La derivata.

Sia $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo aperto di $\mathbb{R}$), sia $x_0 \in I$.

Definizione Il rapporto incrementale di f, di ampiezza h, in x_0, è il numero reale

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Se $x \in I \setminus \{x_0\}$, il rapporto incrementale di f in x_0 (di ampiezza $x-x_0$) è una vera e propria funzione:

$$x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \qquad x \in I \setminus \{x_0\}.$$

Osservazione: per $h \neq 0$, il numero $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ è il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$ la cui equazione è

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0).$$

Definizione Sia $f : I \to \mathbb{R}$, sia $x_0 \in I$ ($I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo aperto).
Se esiste finita, la quantità

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

si chiama derivata di f in x_0, e si denota con $f'(x_0)$, o $Df(x_0)$ e in tal caso diremo che f è derivabile in x_0.

La derivata ha un fondamentale significato geometrico. Consideriamo una generica retta passante per il punto $(x_0, f(x_0))$, ove f è derivabile in x_0

$$y = f(x_0) + c(x-x_0).$$

La funzione affine $\varphi_c(x) = f(x_0) + c(x-x_0)$, il cui grafico è tale retta verifica ovviamente

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - \varphi_c(x)] = 0$$

ma in generale sarà diverso da 0 il limite

$$\lim_{x\to x_0} \frac{[f(x) - \varphi_c(x)]}{(x-x_0)} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - c\right] = f'(x_0) - c$$

L'unico coefficiente angolare c, per il quale risulti

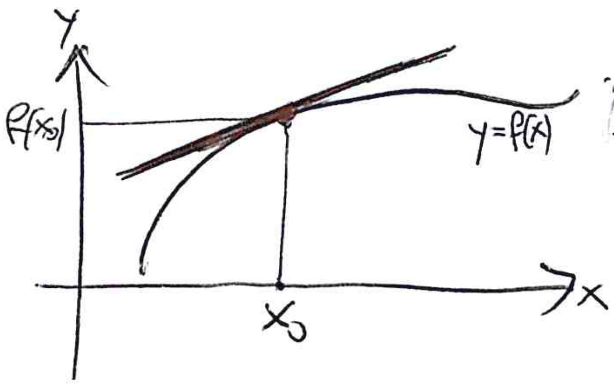
$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - \varphi_c(x)] = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - \varphi_c(x)}{x-x_0} = 0$$

è $c = f'(x_0)$. Cioè la funzione affine $\bar{\varphi}$ corrispondente è l'unica, passante per $(x_0, f(x_0))$, per la quale valga

$$\lim_{x\to x_0} \left[\frac{f(x) - \bar{\varphi}(x)}{x-x_0}\right] = 0 \; ;$$

$\bar{\varphi}(x)$ è la <u>miglior</u> approssimazione di $f(x)$ per x vicino a x_0.

Cioè, la retta grafico di $\bar{\varphi}$ è <u>tangente</u> al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$, e il suo coefficiente angolare è la derivata $f'(x_0)$.



Perciò, $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ è l'equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.

Essa misura la pendenza del grafico di f in $(x_0, f(x_0))$.

Osservazione f è derivabile in $x_0 \iff \exists\, L \in \mathbb{R}$, $\exists\, \omega(x)$, definita in un intorno U di 0, tale che

(i) $\lim_{h \to 0} \omega(h) = 0$, (ii) $f(x_0+h) - f(x_0) = Lh + h\omega(h) \quad \forall h \in U$.

In tal caso, $L = f'(x_0)$ (si verifica dividendo (ii) per h e mandando $h \to$

Definizione Diciamo che f è derivabile in I se è derivabile in ogni punto di I.

Si parla poi di derivata destra e sinistra di f in x_0 come

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{(se esistono)}.$$

Questi numeri si denotano con $f'(x_0^+)$ e $f'(x_0^-)$. Ovviamente,

$$\exists\, f'(x_0) \iff \exists\, f'(x_0^+),\ \exists\, f'(x_0^-) \text{ e } f'(x_0^+) = f'(x_0^-).$$

Però se I è chiuso e x_0 è un estremo di I, ha senso parlare solo di una delle due: se $I = [a,b]$, diremo che

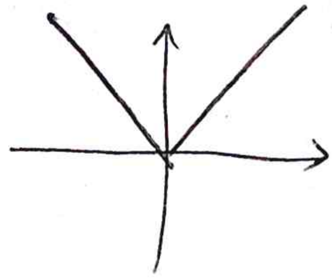
$$f'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \qquad f'(b) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

Proposizione: se $f : I \to \mathbb{R}$ è derivabile, allora f è continua.

