ANA 1 | ma. 4/12/18 | 140

<u>dim. del teorema di Bolzano-Weierstrass</u> Sia $N=1$. Esiste un intervallo $[a,b] \supseteq E$ (poiché E è limitato). Utilizziamo il <u>metodo di bisezione</u>. Sia $\{x_n\}$ una successione contenuta in E: nel caso banale in cui essa assume infinite volte lo stesso valore, gli infiniti indici per i quali ciò accade individuano una sottosuccessione <u>costante</u>, dunque convergente. Altrimenti, la $\{x_n\}$ assume infiniti valori distinti: quindi uno almeno fra $[a,\frac{a+b}{2}]$ e $[\frac{a+b}{2},b]$ contiene infiniti elementi di $\{x_n\}$; indichiamo tale intervallo con $[a_1,b_1]$ (se entrambi gli intervalli contengono infiniti elementi di $\{x_n\}$, diamo la regola di scegliere il primo). Iteriamo il procedimento: uno almeno fra $[a_1,\frac{a_1+b_1}{2}]$ e $[\frac{a_1+b_1}{2},b_1]$ contiene infiniti elementi di $\{x_n\}$, e lo indichiamo con $[a_2,b_2]$.

Procedendo in questo modo, dopo k passi abbiamo

$$[a_k,b_k] \subset [a_{k-1},b_{k-1}], \qquad b_k-a_k = \frac{b-a}{2^k},$$

e $[a_k,b_k]$ contiene infiniti elementi di $\{x_n\}$. Dato che $b_k-a_k \to 0$ e

$$a \le a_1 \le \dots \le a_k \le a_{k+1} < b_{k+1} \le b_k \le \dots \le b_1 \le b,$$

si ottiene

$$\exists \lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k =: x^*.$$

Poiché $x^* \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}^+} [a_k,b_k]$, ed in ogni $[a_k,b_k]$ si può scegliere un elemento $x_{n_k} \in \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (distinto da x^*), abbiamo costruito una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, che converge a x^*, essendo

$$|x_{n_k}-x^*| \le b_k-a_k \to 0.$$

Inoltre, essendo $x_{n_k} \neq x^*$, il punto x^* è di accumulazione per E: infatti, ogni intorno $]x^*-r, x^*+r[$ contiene gli intervalli $[a_k, b_k]$ se k è sufficientemente grande: dunque

$$]x^*-r, x^*+r[\cap (E \setminus \{x^*\})$$

è non vuoto, dato che contiene x_{n_k} per k grande.

Supponiamo ora $N > 1$. L'idea è la stessa: se $N=2$, E sarà incluso in un quadrato $[a,b] \times [a,b]$, che poi verrà diviso in $4, 8, 16 \ldots$ parti, selezionando quelle che contiene infiniti punti della successione. Si otterranno quadrati Q_k sempre più piccoli, con

$$Q_k \subset Q_{k-1}, \qquad \text{area } Q_k = \frac{(b-a)^2}{4^k},$$

e Q_k contiene infiniti elementi di $\{x_n\}$. Si troverà un punto $x^* \in \bigcap_k Q_k$, che sarà il limite di una opportuna sottosuccessione di $\{x_n\}$.

Se $N=3$ si fa la stessa procedura con i cubi, divisi a ogni passo in 8 parti: per il k-simo cubo avremo

$$Q_k \subset Q_{k-1}, \qquad \text{volume } Q_k = \frac{(b-a)^3}{8^k},$$

e Q_k contiene infiniti elementi di $\{x_n\}$.

Per un N generico, sarà $E \subseteq [a,b]^N$, e si dividerà questo cubo N-dimensionale in 2^N sottocubi, poi in 2^{2N}, poi in 2^{3N}, e per il k-simo N-cubo si avrà $Q_k \subset Q_{k-1}$, volume N-dim $Q_k = \dfrac{(b-a)^N}{2^{Nk}}$. $\square$

Definizione Un sottoinsieme $K \subset \mathbb{R}^N$ si dice *compatto* se ogni successione $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contenuta in K ha una sottosuccessione convergente ad un punto di K.

Osservazione Dal teorema di Bolzano-Weierstrass segue che ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}^N$, che sia chiuso e limitato, è anche compatto.

