<u>Proposizione</u> Se $x \in [0,1[$ è un numero decimale periodico, allora $x$ è una frazione $\frac{m}{q}$, ove:

(i) $m = c - b$, essendo $c$ il numero naturale formato dalle cifre dell'antiperiodo seguite da quelle del periodo, mentre $b$ è il numero naturale formato dalle cifre del periodo;

ii) $q$ è il numero naturale formato da tante cifre 9 quante sono le cifre del periodo, seguite da tante cifre 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

<u>dim</u>. Sia $x = 0.a_1 \cdots a_h \overline{b_1 \cdots b_p}$, ossia $x = \sup_{n \in \mathbb{N}} x_n$ ove per $n = h + mp$ si ha

$$x_{h+mp} = \sum_{k=1}^{h} \frac{a_k}{10^k} + \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{s=1}^{p} \frac{b_s}{10^{h+jp+s}},$$

e naturalmente $a_1, \dots, a_h, b_1, \dots, b_p \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Detti $a$ il numero naturale con cifre $a_1, \dots, a_h$ e $b$ il numero naturale con cifre $b_1, \dots, b_p$, cioè

$$a = \sum_{k=1}^{h} 10^{h-k} a_k, \quad b = \sum_{s=1}^{p} 10^{p-s} b_s,$$

si ha

$$x_{h+mp} = \frac{a}{10^h} + \sum_{j=0}^{m-1} \frac{b}{10^{h+jp+p}} = \frac{1}{10^h}\left[a + b \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{10^{p(j+1)}}\right]$$

$$= \frac{1}{10^h}\left[a + \frac{b}{10^p} \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{10^{pj}}\right] = \frac{1}{10^h}\left[a + \frac{b}{10^p} \, \frac{1 - \frac{1}{10^{mp}}}{1 - \frac{1}{10^p}}\right].$$

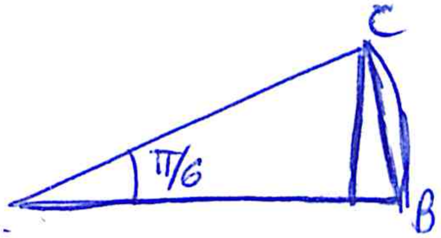
La successione $\{x_{n+mp}\}$ è crescente rispetto a $m$ e quindi converge al suo estremo superiore, che è $x$. Perciò

$$x = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{10^n}\left[a + \frac{b}{10^p}\,\frac{1-\frac{1}{10^{mp}}}{1-\frac{1}{10^p}}\right] = \frac{1}{10^n}\left[a+\frac{b}{10^p-1}\right] =$$

$$= \frac{a(10^p-1)+b}{10^n[10^p-1]} = \frac{a\cdot 10^p + b - a}{10^n(10^p-1)} = \frac{c-b}{9} = \frac{m}{9},$$

come volevasi dimostrare. □

• Perchè $\pi > 3$? Perchè l'area del dodecagono regolare inscritto nel cerchio di raggio 1 è uguale a 3. Infatti essa è $12\cdot \text{area } ABC = 12\cdot \frac{1}{2}\left(1\cdot\frac{1}{2}\right) = 3$.




$|AB| = |AC| = 1$.

Inoltre $\pi < 4$ perchè 4 è l'area del quadrato circoscritto al cerchio di raggio 1.