Limiti ed ordinamento di $\mathbb{R}$

- **Confronto** Se $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ sono successioni reali tali che:

  (i) $\exists \lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{n\to\infty} b_n = M \in \mathbb{R}$,

  (ii) $a_n \le b_n$ definitivamente (cioè $\forall n \ge \nu$, con ν opportuno),

allora $L \le M$.

dim. Ci basta metà della definizione di limite. Sia $a_n \le b_n$ $\forall n \ge \nu$.

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \nu_1 \in \mathbb{N}$, $\nu_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$L - \varepsilon < a_n$ $\forall n \ge \nu_1$, $b_n < M + \varepsilon$ $\forall n \ge \nu_2$.

Allora $\forall n \ge \max\{\nu_1, \nu_2, \nu\}$ si ha

$$L - \varepsilon < a_n \le b_n < M + \varepsilon,$$

da cui

$$L < M + 2\varepsilon.$$

Ne segue $L \le M$, perché se fosse $L > M$, scelto $\varepsilon = \frac{L-M}{2}$, avremmo

$$L < M + 2\varepsilon = M + L - M = L, \text{ assurdo.}$$

Teorema dei carabinieri Se $a_n \to L$, $b_n \to L$, e se $a_n \le c_n \le b_n$ definitivamente, allora $c_n \to L$ ($L \in [-\infty, +\infty]$).

Oss. Se $L = +\infty$, b_n non serve; se $L = -\infty$, a_n non serve.

dim. Sia $L \in \mathbb{R}$. Dato $\varepsilon > 0$, esistono $\nu_1, \nu_2 \in \mathbb{N}$ tali che

$$|a_n - L| < \varepsilon, \ \forall n \geq \nu_1; \ |b_n - L| < \varepsilon, \ \forall n \geq \nu_2.$$

Se $n \geq \max\{\nu_1, \nu_2\}$, si ricava

$$L - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq d_n \leq L + \varepsilon,$$

da cui $|c_n - L| < \varepsilon \ \forall n \geq \max\{\nu_1, \nu_2\}$. Se $L = \pm\infty$ è ancora più semplice. □

- Permanenza del segno Se $a_n \to L$ per $n \to \infty$, allora:

(i) $L \neq 0 \Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{N}: |a_n| \neq 0 \ \forall n \geq \nu$,

(ii) $L > 0 \Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{N}: a_n > 0 \ \forall n \geq \nu$,

(iii) $L < 0 \Rightarrow \exists \nu \in \mathbb{N}: a_n < 0 \ \forall n \geq \nu$.

dim. Sia $L \neq 0$. Scelto $\varepsilon \in \left]0, \frac{|L|}{2}\right]$, esiste $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \ \forall n \geq \nu,$$

quindi, $\forall n \geq \nu$,

$$|a_n| = |L - (L - a_n)| \geq |L| - |L - a_n| \geq |L| - \varepsilon \geq \frac{|L|}{2}.$$

Dunque $a_n \neq 0$.

Se $L > 0$, similmente si ha

$$a_n > L - \varepsilon \geq L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} > 0,$$

e se $L < 0$

$$a_n < L + \varepsilon \leq L + \frac{|L|}{2} = -|L| + \frac{|L|}{2} = -\frac{|L|}{2} < 0.$$

Oss. Il viceversa è falso: se $a_n > 0$, e se $a_n \to L$, non è detto che $L > 0$:

ad esempio, $\frac{1}{n} > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e $\frac{1}{n} \to 0$.

<u>Esempio</u>: una sfilza di successioni divergenti a $+\infty$, sempre più rapidamente:

$$\log_b n \ (b>1),\ n^\alpha \ (\alpha>0),\ a^n \ (a>1),\ n!,\ n^n,\ a^{n^2} \ (a>1).$$

Proviamo che

$$0 \underset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} \underset{(2)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} \underset{(3)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} \underset{(4)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} \underset{(5)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}.$$

<u>dim</u>. (2). Sia $\alpha=1$, e sia $\varepsilon>0$. Si ha

$$\frac{n}{a^n} < \varepsilon \iff a > \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}},$$

e quest'ultima relazione è vera definitivamente dato che

$$a > 1 = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Sia $\alpha>0$: allora, dato $\varepsilon>0$,

$$\frac{n^\alpha}{a^n} = \left[\frac{n}{(a^{\frac{1}{\alpha}})^n}\right]^\alpha < \varepsilon \iff \frac{n}{(a^{\frac{1}{\alpha}})^n} < \varepsilon^{\frac{1}{\alpha}},$$

e quest'ultima relazione è vera definitivamente per il caso già visto.

<u>dim</u> (1) Se $\alpha=1$, ed $\varepsilon>0$,

$$\frac{\log_b n}{n} < \varepsilon \iff n < b^{\varepsilon n} \iff \frac{n}{(b^\varepsilon)^n} < 1,$$

e quest'ultima relazione è vera definitivamente grazie a (2).

