Esercizi

- $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x^2}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x^3}{x^6}$,

- $\lim_{x\to 0^+} x^x$, $\lim_{x\to 0^+} x^{1/x}$, $\lim_{x\to 0^+} x^{-\frac{1}{x}}$.

- $\lim_{x\to -1} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}\right)$, $\lim_{x\to 0} \frac{3x}{1-e^{2x}}$,

- $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(e^x - e^{-x}) - 1}{\sin^2 x}$, $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(2-\cos x)}{\sin x \operatorname{tg} x}$

- $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\operatorname{tg} x}$, $\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}$

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{(x+y)^2}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}$,

- $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+|y|}$, $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2+x+y}{x^2+|x|+|y|}$.

- Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua, tale che $\exists \lim_{x\to-\infty} f(x) = L < 0$, ed $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = M > 0$. Si provi che $\exists\, \xi\in\mathbb{R}$, tale che $f(\xi)=0$.

- Sia $f:[a,b]\to[a,b]$ continua. Si provi che $\exists\, x\in[a,b]$ tale che $f(x)=x$.

170

- Provare che esiste $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, tale che l'equazione $f(x) = c$ abbia 3 soluzioni per ogni $c \in \mathbb{R}$.
- Provare che non esiste alcuna $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, tale che l'equazione $f(x) = c$ abbia 2 soluzioni per ogni $c \in \mathbb{R}$.
- <u>Limiti in coordinate polari</u>: sia $f: B((0,0), R) \longrightarrow \mathbb{R}$. Allora

$$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \in \mathbb{R}$$ se e solo se valgono (i)+(ii), ove

(i) per ogni $\theta \in [0, 2\pi]$ esiste $\lim_{r\to 0^+} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = L$ (indipendente da θ),

(ii) tale limite è <u>uniforme</u> rispetto a θ, cioè per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\rho_\varepsilon > 0$ tale che

$$|f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) - L| < \varepsilon \quad \forall r \in [0, \rho_\varepsilon],\ \forall \theta \in [0, 2\pi]$$

[la dimostrazione è pressoché immediata.]

<u>Esempio</u>. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2}{y^2+x^4}$. Con $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ si ha

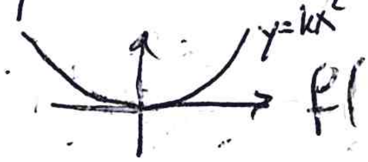
$$\lim_{r\to 0^+} \frac{r^3 \sin\theta \cos^2\theta}{r^2\sin^2\theta + r^4\cos^4\theta} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^3}{r^2} \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta + r^2\cos^4\theta} = 0,$$

però

$$\left|\frac{r^3 \sin\theta \cos^2\theta}{r^2[\sin^2\theta + r^2\cos^4\theta]}\right| \geq r\frac{|\sin\theta|\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = r\left|\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right| \to 0,$$

ma il limite non è uniforme in θ, perché se $\theta \to 0$ $r\left|\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right|$ non è limitato superiormente

Dunque il limite non esiste. E infatti, lungo le parabole $y = kx^2$ si ha



$$f(x, kx^2) = \frac{kx^4}{k^2x^4 + x^4} = \frac{k}{k^2+1}$$ costante dipendente da k

che è arbitrario.

- Le seguenti funzioni $:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sono invertibili?

$f_1(x) = e^x + x$, $\quad f_2(x) = e^x - x$, $\quad f_3(x) = e^{-x} - x$,

$f_4(x) = x^3 + x$, $\quad f_5(x) = x^3 - x$, $\quad f_6(x) = \sin \frac{x}{1+|x|}$.

- Provare che

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1]$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Asintoti

<u>Definizione</u> Sia $x_0 \in \mathbb{R}$, sia $f : [x_0 - R, x_0 + R] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$. Diciamo che la retta di equazione $x = x_0$ è <u>asintoto verticale</u> di f per $x \to x_0^+$, o per $x \to x_0^-$, se

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty, \quad \text{oppure} \quad \exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

<u>Esempio</u> $f(x) = \frac{1}{x}$ ha l'asintoto verticale $x = 0$; $g(x) = \log_b x$ ha l'asintoto verticale

$x=0$.

<u>Definizione</u> Sia $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$, oppure $f :]-\infty, a] \to \mathbb{R}$. Diciamo che la retta di equazione $y = px+q$ è <u>asintoto obliquo</u> (<u>asintoto orizzontale</u> quando $p=0$) di f per $x \to +\infty$, oppure per $x \to -\infty$, se

$$\exists \lim_{x\to+\infty} [f(x)-px-q] = 0, \quad \text{oppure} \quad \exists \lim_{x\to-\infty} [f(x)-px-q] = 0.$$

<u>Osservazioni</u> (1) f ha asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ se e solo se

$$\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = q \in \mathbb{R} \quad (\text{in tal caso l'asintoto è la retta } y=q).$$

(2) f ha un asintoto obliquo per $x \to +\infty$ se e solo se:

(i) $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pm\infty$,

(ii) $\exists \lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

(iii) $\exists \lim_{x\to+\infty} [f(x)-px] = q \in \mathbb{R}$

(in tal caso l'asintoto è la retta $y = px+q$.)

<u>Esempi</u>

- $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ ha gli asintoti obliqui $y = \pm x$ per $x \to \pm\infty$;
- $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ ha l'asintoto orizzontale $y=0$ per $x \to \pm\infty$,
- $f(x) = x \ln x$ non ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$,
- $f(x) = 3x + \ln x$ non ha asintoto obliquo per $x \to +\infty$ ma ha asintoto verticale per $x \to 0^+$.

- $f(x)=\frac{x^4+1}{x^3}$ ha l'asintoto obliquo $y=x$ per $x\to\pm\infty$, e l'asintoto verticale $x=0$ per $x\to 0^\pm$.

- Trovare, se esistono, gli asintoti di:

$f_1(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, $\quad f_2(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $\quad f_3(x)=|x-2|$,

$f_4(x)=\operatorname{arctg}\frac{e^x}{e^x-1}$, $\quad f_5(x)=\frac{x}{|x|}$, $\quad f_6(x)=\arccos\left(e^{x-2|x|}\right)$.