dim. Sia $x_0 \in I$. Dall'osservazione di questa pagina,

$$\lim_{h \to 0} [f(x_0+h) - f(x_0)] = \lim_{h \to 0} [Lh + h\omega(h)] = 0. \ \square$$

Il viceversa è falso: la funzione $f(x)=|x|$ è continua su $\mathbb{R}$, ma non è derivabile su $\mathbb{R}$ perché, scelto $x_0=0$,



$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|-|0|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1,$$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|-0}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Esempi

(1) Per $n\in\mathbb{N}$, sia $f(x)=x^n$. Per $x_0\in\mathbb{R}$ si ha

$$\frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\dots+x x_0^{n-2}+x_0^{n-1}, \quad \forall x\neq x$$

dunque

$$\lim_{x\to x_0} \frac{x^n-x_0^n}{x-x_0} = n x_0^{n-1}.$$

Di conseguenza

$$Dx^n = nx^{n-1} \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}$$

(in particolare $D1=0$).

(2) La derivata è un'applicazione lineare: ciò significa che se f,g sono derivabili e $c\in\mathbb{R}$ allora cf, $f+g$ sono derivabili e

$$(cf)'(x)=cf'(x), \quad (f+g)'(x)=f'(x)+g'(x).$$

(3) Dunque se P è un polinomio, $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$,

$$P'(x)=\sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}.$$

(4) f,g derivabili $\Longrightarrow$ fg derivabile. Infatti

$$\frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0},$$

e siccome g è continua, al limite per $x \to x_0$ si trova

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(5) Se f, g sono derivabili allora $\frac{f}{g}$ è derivabile. Infatti

$$\frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x_0) - f(x_0)g(x)}{g(x)g(x_0)(x-x_0)} = \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x_0) - f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}}{g(x)g(x_0)},$$

e al limite per $x \to x_0$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

(6) $D\sin x = \cos x$, $D\cos x = -\sin x$, $D\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1+\mathrm{tg}^2 x$.

Infatti

$$\frac{\sin x - \sin x_0}{x-x_0} = \frac{2}{x-x_0}\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2} \to \cos x_0 \cdot 1,$$

$$\frac{\cos x - \cos x_0}{x-x_0} = -\frac{2}{x-x_0}\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2} \to -\sin x_0 \cdot 1,$$

$$D\,\mathrm{tg}\,x = D\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x.$$

(7) $D\,b^x = b^x \ln b \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall b>0$: infatti $\frac{b^{x_0+h}-b^{x_0}}{h} = b^{x_0}\frac{b^h-1}{h} \to b^{x_0}\ln b$

(8) $D\ln_b x = \frac{1}{x\ln b} \quad \forall x>0, \forall b>0, b\neq 1$. Infatti per $h \to 0$

$$\frac{\ln_b(x+h)-\ln_b x}{h} = \frac{1}{h}\ln_b\frac{x+h}{x} = \frac{\ln_b\left(1+\frac{h}{x}\right)}{x\,\frac{h}{x}} \to \frac{1}{x\ln b}.$$

Derivazione di funzioni composte

Teo. Siano $g: J \to \mathbb{R}$, $f: I \to J$ funzioni derivabili sugli intervalli J e I. Allora $g \circ f: I \to \mathbb{R}$, definita da $[g \circ f](x) = g(f(x))$, è derivabile e

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))\, f'(x) \qquad \forall x \in I.$$

dim. Sappiamo che, essendo g e f derivabili,

$$g(y+k) - g(y) = g'(y)k + k\,\omega(k), \qquad \text{ove } \lim_{k \to 0} \omega(k) = 0,$$

$$f(x+h) - f(x) = f'(x)h + h\,\theta(h), \qquad \text{ove } \lim_{h \to 0} \theta(h) = 0.$$

Scegliamo $k = f(x+h) - f(x)$, cosicché $k \to 0$ per $h \to 0$ ed anzi $\frac{k}{h} \to f'(x)$ per $h \to 0$. Allora, scelto $y = f(x)$,

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) - g(f(x)) &= g(y+k) - g(y) = g'(y)k + k\,\omega(k) = \\ &= g'(f(x))\,[f(x+h) - f(x)] + k\,\omega(k) = \\ &= g'(f(x))\,f'(x)\,h + g'(f(x))\,h\,\omega(h) + k\,\omega(k) = \\ &= g'(f(x))\,f'(x)\,h + h\,\sigma(h), \end{aligned}$$

ove $\sigma(h) = g'(f(x))\,\omega(h) + \frac{k}{h}\,\omega(k) \longrightarrow 0$ per $h \to 0$. $\square$