Esempi

- $D e^{-x^2} = -2x e^{-x^2}$
- $D \sqrt{1+x^2} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,
- $D \cos\left(e^{\sin x^2}\right) = -\sin\left(e^{\sin x^2}\right) e^{\sin x^2} \cos x^2 \cdot 2x$.

Derivata delle funzioni inverse

Teo. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona. Se $x \in I$ e $f'(x) \neq 0$, allora, detto $J = f(I)$, la funzione inversa $f^{-1}: J \to I$ è derivabile ~~nel~~ punto $y = f(x)$ e

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \left[= \frac{1}{f'(x)} \right].$$

dim. Notiamo che $f^{-1}: J \to I$ è continua. Sia $k \neq 0$ tale che $y+k \in J$. Sarà $y = f(x)$ e $y+k = f(x+h)$ per un certo $h \neq 0$ (univocamente determinato) tale che $x+h \in I$. Perciò $x = f^{-1}(y)$, $x+h = f^{-1}(y+k)$, da cui $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) \neq 0$ essendo f^{-1} iniettiva. Perciò, per $k \to \infty$,

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)} \longrightarrow \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \quad \square$$

Dunque il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f^{-1} (pensata come funzione di x) è il reciproco di quello della tangente al grafico di f nel punto $(\xi, f(\xi))$, per ogni $\xi \in I$. Ciò non sorprende, perchè i grafici sono l'uno simmetrico dell'altro rispetto alla bisettrice $y=x$.

Esempi (1) $D \arcsin y = \dfrac{1}{D \sin(\arcsin y)} = \dfrac{1}{\cos(\arcsin y)} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 \arcsin y}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in]-1,1[$$

(si noti che $\arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, intervallo dove il coseno è non negativo).

(2) $D \arccos y = \dfrac{1}{D \cos(\arccos y)} = -\dfrac{1}{\sin(\arccos y)} =$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 \arccos y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \forall y \in]-1,1[$$

(si noti che $\arccos y \in [0,\pi]$, intervallo dove il seno è non negativo).

(3) $D \operatorname{arctg} y = \dfrac{1}{D \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y)} =$ (essendo $D \operatorname{tg} x = D \dfrac{\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} =$

$= \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$) $= \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} y)} = \dfrac{1}{1+y^2} \quad \forall y \in \mathbb{R}.$

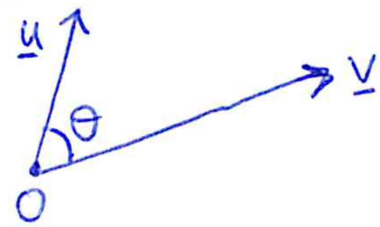
(4) $D \log_b y = \dfrac{1}{[D b^x]_{x=\log_b y}} = \dfrac{1}{[b^x \ln b]_{x=\log_b y}} = \dfrac{1}{y \ln b} \quad \forall y > 0,$

ove b è un numero positivo diverso da 1 (naturalmente questa derivata ci era già nota).

<u>Esempio</u> Sia $f(x) = \arcsin\left(e^{-\sqrt{\ln(1+x^2)}}\right)$. La funzione è ben definita perché il logaritmo è positivo e l'argomento dell'arcoseno è compreso fra 0 e 1. Calcoliamo f':

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2\sqrt{\ln(1+x^2)}}}}\, e^{-\sqrt{\ln(1+x^2)}} \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{\ln(1+x^2)}}\right) \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x .$$

Digressione sul prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$



Siano $\underline{u}, \underline{v}$ in $\mathbb{R}^3$, sia θ l'angolo convesso fra $\underline{u}$ e $\underline{v}$.

<u>Definizione</u> Il prodotto vettoriale di $\underline{u}$ e $\underline{v}$ è il vettore $\underline{w}$ di $\mathbb{R}^3$ che ha le seguenti proprietà:

(i). Il suo modulo è $|\underline{w}|_3 = |\underline{u}|_3\, |\underline{v}|_3 \sin\theta$;

(ii) la sua direzione è quella perpendicolare a $\underline{u}$ ed a $\underline{v}$;

(iii) il suo verso è quello tale che

$$\det\left(\underline{u}\,|\,\underline{v}\,|\,\underline{w}\right) \geq 0 .$$

Si scrive $\underline{w} = \underline{u} \times \underline{v}$.

<u>Osservazioni</u> (1) Se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono paralleli, allora $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$, e quindi $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{0}$.

(2) In particolare, $\underline{u}\times\underline{u}=\underline{0}$ per ogni $\underline{u}\in\mathbb{R}^3$.

(3) $\underline{u}\times\underline{v} = -\,\underline{v}\times\underline{u}$ (per la (iii)).

(4) Le condizioni date individuano univocamente il vettore $\underline{w}$: si tratta adesso di determinarne le coordinate.

Anzitutto, da (iii) segue che

$$w_1(u_2v_3-u_3v_2)+w_2(-u_1v_3+u_3v_1)+w_3(u_1v_2-u_2v_1)\geq 0 \qquad \circledast$$

inoltre il vettore $\underline{z}=(u_2v_3-u_3v_2,\ -u_1v_3+u_3v_1,\ u_1v_2-u_2v_1)$ è perpendicolare sia a $\underline{u}$, sia a $\underline{v}$, poiché

$$\cancel{u_1u_2v_3}-\cancel{u_1u_3v_2}-\cancel{u_2u_1v_3}+\cancel{u_2u_3v_1}+\cancel{u_3u_1v_2}-\cancel{u_3u_2v_1}=0,$$

$$\cancel{v_1u_2v_3}-\cancel{v_1u_3v_2}-\cancel{v_2u_1v_3}+\cancel{v_2u_3v_1}+\cancel{v_3u_1v_2}-\cancel{v_3u_2v_1}=0.$$

Dunque $\underline{z}$ ha la direzione di $\underline{w}=\underline{u}\times\underline{v}$. Poi, vale la (i): infatti

$$|\underline{u}|_3^2\,|\underline{v}|_3^2\sin^2\theta = |\underline{u}|_3^2\,|\underline{v}|_3^2(1-\cos^2\theta) = |\underline{u}|_3^2\,|\underline{v}_3|^2-|\langle\underline{u},\underline{v}\rangle_3|^2=$$

$$=(u_1^2+u_2^2+u_3^2)(v_1^2+v_2^2+v_3^2)-(u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3)^2=$$

$$=(u_2v_3-u_3v_2)^2+(u_3v_1-u_1v_3)^2+(u_1v_2-u_2v_1)^2=|\underline{z}|_3^2,$$

da cui $|\underline{z}|_3=|\underline{u}|_3|\underline{v}|_3\sin\theta$. Perciò $\underline{z}$ ha modulo e direzione come quelli di $\underline{w}=\underline{u}\times\underline{v}$. Se poniamo $\underline{w}=\underline{z}$, la $\circledast$ dice che vale (i). In definitiva

$$\underline{u} \times \underline{v} = \left(u_2 v_3 - u_3 v_2 \,,\; u_3 v_1 - u_1 v_3 \,,\; u_1 v_2 - u_2 v_1 \right) ;$$

un modo pratico per ricordarsi le coordinate di $\underline{u} \times \underline{v}$ è scrivere, in modo poco formale ma efficace,

$$\underline{u} \times \underline{v} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} ,$$

ove $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ sono i versori degli assi x, y, z.