Viceversa, se $E \subseteq \mathbb{R}^N$ è compatto, allora E deve essere limitato: altrimenti esisterebbe $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ tale che $|\underline{x}_n|_N \to +\infty$, e non potremmo estrarre da essa alcuna sottosuccessione convergente. Ma E deve essere anche chiuso: infatti, se $\underline{x}^*$ è un punto d'accumulazione per E, allora esiste $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E \setminus \{\underline{x}^*\}$ tale che $\underline{x}_n \to \underline{x}^*$ (basta scegliere $\underline{x}_n \in B(\underline{x}^*, \frac{1}{n}) \cap (E \setminus \{\underline{x}^*\})$, che è non vuoto per definizione di punto d'accumulazione). Per compattezza, $\{\underline{x}_n\}$ ha una sottosuccessione che converge a un punto $\underline{x} \in E$; ma poiché $\underline{x}_n \to \underline{x}^*$, ogni sottosuccessione di essa deve tendere a $\underline{x}^*$: ne segue $\underline{x} = \underline{x}^* \in E$. Perciò E contiene tutti i suoi punti d'accumulazione e quindi è chiuso. □

Dunque, in $\mathbb{R}^N$ i compatti sono tutti e soli i limitati e chiusi. Ma la nozione di compattezza è importante soprattutto in contesti più generali come gli spazi metrici, dove esistono insiemi chiusi e limitati non compatti. □

Funzioni reali di 1 o più variabili reali

Introduzione con un po' di richiami. Sia $f: A \to B$; si dice che A = dominio di f, B = codominio di f.

f è iniettiva se $f(x) \neq f(x')$ per ogni $x \neq x'$;

f è surgettiva se $\forall y \in B$ esiste $x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Ponendo $f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$, ogni $f: A \to f(A)$ è automaticamente surgettiva: $f(A)$ è l'immagine di f. Il problema è che spesso non sappiamo caratterizzare precisamente $f(A)$.

Esempio: sia $g: \mathbb{Z} \to [-1,1]$, $g(k) = \sin k$. Chi è $f(\mathbb{Z})$? mistero.

Molte funzioni, opportunamente ristrette a certi sottoinsiemi di A, diventano iniettive.

Esempio: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è iniettiva, né surgettiva. Però $f(\mathbb{R}) = [0, \infty[$, e inoltre $f: [0,\infty[\to [0,\infty[$ è iniettiva e surgettiva.

$f: A \to B$ è bigettiva se è iniettiva e surgettiva: se f è bigettiva, $\forall y \in B \ \exists! \ x \in A$ tale che $f(x) = y$.

Se f è bigettiva da A in B, esiste la funzione inversa $f^{-1}: B \to A$: per $y \in B$, $f^{-1}(y)$ è quell'unico $x \in A$ per cui $f(x) = y$. Dunque

$$f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B, \qquad f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A.$$

Esempi: (1) $f: [0,\infty[\to [0,\infty[$, $f(x) = x^2 \Rightarrow f^{-1}: [0,\infty[\to [0,\infty[$, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$

(2) $f: \mathbb{R} \to]0,\infty[$, $f(x) = a^x$ $[a>0, a \neq 1] \Rightarrow f^{-1}:]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = \log_a y$.

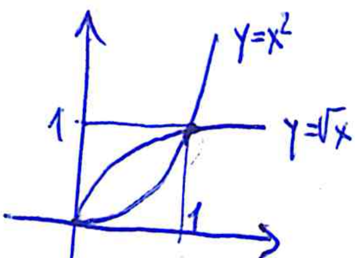
(3) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 \Rightarrow f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(y) = y^{1/3}$.

