Continuità della funzione inversa

Sia $N=1$, $f: I \to \mathbb{R}$ continua, ove $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo. Se f è iniettiva su I, allora:

(i) f è strettamente monotona;

(ii) $J := f(I)$ è un intervallo;

(iii) $f^{-1}: J \to I$ è continua.

dim (i) Siano $a_0, b_0 \in I$ con $a_0 < b_0$. Se risulta $f(a_0) < f(b_0)$, proviamo che f è strettamente crescente in I; se risulta $f(a_0) > f(b_0)$, proviamo che f è strettamente decrescente in I. Supponiamo ad esempio $f(a_0) < f(b_0)$ (l'altro caso è analogo).

Sia $[a,b] \subseteq I$, siano $c, d \in [a,b]$ con $c < d$, e supponiamo per assurdo che $f(c) \geq f(d)$. Consideriamo le due funzioni continue

$$\alpha(t) = a_0 + t(c-a_0), \qquad \beta(t) = b_0 + t(d-b_0), \qquad t \in [0,1].$$

Risulta

$$\begin{cases} f(\alpha(0)) = f(a_0) < f(b_0) = f(\beta(0)), \\ f(\alpha(1)) = f(c) \geq f(d) = f(\beta(1)). \end{cases}$$

Poiché la funzione $t \mapsto f(\alpha(t)) - f(\beta(t))$ è continua su $[0,1]$, strettamente negativa per $t=0$ e non negativa per $t=1$, per il teorema di esistenza degli zeri esiste $t^* \in]0,1]$ tale che $f(\alpha(t^*)) = f(\beta(t^*))$. Poiché f è iniettiva, $\alpha(t^*) = \beta(t^*)$, ovvero

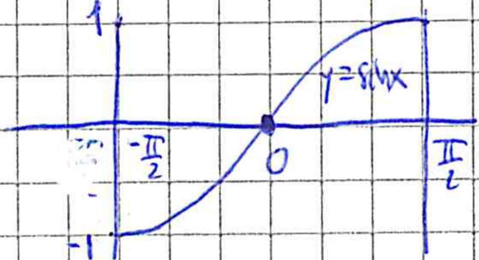
$$a_0 + t^*(c-a_0) = b_0 + t^*(d-b_0),$$

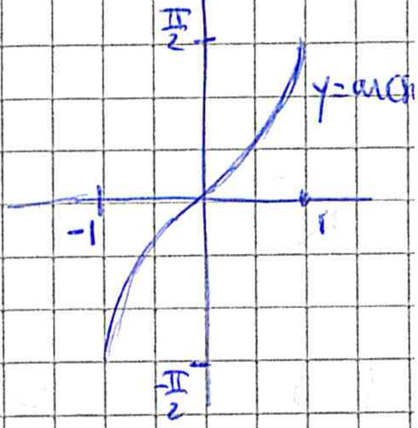
vale a dire
$$t^*(d-c)+(1-t^*)(b_0-a_0)=0,$$
il che è assurdo perché il 1° membro è positivo. Perciò $f(c)<f(d)$.
Per l'arbitrarietà di $[a,b]\subseteq I$, f è strettamente crescente su I.

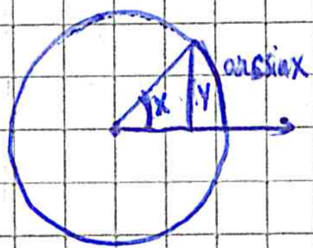
(ii) Siano $\ell=\inf_I f$, $L=\sup_I f$. Per il teorema dei valori intermedi
$$]\ell,L[\subseteq f(I),$$
mentre, per definizione di estremo superiore e inferiore,
$$f(I)\subseteq[\ell,L].$$
Perciò $f(I)$ è un intervallo (aperto, o semiaperto, o chiuso).

(iii) Anzitutto, f^{-1} è crescente se tale è f, è decrescente se tale è f. Sia y_0 un punto interno a $J=f(I)$. Poniamo
$$\lambda=\lim_{y\to y_0^-}f^{-1}(y),\quad \mu=\lim_{y\to y_0^+}f^{-1}(y);$$
questi limiti esistono per monotonia; inoltre $\lambda,\mu\in I$ e
$$\lambda\le f^{-1}(y_0)\le\mu \quad\text{se } f \text{ è crescente},$$
$$\lambda\ge f^{-1}(y_0)\ge\mu \quad\text{se } f \text{ è decrescente}.$$
Poiché f è continua nei punti λ e μ,
$$f(\lambda)=\lim_{y\to y_0^-}f(f^{-1}(y))=\lim_{y\to y_0^-}y=y_0,\; f(\mu)=\lim_{y\to y_0^+}f(f^{-1}(y))=\lim_{y\to y_0^+}y=y_0$$
Perciò $f(\lambda)=f(\mu)=y_0$, e per iniettività $\lambda=\mu=f^{-1}(y_0)$.
Dunque
$$\lim_{y\to y_0}f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0),\quad \text{cioè } f^{-1} \text{ è continua in } y_0.$$
Se y_0 è un estremo di J, l'argomento è ancora più semplice. – $\square$

<u>Esempi</u>: (1) $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ è strett. crescente. Quindi c'è l'inversa, detta $\arcsin y : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.







