Un teorema: senza dimostrazione: serie prodotto

Definizione Siano $\sum a_n z^n$ e $\sum b_n z^n$ due serie di potenze. La serie prodotto è la serie di potenze $\sum c_n z^n$, ove

$$c_0 = a_0 b_0,\ c_1 = a_1 b_0 + a_0 b_1,\ c_2 = a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2, \dots$$

ovvero
$$c_n = \sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(questa regola estende l'ordinario prodotto di polinomi).

Teorema. Se $\sum a_n z^n$, $\sum b_n z^n$ hanno raggi di convergenza r e R rispettivamente, allora $\sum c_n z^n$ ha raggio di convergenza $\min\{r, R\}$ e vale
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) \quad \forall |z| < \min\{r, R\}.$$

Esempio Per $|z|<1$, $\sum z^n = \frac{1}{1-z}$. Dunque
$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} 1\right) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n,$$
e induttivamente
$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n \quad \text{per } |z|<1.$$

Infatti il passo base $k=1$ è stato già fatto; se vale la tesi per k, allora
$$\frac{1}{(1-z)^{k+2}} = \frac{1}{1-z}\,\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k} z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{j=0}^{n} 1\cdot\binom{j+k}{k}\right] z^n,$$
ma $\sum_{j=0}^{n}\binom{j+k}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}$ (esercizio già fatto), per cui $\frac{1}{(1-z)^{k+2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k+1}{k+1} z^n$. $\square$

Esercizi

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{\sqrt{n}}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{2^n \cdot n(n+1)}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} z^n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(z-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n+\frac{1}{n}}$,
- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2in}{n+2i}\right)^n z^n$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$
- $\sum_{n=0}^{\infty} (iz)^n$
- $\sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}} z^n \quad (a>0)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-2i}{\sqrt{3}-i}\right)^n \ln n.$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(a+nb)\, x^n = \frac{\cos a - x\cos(a-b)}{1-2x\cos b + x^2}$, $|x|<1$, $a,b \in \mathbb{R}$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(a+nb)\, x^n = \frac{\sin a - x\sin(a-b)}{1-2x\cos b + x^2}$ $|x|<1$, $a,b \in \mathbb{R}.$