Grafico: se $f: A \to B$, il grafico di f è

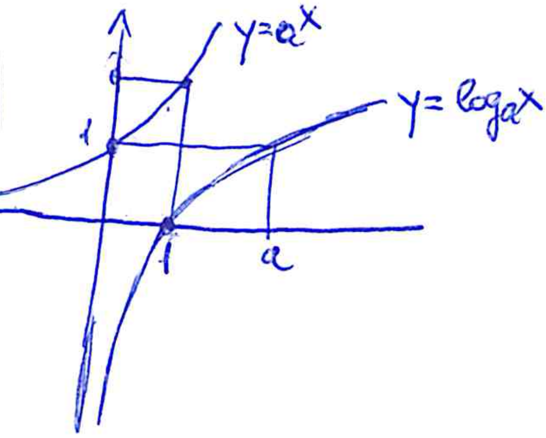
$$G_f = \{(x,y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

Se $f: A \to B$ è bigettiva, allora in $A \times B$ $G_{f^{-1}}$ è la simmetrica di G_f rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante.

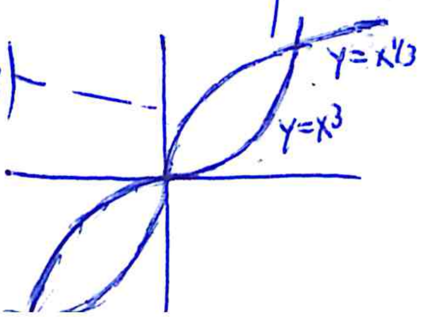
Esempi (1)



(2)



(3)



funzioni pari e funzioni dispari: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è pari se

$$f(x)=f(-x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

[come x^2, $\cos x$, $\cosh x$ (coseno iperbolico di x) $:=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$]; $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è dispari se

$$f(x)=-f(-x)\quad\forall x\in\mathbb{R}$$

[come x^3, $\sin x$, $\sinh x$ (seno iperbolico di x) $:=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\operatorname{tg} x$.]

Se f è pari e dispari, allora $f=0$. Invece di funzioni né pari, né dispari ce n'è un mucchio!

Monotonia. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è crescente se $f(x)\leq f(x')$ $\forall x\leq x'$, è strettamente crescente se $f(x)<f(x')$ $\forall x<x'$; è decrescente se $f(x)\geq f(x')$ $\forall x\leq x'$, è strettamente decrescente se $f(x)>f(x')$ $\forall x<x'$

Si noti che f è crescente se e solo se $-f$ è decrescente.

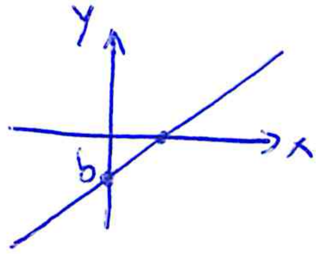
Esempi. Sia $f(x)=ax+b$, $x\in\mathbb{R}$.

Se $a=0$, f è costante (è l'unico caso in cui f è sia crescente che decrescente

$a>0 \iff f$ è strettamente crescente;

$a<0 \iff f$ è strettamente decrescente;

$b=0 \iff f(0)=0$.

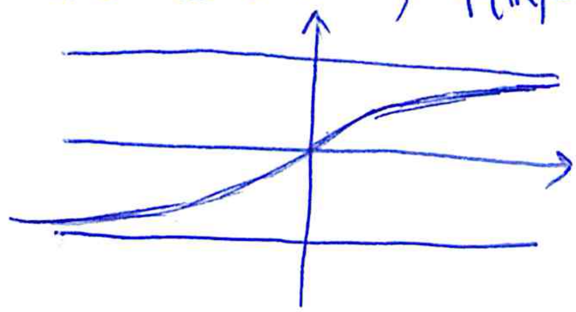


Se $a\neq 0$, f è bigettiva e $f^{-1}(y)=\frac{y-b}{a}$ $\forall y\in\mathbb{R}$.

Sia $f(x) = ax^2 + bx + c$; il grafico è una parabola con vertice in $x_0 = \frac{-b}{2a}$, con $f(x_0) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$ e concavità verso l'alto se e solo se $a>0$.

