<u>Successioni reali</u> Una successione reale è una funzione $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ovvero una sequenza infinita di numeri reali $a_0, a_1, a_2, \dots$, indicata con $\{a_n\}$. Gli a_n possono essere tutti distinti oppure no. Ci sono anche le successioni complesse $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, e le successioni di insiemi o di funzioni (le incontreremo più in là).

<u>Esempi</u> $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ (definita su $\mathbb{N}^+$), $\{n!\}$, $\{q^n\}$ con $q \in \mathbb{R}$ o $q \in \mathbb{C}$, $\left\{\sum_{k=0}^{n} q^k\right\}$ (definita su $\mathbb{N}$), $\{\sqrt[n]{n}\}$ (definita su $\mathbb{N}^+$), $\{\ln(n-5)\}$ (definita per $n \geq 6$).

Cosa ci interessa sapere? Il comportamento delle successioni al crescere di n.

<u>Definizione</u> Diciamo che una successione $\{a_n\}$ <u>converge al limite $L \in \mathbb{R}$</u> per $n \to \infty$, ovvero <u>ha limite L</u> per $n \to \infty$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che si abbia

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \forall n \geq \nu.$$

In tal caso si scrive "$a_n \to L$ per $n \to \infty$", oppure

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

<u>Osservazione</u> Se $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$, e $L \in \mathbb{C}$, si ha

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{se e solo se} \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} a_n = \operatorname{Re} L, \ \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} a_n = \operatorname{Im} L.$$

Infatti
$$\left.\begin{array}{l} |\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} L| \\ |\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} L| \end{array}\right\} \leq |a_n - L| \leq |\operatorname{Re} a_n - \operatorname{Re} L| + |\operatorname{Im} a_n - \operatorname{Im} L|.$$

<u>Definizione</u> Diciamo che una successione reale $\{a_n\}$ <u>diverge a $+\infty$</u> (oppure <u>a $-\infty$</u>) ~~per~~ $n\to\infty$, ovvero ha limite $+\infty$ (oppure $-\infty$) per $n\to\infty$, se per ogni $M>0$ esiste un indice $\nu\in\mathbb{N}$ tale che si abbia

$$a_n \geq M \quad \forall n\geq \nu \quad (\text{oppure } \; a_n\leq -M \quad \forall n\geq\nu).$$

In tal caso si scrive "$a_n\to+\infty$ per $n\to\infty$" (oppure "$a_n\to-\infty$ per $n\to\infty$"), od anche

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad (\text{oppure } \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty).$$

<u>Esempi</u>

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$,
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n! = +\infty$,
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$
- se $q\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ 0 & \text{se } |q|<1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q\leq -1 \end{cases}$
- se $q\in\mathbb{C}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } |q|<1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ \text{non esiste} & \text{se } |q|\geq 1, q\neq 1. \end{cases}$
- se $q\in\mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 \\ +\infty & \text{se } q\geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q\leq -1, \end{cases}$
- se $q\in\mathbb{C}$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 \\ +\infty & \text{se } q=1 \\ \text{non esiste} & \text{se } |q|\geq 1, q\neq 1. \end{cases}$

Successioni limitate

<u>Definizione</u> La successione $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ è <u>limitata superiormente</u> se esiste $M' \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \leq M'$ $\forall n \in \mathbb{N}$; è <u>limitata inferiormente</u> se esiste $M'' \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \geq M''$ $\forall n \in \mathbb{N}$; è <u>limitata</u> se esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (e dunque $-M \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in \mathbb{N}$). La nozione di <u>limitatezza</u> si applica anche alle successioni complesse: $\{a_n\} \subset \mathbb{C}$ è <u>limitata</u> se esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \leq M$ (e dunque $|\mathrm{Re}\, a_n| \leq M$, $|\mathrm{Im}\, a_n| \leq M$).

<u>Proposizione</u> Ogni successione convergente è limitata. Il viceversa è falso.

<u>dim</u>. Sia $\{a_n\}$ convergente e sia $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Scelto $\varepsilon = 1$, esiste un indice $\nu \in \mathbb{N}$ tale che

$$|a_n - L| < 1 \quad \forall n \geq \nu.$$

Dunque

$$|a_n| \leq |a_n - L| + |L| \leq 1 + |L| \quad \text{se } n \geq \nu$$

$$|a_n| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\nu-1}|\} \quad \text{se } n < \nu.$$

Quindi il numero $M = \max\{1+|L|, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_{\nu-1}|\}$ è tale che

$$|a_n| \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Viceversa, $\{(-1)^n\}$ è limitata, perché $|(-1)^n| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ma non ha limite per $n \to \infty$. $\square$

<u>Esercizio.</u> Proviamo che
$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \forall a>0.$$

Sappiamo che

(*) $$\inf_{n\in\mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \forall a>1,$$

(**) $$\sup_{n\in\mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \forall a\in]0,1].$$

