ANA 1 ve 7/12/18

Esercizi



1

$$\begin{cases} w\bar{z} = \bar{w} \\ \bar{w}^4 z^4 + 16 = 0 \end{cases}$$

2

Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ $\exists\, \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\sqrt{n^5+5} - \sqrt{n-2}}}{n^\alpha} = \ell \ ?$$

3

Calcolare $\max\lim_{n\to\infty}$ e $\min\lim_{n\to\infty}$ di

$$a_n = \frac{1 - \cos\left[\frac{1+(-1)^n}{2n}\right] - \frac{1}{n^3}}{\left(e^{\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right]} - 1\right)^2}.$$

4

Analizzare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n \frac{z^n}{n}.$$

5

$$\lim_{n\to\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right)^{n+\sqrt{n}} \quad (a, b \geq 0).$$

6

$$\begin{cases} z^3 - w^3 = i \\ \bar{z}^3 + \bar{w}^3 = -i \end{cases}$$

7

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} + \frac{(-1)^{3n^2}}{n}\right] (2z)^{2n+1}.$$

Risoluzione

1. La prima equazione, passando al coniugato, dice che

$$\bar{w}z = w\,;$$

sostituendo nella seconda si ottiene

$$w^4 = (\bar{w}z)^4 = -16,$$

dunque $w$ è una delle radici quarte di $-16$, che sono

$$w_j = 2\,e^{i\theta_j}, \qquad j=0,1,2,3,$$

ove

$$\theta_0 = \frac{1}{4}\arg(-16) = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_1 = \frac{\pi+2\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi, \quad \theta_2 = \frac{\pi+4\pi}{4} = \frac{5}{4}\pi, \quad \theta_3 = \frac{\pi+6\pi}{4} = \frac{7}{4}\pi$$

Perciò

$$w_0 = 2\left(\frac{1}{\sqrt2}+\frac{i}{\sqrt2}\right) = \sqrt2(1+i)$$

$$w_1 = 2\left(-\frac{1}{\sqrt2}+\frac{i}{\sqrt2}\right) = \sqrt2(-1+i)$$

$$w_2 = 2\left(-\frac{1}{\sqrt2}-\frac{i}{\sqrt2}\right) = \sqrt2(-1-i)$$

$$w_3 = 2\left(\frac{1}{\sqrt2}-\frac{i}{\sqrt2}\right) = \sqrt2(1-i).$$

Di conseguenza, essendo $z = \dfrac{w}{\bar{w}} = \dfrac{w^2}{|w|^2} = \dfrac{w^2}{4}$, si ha

$$z_0 = \frac{w_0^2}{4} = i$$

$$z_1 = \frac{w_1^2}{4} = -i,$$

$$z_2 = \frac{w_2^2}{4} = i$$

$$z_3 = \frac{w_3^2}{4} = -i$$

e le soluzioni sono le coppie $(i, \sqrt2(1+i))$, $(-i, \sqrt2(-1+i))$, $(i, \sqrt2(-1-i))$, $(-i, \sqrt2(1-i))$.

2. Il numeratore si scrive

$$n^{5/6}\sqrt[3]{\sqrt{1+\frac{5}{n^5}}-\sqrt{\frac{1}{n^4}-\frac{2}{n^5}}}$$

con il secondo fattore che tende a 1 e quindi per $n\to\infty$ è ininfluente. Il denominatore è $n^\alpha$. Pertanto il limite è finito e diverso da 0 se e solo se $\alpha=\frac{5}{6}$; il limite è 0 per $\alpha>\frac{5}{6}$ ed è $+\infty$ per $\alpha<\frac{5}{6}$.