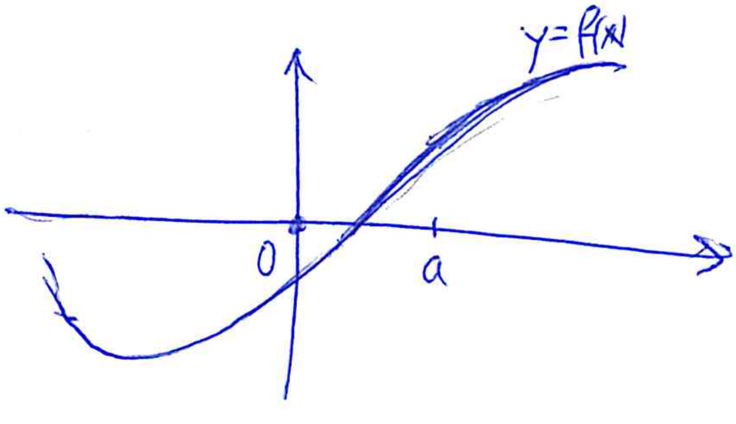
Questa f non è iniettiva, con $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{b^2-4ac}{4a}, +\infty\right[$ se $a>0$, $f(\mathbb{R}) = \left]-\infty, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right]$ se $a<0$. Però f è iniettiva su $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ e su $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.

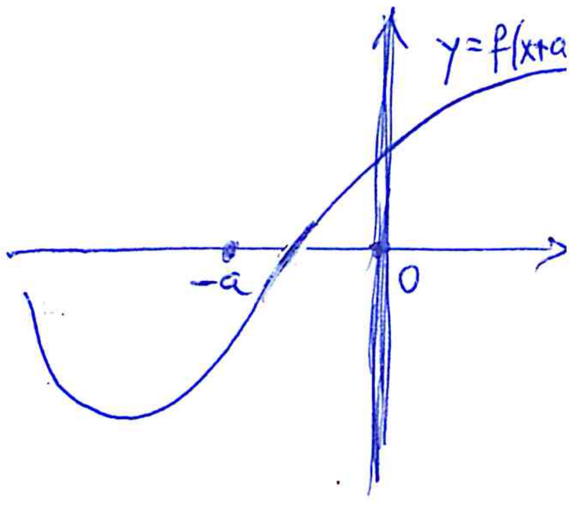
Sia $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$: f è dispari, strettamente crescente, $f(\mathbb{R}) =]-1,1[$, inversa $f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}$ $\forall y \in]-1,1[$.



Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia $a>0$.

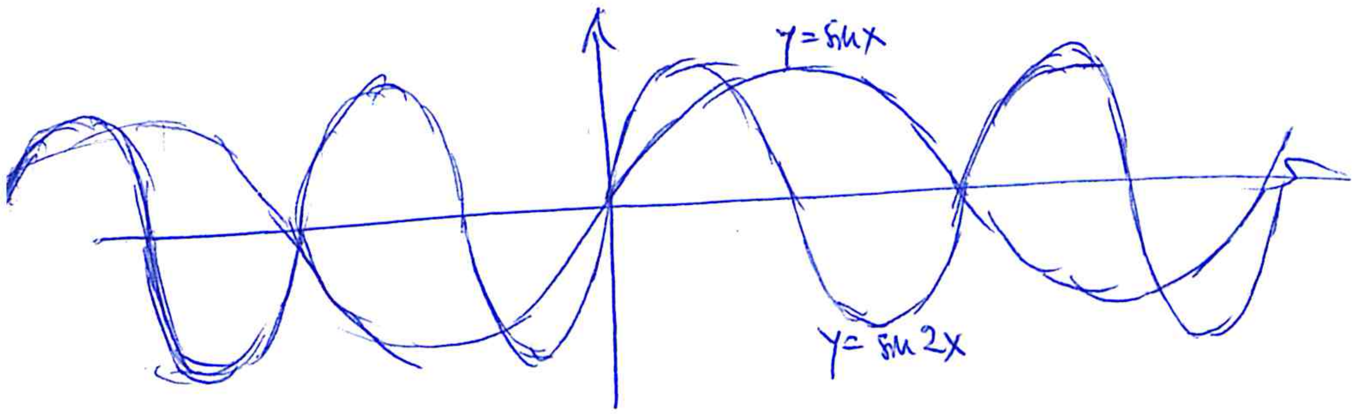
Il grafico di $g(x) = f(x+a)$ è quello di f traslato verso sinistra di una distanza pari ad a. Ovvero, tengo fisso il grafico di f e sposto gli assi verso destra di a!





Il grafico di $h(x) = f(ax)$, se $a > 1$, è quello di f compresso di un fattore $\frac{1}{a}$ (in larghezza, non in altezza).

