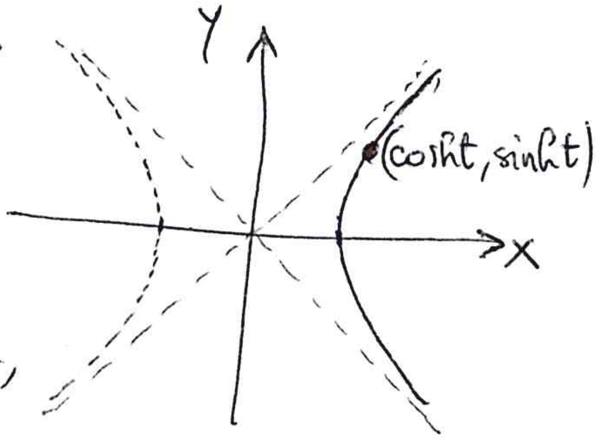
$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$



Risulta

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

quindi, per ogni $t \in \mathbb{R}$, il punto $(\cosh t, \sinh t)$ appartiene all' iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 1$, anzi al suo ramo destro, poichè $x = \cosh t > 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$.



Da qui deriva il nome "coseno iperbolico" e "seno iperbolico".

Si ha

$$D \sinh t = \cosh t \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$D \cosh t = \sinh t \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Inoltre la funzione $\sinh t$ è strettamente crescente e surgettiva su $\mathbb{R}$. La funzione inversa, detta "settore seno iperbolico", per motivi che saranno chiari quando faremo gli integrali, si calcola esplicitamente: infatti da $y = \sinh x$ segue facilmente

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \iff e^x = y \pm \sqrt{y^2+1};$$

la soluzione col segno $-$ va scartata perchè $e^x > 0$. Dunque

$$y = \sinh x \iff x = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right).$$

Analogamente, la funzione $\cosh t$, ristretta alla semiretta $t \geq 0$, è strettamente crescente e surgettiva su $[1, \infty[$; l'inversa, detta "settore coseno iperbolico", si calcola esplicitamente: se $y \geq 1$, risulta $y = \cosh x$ se e solo se $e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$, e il segno $-$ va scartato perchè, se avessimo $e^x = y - \sqrt{y^2-1} = \dfrac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}$, otterremmo $e^x < 1$ cioè $x < 0$, il che è impossibile perchè ci siamo ristretti alla semiretta $x \geq 0$.

Perciò

$$y = \cosh x,\ x \geq 0 \iff x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right),\ y \geq 1.$$

Le funzioni $\operatorname{settsinh} y = \ln\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)$ e $\operatorname{settcosh} y = \ln\left(y+\sqrt{y^2-1}\right)$ sono derivabili (o direttamente, o utilizzando il teorema di derivazione delle funzioni inverse), e si ha

$$D \operatorname{settsinh} y = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}, \qquad D \operatorname{settcosh} y = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}.$$

<u>Esercizi</u>

- Dati $a, b \in \mathbb{R}$, sia

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 4 \\ ax+b & \text{se } x < 4. \end{cases}$$

Determinare a, b in modo che la funzione f sia derivabile in tutti i punti di $\mathbb{R}$.

- Sia $f(x) = 4x^3 + \ln x$, $x > 0$. Mostrare che f è strettamente crescente e surgettiva su $\mathbb{R}$; si calcoli poi $(f^{-1})'(4)$.

- In quali sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ sono definite le funzioni

$$f_1(x) = (x - 2|x|)^2, \qquad f_2(x) = \sqrt{1 - \sqrt{|x|}},$$

ed in quali punti sono derivabili?

- Sia $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$. Il <u>prolungamento pari</u> di f è la funzione

$$F(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ f(-x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si provi che:

(i) f continua in $[0, \infty[\implies F$ continua in $\mathbb{R}$;

(ii) se f è derivabile e se $f'(0^+) = 0$, allora F è derivabile e $F'(0) = 0$.

- Sia $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$. Il <u>prolungamento dispari</u> di f è la funzione

$$G(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -f(-x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si provi che:

(i) se f è continua e $f(0) = 0$, allora G è continua su $\mathbb{R}$.

(ii) Se $f(0) = 0$ e f è derivabile, allora G è derivabile su $\mathbb{R}$.

Derivazione delle serie di potenze

Sappiamo che

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad \forall x \in]-1,1[,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

e le somme di tutte queste serie di potenze sono funzioni derivabili. Sarà vero in generale?

Teorema Sia $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ per $x \in]-R,R[$. Allora f è derivabile con

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \forall x \in]-R,R[.$$

dim. Anzitutto osserviamo che le serie $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hanno lo stesso raggio di convergenza. Infatti, detto R il raggio di convergenza di $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, si ha $\frac{1}{R} = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. D'altronde

$$\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{n|a_n|} = \quad (\text{poichè } \sqrt[n-1]{n} \to 1)$$

$$= \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n-1]{|a_n|} = \left(\text{poichè } |a_n|^{\frac{1}{n-1}} = |a_n|^{\frac{1}{n}} \cdot |a_n|^{\frac{1}{n(n-1)}} \text{ e } |a_n|^{\frac{1}{n(n-1)}} \to 1\right)$$

$$= \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}.$$ Si vede che lo stesso vale per $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

Ciò premesso, sia $x \in]-R,R[$, sia $0<|h|<\frac{1}{2}(R-|x|)$, cosicchè $|x+h| \le |x|+|h| < |x| + \frac{R}{2} - \frac{|x|}{2} = \frac{|x|+R}{2} < R$. Allora

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{h} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[(x+h)^n - x^n\right] =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} - x^n \right] =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[n x^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-1} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + h \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-2} \right].$$

Poniamo $\omega(h) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} x^k h^{n-k-2} \right]$, e proviamo che

$$\lim_{h \to 0} \omega(h) = 0.$$

Si ha

$$|\omega(h)| \le |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \left[\sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} |x|^k |h|^{n-k-2} \right];$$

ma essendo $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{(n-k)(n-k+1)} \binom{n-2}{k} \le \frac{n(n-1)}{2} \binom{n-2}{k}$, si deduce

$$|\omega(h)| \le |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{2} \frac{n(n-1)}{2} \binom{n-2}{k} |x|^k |h|^{n-k-2} =$$

$$= \frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, n(n-1) (|h|+|x|)^{n-2} \le \frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} |a_n|\, n(n-1) \left(\frac{R+|x|}{2}\right)^{n-2} = K|h|$$

con $K>0$ opportuna. Perciò segue la tesi. $\square$

Esempio Dalla serie geometrica $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $|x|<1$, ricaviamo, derivando entrambi i membri:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \qquad |x|<1,$$

e derivando ancora

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}, \qquad |x|<1.$$

Dopo m passi

$$\sum_{n=m}^{\infty} n(n-1)\dots(n-m+1) x^{n-m} = \frac{m!}{(1-x)^{m+1}}, \qquad |x|<1,$$

ovvero

$$\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} x^{n-m} = \frac{1}{(1-x)^{m+1}}, \qquad |x|<1.$$

Col cambiamento di variabile $k = n-m$ si ottiene

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{m} x^k = \frac{1}{(1-x)^{m+1}} \quad \forall x \in]-1,1[, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$