Sia allora $a>1$. Sia $\varepsilon>0$. Per (*) si ha $a^{\frac{1}{n}} \geq 1$ per ogni $n\in\mathbb{N}^+$, ed esiste $\nu\in\mathbb{N}^+$ tale che $1+\varepsilon > a^{\frac{1}{\nu}} \geq 1$.
Ne segue, per ogni $n\geq\nu$, essendo $a^{\frac{1}{n}} \leq a^{\frac{1}{\nu}}$,
$$1+\varepsilon > a^{\frac{1}{\nu}} \geq a^{\frac{1}{n}} \geq 1.$$
Dunque
$$0 \leq a^{\frac{1}{n}}-1 = |a^{\frac{1}{n}}-1| < \varepsilon \qquad \forall n\geq\nu,$$
che è la tesi.
Se $0<a<1$, e se $\varepsilon>0$, per (**) si ha $a^{\frac{1}{n}} \leq 1$ per ogni $n\in\mathbb{N}^+$, ed esiste $\nu\in\mathbb{N}^+$ tale che $1-\varepsilon < a^{\frac{1}{\nu}} \leq 1$.
Dunque, essendo $a^{\frac{1}{n}} \geq a^{\frac{1}{\nu}}$ per $n\geq\nu$, si ottiene
$$1-\varepsilon < a^{\frac{1}{\nu}} \leq a^{\frac{1}{n}} \leq 1 \qquad \forall n\geq\nu,$$
da cui
$$0 \leq 1-a^{\frac{1}{n}} = |a^{\frac{1}{n}}-1| < \varepsilon \qquad \forall n\geq\nu,$$
che è la tesi.

<u>Esercizio</u> Proviamo che
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q|<1 \\ +\infty & \text{se } q\geq 1 \\ \text{non esiste} & \text{se } q\leq -1. \end{cases}$$

Sia $|q|<1$. Si sa che $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$; dunque

$$\left| \sum_{k=0}^{n} q^k - \frac{1}{1-q} \right| = \frac{|q|^{n+1}}{1-q} .$$

Sia $\varepsilon>0$. La relazione da provare è

$$|q|^{n+1} < \varepsilon\,(1-q) \quad \text{per ogni } n \geq \nu ,$$

ove $\nu \in \mathbb{N}$ è da scegliere. Tale relazione equivale a

$$|q| < (\varepsilon(1-q))^{\frac{1}{n+1}} \quad \text{per ogni } n \geq \nu .$$

Poichè $\lim_{n\to\infty} (\varepsilon(1-q))^{\frac{1}{n+1}} = 1$, scelto $\eta = 1-|q|$ esisterà $\nu_0 \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$|q| = 1-\eta < (\varepsilon(1-q))^{\frac{1}{n+1}} < 1+\eta = 2-|q| \quad \forall n \geq \nu_0 ,$$

e quindi scelto $\nu = \nu_0$ si ha, come si voleva

$$|q|^{n+1} < \varepsilon\,(1-q) \quad \forall n \geq \nu .$$

Sia $q=1$. Allora $\sum_{k=0}^{n} q^k = n+1$; ovviamente, scelto $M>0$, si avrà $n+1 > M$ per ogni $n > M-1$, cioè per ogni $n \geq \nu = [M-1]+1$, ove $[k]$ è la parte intera di k.
Ciò prova (se ce ne fosse bisogno) che $\lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty$.
Se $q>1$, allora $\sum_{k=0}^{n} q^k > \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1 > M$ per ogni $n \geq \nu$.
Dunque anche in questo caso il limite è $+\infty$.

Infine sia $q<-1$ e proviamo che $\left\{\sum_{k=0}^{n} q^k\right\}$ non ha limite. Sia $L\in\mathbb{R}$: supponiamo per assurdo che

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} q^k = \lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = L.$$

Allora, scelto $\varepsilon=1$, esisterebbe $\nu\in\mathbb{N}$ tale che

$$\left|\sum_{k=0}^{n} q^k - L\right| < 1 \quad \forall n\geq \nu.$$

Sia $\nu_1\in\mathbb{N}$ tale che $|q|^{n+1}>2$; notiamo che tale ν_1 esiste perché $\lim_{n\to\infty}|q|^{n+1}=+\infty$. Allora per $n\geq\max\{\nu_0,\nu_1\}$

$$\left|\sum_{k=0}^{n+1} q^k - L\right| = \left|q^{n+1}+\sum_{k=0}^{n} q^k - L\right| \geq$$

$$\geq |q|^{n+1} - \left|\sum_{k=0}^{n} q^k - L\right| \geq |q|^{n+1}-1 >$$

$$> 2-1 = 1.$$

Ciò è assurdo, poiché, essendo $n+1\geq\nu$, deve essere

$$\left|\sum_{k=0}^{n+1} q^k - L\right| < 1.$$

Dunque L non è il limite di $\left\{\sum_{k=0}^{n} q^k\right\}$. Ma $L\in\mathbb{R}$ era arbitrario: perciò tale successione non ha limite.

<u>Esercizio</u> (non svolto): provare che $\left\{\sum_{k=0}^{n} q^k\right\}$, per $q\leq -1$, non diverge a $+\infty$ né a $-\infty$.