Es. $\sin x$ e $\sin 2x$



Il grafico di $g(x) = f(-x)$ è il grafico di f simmetrizzato rispetto all'asse y. Quello di $-f(-x)$ simmetrizza rispetto all'origine.

Il grafico di $k(x) = f(|x|)$ invece riflette attorno all'asse y il grafico di $f(x)$, $x \geq 0$.

LIMITI E CONTINUITÀ

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$, sia $f: A \to \mathbb{R}$, sia $\underline{x}_0$ un punto d'accumulazione per A.

Definizione Sia $L \in \mathbb{R}$. Dico che

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(x) = L$$

se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $|f(\underline{x}) - L| < \varepsilon \ \forall \underline{x} \in [B(\underline{x}_0, \delta) \cap A] \setminus \{\underline{x}_0\}$.

Dico che

$$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(x) = +\infty \ [-\infty]$$

se $\forall M > 0 \ \exists \delta > 0$ tale che $f(x) \geq M \ [f(x) < -M] \ \forall \underline{x} \in [B(\underline{x}_0, \delta) \cap A] \setminus \{\underline{x}_0\}$.

Osservazioni: 1. ricordiamo che $B(\underline{x}_0, \delta) = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^N : |\underline{x} - \underline{x}_0|_N < \delta\}$, e che per $N = 1$ si ha $B(x_0, \delta) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.

2. Il limite dipende solo dai valori che f assume nei punti di A sufficientemente vicini a $\underline{x}_0$, ma diversi da $\underline{x}_0$.

Esempio: per $N = 1$, come seguirà dal "teorema-ponte",

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \exists \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \exists \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \exists \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Esercizio: negare l'affermazione "f ha limite per $\underline{x} \to \underline{x}_0$, finito o infinito".

Teorema-ponte. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$, sia $\underline{x}_0$ punto d'accumulazione per A, sia $f: A \to \mathbb{R}$, sia $L \in \mathbb{R}$ oppure $L = \pm\infty$. Risulta $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x}) = L$ se e solo se $\forall \{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{\underline{x}_0\}$, tale che $\underline{x}_n \to \underline{x}_0$ per $n \to \infty$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} f(\underline{x}_n) = L.$$

dim. ($\Longrightarrow$) Per ipotesi (caso $L \in \mathbb{R}$) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tale che

$$|f(\underline{x}) - L| < \varepsilon \quad \forall \underline{x} \in (A \setminus \{\underline{x}_0\}) \cap B(\underline{x}_0, \delta).$$

Sia $\{\underline{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{\underline{x}_0\}$ tale che $\underline{x}_n \to \underline{x}_0$: allora $\exists \nu \in \mathbb{N}$ tale che $\underline{x}_n \in [A \setminus \{\underline{x}_0\}] \cap B(\underline{x}_0, \delta)$, $\forall n \geq \nu$; dunque

$$|f(\underline{x}_n) - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu,$$

cioè $f(\underline{x}_n) \to L$. Il caso $L = \pm\infty$ è analogo.

($\Longleftarrow$) Per assurdo: se $f(\underline{x})$ non ha limite L per $\underline{x} \to \underline{x}_0$, allora $\exists \varepsilon_0 > 0$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ $\exists \underline{x}_n \in B(\underline{x}_0, \frac{1}{n}) \cap [A \setminus \{\underline{x}_0\}]$ tale che $|f(\underline{x}_n) - L| \geq \varepsilon_0$. Dunque $\underline{x}_n \to \underline{x}_0$ per $n \to \infty$, $\{\underline{x}_n\} \subseteq A \setminus \{\underline{x}_0\}$, ma $f(\underline{x}_n) \not\to L$, il che contraddice l'ipotesi. $\square$

In particolare, da questo teorema si ricava l'algebra dei limiti già nota per le successioni: se $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = L$, $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} g(\underline{x}) = M$, allora vale $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} [f(\underline{x}) + g(\underline{x})] = L + M$, $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} [f(\underline{x}) g(\underline{x})] = LM$ e, se $M \neq 0$, $\lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})} = \frac{L}{M}$.

Attenzione alle forme indeterminate $0 \cdot \infty$, $+\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$!