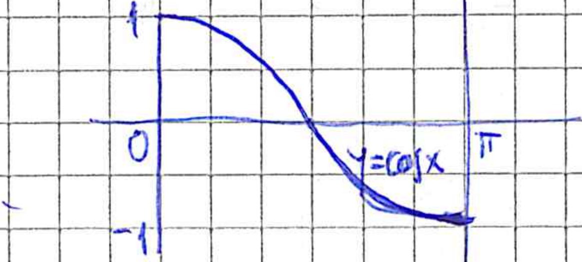
$$\left.\begin{array}{l} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ y = \sin x \end{array}\right\} \iff x = \arcsin y$$

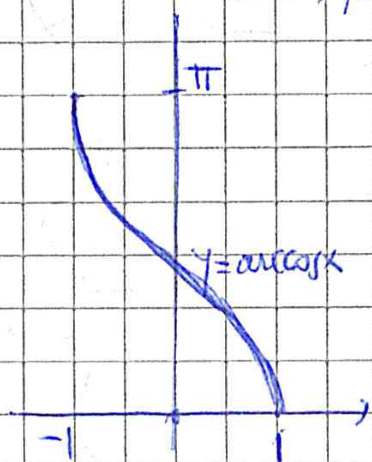
Dunque:

$$\sin(\arcsin x) = x \qquad \forall x \in [-1,1]$$

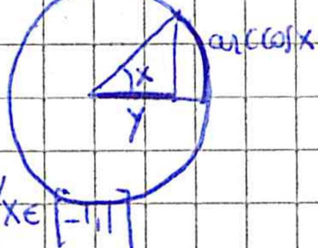
$$\arcsin(\sin x) = (-1)^k (x - k\pi) \qquad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right], \forall k \in \mathbb{Z}.$$

(2) $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ è strett. decrescente. Quindi c'è l'inversa, detta $\arccos y : [-1,1] \to [0,\pi]$.





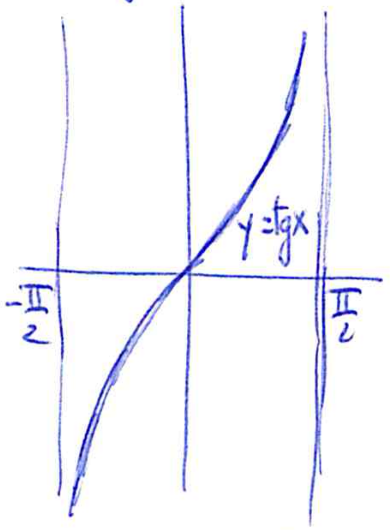
$$\left.\begin{array}{l} x \in [0,\pi] \\ y = \cos x \end{array}\right\} \iff x = \arccos y$$

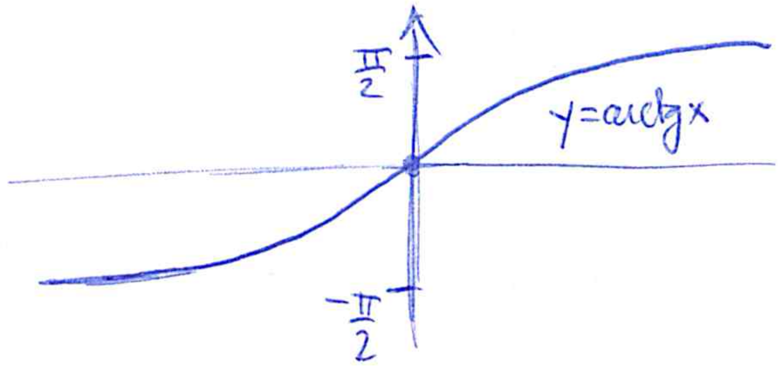


Dunque: $\cos(\arccos x) = x \quad \forall x \in [-1,1]$

$\arccos(\cos x) = \frac{\pi}{2} + (-1)^k [x - (k+\frac{1}{2})\pi] \qquad \forall x \in [k\pi, (k+1)\pi]$

(3) $tg: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ è strett. crescente. Dunque c'è l'inversa, detta $arctg: \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.





$$\left.\begin{array}{l} y = tg\,x \\ x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{array}\right\} \iff x = arctg\,y .$$

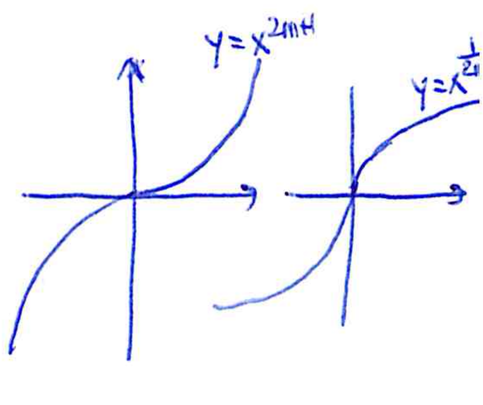
Dunque

$$tg(arctg\,x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

$$arctg(tg\,x) = x - k\pi \quad \forall x \in \left]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right[.$$

(4) se $n = 2m+1$ è dispari, la funzione $f(x) = x^{2m+1}$ è bigettiva da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ e strettamente crescente. L'inversa è $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{2m+1}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si noti che

$$x^{\frac{1}{2m+1}} = \begin{cases} \sqrt[2m+1]{|x|} & se \ x \geq 0 \\ -\sqrt[2m+1]{|x|} & se \ x < 0 , \end{cases}$$



ove $\sqrt[2m+1]{\ }$ è l'ordinaria radice $2m+1$-sima di un numero ≥ 0. Si ha

$$y = x^{2m+1} \iff x = y^{\frac{1}{2m+1}} .$$