Facsimile di compito:

- Trovare gli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\left(\frac{z+2\bar{z}+i}{z-3\bar{z}+i}\right)^2 = -1 .$$

- Calcolare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite (se esiste)

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\sqrt{1+n^4}-\sqrt{5+n^\alpha}\right].$$

- Stabilire per quali $x \in \mathbb{R}$ è convergente la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[x^{7n}+(-1)^n\frac{2n}{2n+1}x^{10n}\right].$$

Risoluzione fac-simile:

Es. 1 Conviene porre

$$w = \frac{z+2\bar{z}+i}{z-3\bar{z}+i},$$

e risolvere anzitutto

$$w^2 = -1,$$

che fornisce

$$w = i, \quad \text{oppure} \quad w = -i.$$

L'equazione data si scinde nelle 2 che seguono:

$$\frac{z+2\bar{z}+i}{z-3\bar{z}+i} = i, \qquad \text{oppure} \qquad \frac{z+2\bar{z}+i}{z-3\bar{z}+i} = -i.$$

Risolviamo la prima: scrivendo $z = x+iy$, essa si scrive

$$\frac{3x-iy+i}{-2x+4iy+i} = i$$

e naturalmente deve essere $\left|-2x+(4y+1)i\right| = \sqrt{4x^2+(4y+1)^2} \neq 0$,
ossia $z \neq -\frac{i}{4}$. Si ha

$$3x-iy+i = i(-2x+4iy+i) = -(4y+1)-2ix$$

da cui

$$\begin{cases} 3x = -(4y+1) \\ 1-y = -2x. \end{cases}$$

La seconda equazione ci dice che $y = 1+2x$, e dalla prima si ottiene allor

$$3x = -4 - 8x - 1$$

$$11x = -5$$

$$x = -\frac{5}{11},$$

e quindi $y = 1 - \frac{10}{11} = \frac{1}{11}$. Perciò $z = \frac{-5+i}{11}$.

Risolviamo l'altra equazione, che con $z = x+iy$ diviene

$$\frac{3x - iy + i}{-2x + 4iy + i} = -i \qquad \left(z \neq -\frac{i}{4}, \text{ come prima} \right).$$

$$3x - iy + i = -i(-2x + 4iy + i) = (4y+1) + 2ix$$

da cui

$$\begin{cases} 3x = 4y + 1 \\ 1 - y = 2x \end{cases}$$

Dunque

$$y = 1 - 2x, \qquad 3x = 4 - 8x + 1$$

$$11x = 5$$

$$x = \frac{5}{11},$$

e perciò $y = \frac{1}{11}$, ossia $z = \frac{5+i}{11}$.

In conclusione, l'equazione iniziale è risolta da

$$z = \frac{\pm 5 + i}{11}.$$

Es. 2 Scriviamo

$$n^2\left[\sqrt{1+n^4}-\sqrt{5+n^\alpha}\right] = n^2\,\frac{1+n^4-5-n^\alpha}{\sqrt{1+n^4}+\sqrt{5+n^\alpha}} = \frac{n^2(-4+n^4-n^\alpha)}{\sqrt{1+n^4}+\sqrt{5+n^\alpha}}.$$

L'andamento del numeratore cambia a seconda che sia $4>\alpha$, $4=\alpha$, $4<\alpha$. Analizziamo i tre casi.

Se $\alpha>4$, scriviamo

$$n^2\left[\sqrt{1+n^4}-\sqrt{5+n^\alpha}\right] = \frac{n^{2+\alpha}\left[-\frac{4}{n^\alpha}+\frac{n^4}{n^\alpha}-1\right]}{n^{\alpha/2}\left[\sqrt{\frac{1}{n^\alpha}+\frac{n^4}{n^\alpha}}+\sqrt{\frac{5}{n^\alpha}+1}\right]};$$

isolato il termine $\frac{n^{2+\alpha}}{n^{\alpha/2}} = n^{2+\frac{\alpha}{2}}$, il resto della frazione tende a $\frac{-1}{0+1}=-1$. Poiché $2+\frac{\alpha}{2}>4>0$, il limite è $-\infty$.

Se $\alpha=4$, si ha

$$n^2\left[\sqrt{1+n^4}-\sqrt{5+n^4}\right] = n^2\,\frac{-4}{\sqrt{1+n^4}+\sqrt{5+n^4}} = n^2\,\frac{-4}{n^2\left[\sqrt{\frac{1}{n^4}+1}+\sqrt{\frac{5}{n^4}+1}\right]}$$

$$= \frac{-4}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1+\frac{5}{n^4}}} \longrightarrow \frac{-4}{2} = -2$$

Infine se $\alpha<4$ otteniamo

$$n^2\left[\sqrt{1+n^4}-\sqrt{5+n^4}\right] = \frac{n^{2+4}\left[-\frac{4}{n^4}+1-\frac{n^\alpha}{n^4}\right]}{n^2\left[\sqrt{\frac{1}{n^4}+1}+\sqrt{\frac{5}{n^4}+\frac{n^\alpha}{n^4}}\right]},$$

e isolato il fattore n^4, il resto della frazione tende a $\underline{1}=1$. Quindi

Il limite è $+\infty$. In conclusione

$$\lim_{n\to\infty} n^2\left[\sqrt{1+n^4}-\sqrt{5+n^\alpha}\right] = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha>4 \\ -2 & \text{se } \alpha=4 \\ +\infty & \text{se } \alpha<4. \end{cases}$$

Es. 3 La serie proposta è somma delle due serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{7n}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{2n+1} x^{10n}.$$

Se queste due convergono, convergerà anche la loro somma; vedremo che la serie proposta in effetti convergerà se e solo se convergono entrambi gli addendi.

La serie $\sum x^{7n}$ è una serie geometrica di ragione x^7: essa quindi converge (e anche assolutamente) se e solo se $|x|<1$.

La serie $\sum (-1)^n \frac{2n}{2n+1} x^{10n}$ è una serie di potenze della forma $\sum a_n x^n$, e

$$\max\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2n}{2n+1}} = 1.$$

Dunque essa converge assolutamente per $|x|<1$, mentre per $x=\pm1$ non converge perché si riduce alla serie $\sum (-1)^n \frac{2n}{2n+1}$, che non può convergere poiché il termine generale non è infinitesimo.

Pertanto la serie proposta converge assolutamente per $|x|<1$. Essa potrebbe convergere per $x=\pm1$, ma non è così perché se $x=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[1^{7n}+(-1)^n\frac{2n}{2n+1}1^{10n}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+(-1)^n\frac{2n}{2n+1}\right)$$ 142

non può convergere perché $1+(-1)^n\frac{2n}{2n+1}$ non ha limite (oscilla fra 0 e 2); se invece $x=-1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^{7n}+(-1)^n\frac{2n}{2n+1}(-1)^{10n}\right]=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[1+\frac{2n}{2n+1}\right]$$

non può convergere per lo stesso motivo.

Si noti che invece la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[x^{7n}-(-1)^n\frac{2n}{2n+1}x^{10n}\right]$$

converge, oltre che per $|x|<1$, anche per $x=-1$, in virtù del criterio di Leibniz.