3. Se $n$ è pari,

$$a_n=\frac{1-\cos\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}}{\left[e^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}-1\right]^2}=\frac{\frac{1}{n^2}\left[\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}-\frac{1}{n}\right]}{\left[\frac{e^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}-1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}\right]^2\frac{\frac{1}{n^2}}{\left[\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right]^2}}\to\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=2.$$

Se $n$ è dispari,

$$a_n=\frac{1-1-\frac{1}{n^3}}{\left[e^{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}-1\right]^2}=-\frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{4n^2}}=-\frac{4}{n}\to 0.$$

Ne segue

$$\max\lim_{n\to\infty}a_n=2,\qquad \min\lim_{n\to\infty}a_n=0.$$

4. Osserviamo che

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=i,$$

quindi la serie si riscrive come

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n z^n}{n}.$$

Dato che

$$\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|i^n|}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

la serie converge assolutamente per $|z|<1$ e non converge per $|z|>1$. Quando $|z|=1$, succede di tutto:

- se $z=i$, si ha $i^n z^n = i^{2n} = (-1)^n$, quindi la serie converge per il criterio di Leibniz;
- se $z=-i$, si ha $i^n z^n = (-1)^n i^{2n} = 1$, quindi la serie si riduce alla serie armonica e quindi diverge a $+\infty$
- se $z=1$, si ha $i^n z^n = i^n$. La serie converge perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{i^n}{n} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[ \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{(-1)^k}{2k} + i \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{2k+1} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

- se $z=-1$, si ha $i^n z^n = (-1)^n i^n$, e la serie converge perché

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{i^n (-1)^n}{n} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \left[ \sum_{k=1}^{[N/2]} \frac{(-1)^k \cdot 1}{2k} + i \sum_{k=0}^{\left[\frac{N-1}{2}\right]} \frac{(-1)^k (-1)}{2k+1} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k} - i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

(d'altronde, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{i^n}}{n} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}}$).

5. Si ha, per $a>0$,

$$\left(a+\frac{b}{n}\right)^{n+\sqrt{n}} = a^{n+\sqrt{n}}\left(1+\frac{b}{an}\right)^{n+\sqrt{n}} =$$

$$= a^{n+\sqrt{n}}\left(1+\frac{b}{an}\right)^{n}\left(1+\frac{b}{an}\right)^{\sqrt{n}}.$$

Poiché

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{an}\right)^{n} = e^{\frac{b}{a}},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{an}\right)^{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{b}{an}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1,$$

si deduce

$$\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{b}{n}\right)^{n+\sqrt{n}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a>1 \\ e^{b} & \text{se } a=1 \\ 0 & \text{se } 0<a<1. \end{cases}$$

Se $a=0$, invece,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{n}\right)^{n+\sqrt{n}} = 0 .$$

6. Passando al coniugato nella seconda equazione, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} z^3-w^3=i \\ z^3+w^3=i \end{cases},$$

da cui, sommando e sottraendo,

$$z^3 = i, \quad w^3 = 0.$$

Perciò $w=0$ e $z$ è una delle radici cubiche di $i$, cioè

$$z_0 = e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad z_1 = e^{i\frac{5}{6}\pi}, \quad z_2 = e^{i\frac{3}{2}\pi},$$

vale a dire

$$z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}, \quad z_3 = -i.$$

Le coppie soluzioni sono dunque $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}, 0\right), (-i, 0)$.

7. Essendo $3n^2$ dispari per $n$ dispari e pari per $n$ pari, si ha $(-1)^{3n^2} = (-1)^n$ e quindi la serie si scrive come

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{n}\right](2z)^{2n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot (-1)^n}{n(n+(-1)^n)}(2z)^{2n+1},$$

e dunque si riduce a

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+(-1)^n)}(2z)^{2n+1}.$$

Si ha

$$\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{n[n+(-1)^n]}\, 2^{2n+1}} = 2$$

(si noti che $\frac{1}{n(n+(-1)^n)}\, 2^{2n+1}$ è il coefficiente di $z^{2n+1}$.)

Quindi la serie converge assolutamente per $|z| < \frac{1}{2}$ e non converge per $|z| > \frac{1}{2}$. Per $|z| = \frac{1}{2}$ la serie converge assolutamente, per confronto asintotico con $\sum 1/n^2$.