CONTINUITÀ.

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme e sia $\underline{x}_0 \in A$. Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione.

Definizione Diciamo che f è continua in $\underline{x}_0$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| < \varepsilon$ per ogni $\underline{x} \in B(\underline{x}_0, \delta) \cap A$.

Definizione Diciamo che f è continua in A se è continua in ogni punto di A.

Osservazione La continuità è una proprietà locale: dipende solo dal comportamento di f nell'intorno del punto che si considera. C'è uno stretto legame con la nozione di limite: se $\underline{x}_0 \in A$, i casi sono due: (a) $\underline{x}_0$ è punto isolato di A, o (b) $\underline{x}_0$ è punto d'accumulazione per A. Nel caso (a), ogni $f: A \to \mathbb{R}$ è continua in $\underline{x}_0$, perché per $\delta > 0$ sufficientemente piccolo si ha $B(\underline{x}_0, \delta) \cap A = \{\underline{x}_0\}$. Nel caso (b), $f: A \to \mathbb{R}$ è continua in $\underline{x}_0$ se e solo se

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0).$$

Esempi: (1) Sono continue tutte le funzioni affini $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, ossia quelle della forma $f(\underline{x}) = \langle \underline{a}, \underline{x} \rangle_N + b = \sum_{j=1}^N a_j x_j + b$, con $\underline{a} \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}$ fissati: infatti, per ogni $\underline{x} \in \mathbb{R}^N$,

$$|f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| = |\langle \underline{a}, \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle_N| \le |\underline{a}|_N \, |\underline{x} - \underline{x}_0|_N .$$

(2) Somme e prodotti di funzioni continue sono funzioni continue (la verifica è facile). Quindi tutti i polinomi (in N variabili) sono funzioni continue su $\mathbb{R}^N$.

(3) La somma di una serie di potenze convergente per $|x| < R$ è continua in $]-R, R[$: se $f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ per $|x| < R$, allora fissato $x_0 \in]-R, R[$ si ha per $|\underline{x} - \underline{x}_0|_N < \delta \le \frac{R - |\underline{x}_0|_N}{2}$ (cosicché $|\underline{x}|_N, |\underline{x}_0|_N \le \frac{R + |\underline{x}_0|_N}{2}$):

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n\right| = \left|a_0 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x^n - x_0^n)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\,|x-x_0|\,\left|x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \dots + x\,x_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|\, n \left[\frac{R+|x_0|}{2}\right]^{n-1} |x-x_0| .$$

Poiché la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|x^n$ ha ancora raggio di convergenza R, essa converge assolutamente per $x = \frac{R+|x_0|}{2}$. Quindi

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n\right| \leq C\,|x-x_0| \qquad \text{per } |x-x_0| < \delta \leq \frac{R+|x_0|}{2} .$$

- Di conseguenza, $\cos x$, $\sin x$, e^x, $a^x = e^{x \ln a}$, sono continue su $\mathbb{R}$.

[Per seno e coseno si poteva più semplicemente notare che

$$|\cos x - \cos x_0| = 2\left|\sin\frac{x+x_0}{2}\,\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq |x-x_0|$$

$$|\sin x - \sin x_0| = 2\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\,\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leq |x-x_0| ,$$

essendo $|\sin t| \leq |t|$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

- $\ln x$ e $\log_b x = (\log_b e)\ln x$ sono continue su $]0,\infty[$.

Infatti, supposto ad esempio $x < x_0$, $0 < \delta \leq x_0$ e $|x-x_0| < \delta$,

$$|\ln x - \ln x_0| = \left|\ln\frac{x}{x_0}\right| = \left|\ln\left[1 + \left(\frac{x_0}{x} - 1\right)\right]\right| < \left|\frac{x_0}{x} - 1\right| = \frac{x_0 - x}{|x|} \leq \frac{|x-x_0|}{x_0 - \delta} .$$

[si è usato $\ln(1+t) < t$ $\forall t > 0$]. Se invece $x > x_0$, $0 < \delta \leq x_0$ e $|x-x_0| < \delta$,

$$|\ln x - \ln x_0| = \ln\frac{x}{x_0} = \ln\left(1 + \frac{x-x_0}{x_0}\right) < \frac{x-x_0}{x_0} = \frac{|x-x_0|}{x_0} .$$

<u>Continuità di funzioni composte</u>: sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$, siano $f : A \to \mathbb{R}$, e $g_1, \dots, g_N : [a,b] \to \mathbb{R}$ tali che risulti

$$(g_1(t), \dots, g_N(t)) \in A \quad \forall t \in [a,b].$$

Sia $t_0 \in [a,b]$ e poniamo $\underline{x}_0 = (g_1(t_0), \dots, g_N(t_0)) \in A$.

Se $g_1 \cdots g_N$ sono continue in t_0, e se f è continua in $\underline{x}_0$, allora $t \mapsto f(g_1(t), \dots, g_N(t))$ è continua in t_0.

<u>dim</u>. Sia $\varepsilon > 0$. Sia $\delta > 0$ tale che

$$|\underline{x} - \underline{x}_0|_N < \delta \Rightarrow |f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)| < \varepsilon.$$

Siano $\theta_1, \dots \theta_N > 0$ tali che

$$|t - t_0| < \theta_i \Rightarrow |g_i(t) - g_i(t_0)| < \frac{\delta}{\sqrt{N}}, \quad i = 1 \dots N.$$

Posto $\theta = \min\{\theta_1, \dots, \theta_N\}$, si ha $\theta > 0$ e

$$|t - t_0| < \theta \Rightarrow |g_i(t) - g_i(t_0)| < \frac{\delta}{\sqrt{N}}, \quad i = 1 \dots N,$$

dunque
$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N} |g_i(t) - g_i(t_0)|^2} < \delta,$$

da cui
$$|f(g_1(t) \dots g_N(t)) - f(\underline{x}_0)| < \varepsilon \text{ per } |t - t_0| < \theta. \square$$

<u>Osservazione</u> $\exists f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che (i) $f(x, \cdot)$ continua $\forall x \in \mathbb{R}$, (ii) $f(\cdot, y)$ continua $\forall y \in \mathbb{R}$, (iii) $f(\cdot,\cdot)$ discontinua in 0. Esempio: $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y = 0 \\ \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{altrimenti.} \end{cases}$