Se $\alpha>0$, scriviamo

$$\frac{\log_b n}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha} \frac{\log_b n^\alpha}{n^\alpha},$$

ma adesso non possiamo applicare il caso precedente, perché n^α non è in generale un intero. Però

$$[n^\alpha] \le n^\alpha < [n^\alpha]+1,$$

e quindi

$$\frac{\log_b n}{n^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\log_b n^\alpha}{n^\alpha} \le \frac{1}{\alpha}\frac{\log_b([n^\alpha]+1)}{[n^\alpha]} = \frac{1}{\alpha}\frac{\log_b([n^\alpha]+1)}{[n^\alpha]+1}\cdot\frac{[n^\alpha]+1}{[n^\alpha]}$$

e per il caso già visto, osservando che $\frac{[n^\alpha]+1}{[n^\alpha]} \to 1$, si ha

$$\frac{\log_b n}{n^\alpha} < \frac{1}{\alpha}\varepsilon(1+\varepsilon) \quad \text{definitivamente.}$$

Se si sceglie $\varepsilon<1$, otteniamo perciò

$$\frac{\log_b n}{n^\alpha} < \frac{2}{\alpha}\varepsilon \quad \text{definitivamente.}$$

<u>dim</u> (3) Sia $n_0=[\alpha]+1$. Allora

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^{n-n_0}}{n(n-1)\cdots(n_0+1)}\frac{a^{n_0}}{n_0!} < \frac{n_0^{\,n-n_0}}{n(n-1)\cdots(n_0+1)}\frac{a^{n_0}}{n_0!} < \frac{n_0}{n}\frac{a^{n_0}}{n_0!} < \varepsilon$$

definitivamente, dato che $\frac{a^{n_0}}{n_0!}$ è una costante e $\frac{n_0}{n}\to 0$.

<u>dim</u> (4) Si ha per confronto

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{n(n-1)\cdots 2\cdot 1}{n\cdot n\cdot \cdots n\cdot n} < \frac{1}{n} \to 0.$$

<u>dim</u> (5) Ricordando (2), si ha per confronto

$$\frac{n^n}{a^{n^2}} = \left(\frac{n}{a^n}\right)^n \le \frac{n}{a^n} \to 0.$$

<u>Forme indeterminate</u>: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $+\infty-\infty$, 0^0, 1^∞.

Ci siamo già occupati di far vedere nei primi 4 casi che il limite di tali forme indeterminate può essere qualsiasi cosa o non esistere.

Nel caso 0^0:

(i) $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ $\Longrightarrow$ $a_n^{b_n} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \to 1$.

(ii) $a_n = \frac{1}{n^n}$, $b_n = \pm\frac{1}{n}$ $\Longrightarrow$ $a_n^{b_n} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\pm 1} \longrightarrow \begin{cases} 0 & (+) \\ +\infty & (-) \end{cases}$.

(iii) $a_n = \frac{1}{p^n}$ $(p>1)$, $b_n = \pm\frac{1}{n}$ $\Longrightarrow$ $a_n^{b_n} = \left(\frac{1}{p}\right)^{\pm 1} \longrightarrow \begin{cases} \frac{1}{p} & (+) \\ p & (-) \end{cases}$

(iv) $a_n = \frac{1}{p^n}$ $(p>1)$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $\Longrightarrow$ $a_n^{b_n} = \left(\frac{1}{p}\right)^{(-1)^n}$ non ha limite.

Il caso della forma indeterminata 1^∞ è il più delicato.

Vediamo un esempio fondamentale, che ci permetterà di definire (finalmente!) il numero e.

La successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \geq 1$,

- è positiva, anzi $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$ (evidente).
- è strettamente crescente: gli ~~n+1~~ numeri $1, 1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \dots, 1+\frac{1}{n}$ sono distinti: quindi

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1}{n+1}\left[1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] = \frac{1}{n+1}\left[1+n+1\right] = 1+\frac{1}{n+1},$$

da cui

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

- è limitata superiormente: infatti, ricordando che $n! \geq 2^{n-1}$ (induzione facile) si ha per ogni $n \in \mathbb{N}^+$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\,\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{n^k} =$$

$$= 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\,1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k+1}{n}\right) <$$

$$< 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} \leq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}} = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 1+2 = 3.$$

Dunque

$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{R}.$$

<u>Definizione</u> $e := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

<u>Osservazione</u> Si ha $2 < \frac{9}{4} = \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 < e < 3$.

Osservazione: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}=+\infty$, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n=1$ (esercizio!)

La successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, come sappiamo, è strettamente crescente e limitata superiormente; il suo limite è, per definizione, e, con $2<e<3$

Prop. $\exists \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=e^{-1}$.

dim.
$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=$$
$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}\longrightarrow\frac{1}{e\cdot 1}=e^{-1}.\ \square$$

Ora, due lemmi:

Lemma 1 Se $\{a_n\}\to+\infty$ oppure $\{a_n\}\to-\infty$, allora
$$\exists \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

dim. Sia $k_n=[|a_n|]$. Se $a_n\to+\infty$, allora $k_n\le a_n<k_n+1$, da cui

$$\frac{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n+1}}{\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)}=\left(1+\frac{1}{k_n+1}\right)^{k_n}<\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}<\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n+1}=\left(1+\frac{1}{k_n}\right)^{k_n}\left(1+\frac{1}{k_n}\right)$$

$$\longrightarrow \frac{e}{1}=e \qquad\qquad e=e\cdot 1$$

e pertanto, in virtù del teorema dei carabinieri, la tesi.

Se $a_n\to-\infty$, allora $\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=\left(1-\frac{1}{|a_n|}\right)^{-|a_n|}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{|a_n|}\right)^{|a_n|}}\to\frac{1}{1/e}=e.\ \square$

Lemma 2 Se $x \in \mathbb{R}$ e se $a_n > 0$, $a_n \to L > 0$, allora $a_n^x \to L^x$.

dim. Supponiamo $0 < L < \infty$. Se $x = 0$ la tesi è banale. Se $x > 0$, fissato $\varepsilon \in]0, L^x[$, la relazione

$$|a_n^x - L^x| < \varepsilon$$

equivale a

$$\left|\frac{a_n^x}{L^x} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{L^x},$$

cioè

$$1 - \frac{\varepsilon}{L^x} < \frac{a_n^x}{L^x} < 1 + \frac{\varepsilon}{L^x}$$

vale a dire

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{L^x}\right)^{\frac{1}{x}} < \frac{a_n}{L} < \left(1 + \frac{\varepsilon}{L^x}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Quest'ultima relazione vale definitivamente, visto che $\frac{a_n}{L} \to 1$.

Se $x < 0$, basta osservare che $a_n > \frac{L}{2}$ definitivamente, e scrivere

$$|a_n^x - L^x| = |a_n^{-|x|} - L^{-|x|}| = \frac{|L^{|x|} - a_n^{|x|}|}{a_n^{|x|} L^{|x|}} \le 2\,\frac{|a_n^{|x|} - L^{|x|}|}{L^{2|x|}};$$

l'ultimo membro è $< \varepsilon$ definitivamente, per il caso già visto.

Se $L = +\infty$, allora $L^x = +\infty$, e se $M > 0$

$$a_n^x > M \iff a_n > M^{\frac{1}{x}} \quad \text{definitivamente vera.} \ \square$$

Conclusione: proviamo la seguente

Proposizione Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora la successione $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ è definitivamente strettamente crescente, con

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

<u>dim</u> Non appena $1+\frac{x}{n}\geq 0$, cioè

$$\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}^+ \text{ se } x\geq -1 \\ \forall n\geq |x| \text{ se } x<-1, \end{cases}$$

si ha, per la disug. fra le medie (con $x\neq 0$):

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\cdot 1} < \frac{1}{n+1}\left[n\left(1+\frac{x}{n}\right)+1\right] = \frac{1}{n+1}\left[n+x+1\right] = 1+\frac{x}{n+1},$$

da cui

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n < \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Poi, posto $a_n = \frac{n}{x}$ $(x\neq 0)$ si ha $a_n \to \begin{cases} +\infty \text{ se } x>0 \\ -\infty \text{ se } x<0, \end{cases}$

quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Dal lemma 2,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x = e^x.$$

Infine, se $x=0$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 = e^0. \quad \square$$

<u>Esercizi</u>

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n(n^2+1)}\right)^{1/\sqrt{n}} = 1.$$

- Provare che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \searrow e$.
- Provare che $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, $\quad -\frac{1}{n-1} < \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) < -\frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$,

ove $\ln \equiv \log_e$ (logaritmo naturale).

Dedurre che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

- Provare più in generale che se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}{\frac{1}{a_n}} = 1 .$$

Dedurre che se $b_n \to 0$ allora

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{b_n}-1}{b_n} = 1,$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{b_n}-1}{b_n} = \ln a \quad \forall a>0.$$

- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}$, $\quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+3}{n+1}\right)^{n}$, $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)^n}{n^{2n}}$, $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{\log_b(n+}{\log_b n}$

$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{3}-1\right)^n$, $\quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n\log n}$, $\quad \lim_{n\to\infty} n^2 2^{-\sqrt{n}}$,

$\lim \left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right)$, $\quad \lim \left(n^{n^\alpha} - e^n\right)$ $\quad (\alpha \in \mathbb{R})$.