ANA 1 | gi 25/10/18



Esercizi

0. modulo e argomento di $z = \dfrac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5}{(1-i)^7}$

1. risolvere $z^2+|\bar{z}-2|-3=0$

2. risolvere $\bar{z}^3 z^4 = -2z^2$.

3. risolvere $\begin{cases} \bar{z}^2-w^2=-1 \\ \bar{w}^2-z=0 \end{cases}$

4. risolvere $(iz)^5 + i|z|\bar{z}(1+i)^2=0$.

Risoluzione 1. scrivo $z=a+ib$, sostituisco e trovo

$$a^2-b^2+2abi+\sqrt{(a-2)^2+b^2}-3=0$$

cioè

$$\begin{cases} ab=0 \\ a^2-b^2+\sqrt{(a-2)^2+b^2}-3=0 \end{cases}$$

se $a=0$, $\longrightarrow b^2+3=\sqrt{4+b^2}$, $b^4+5b^2+5=0$ (impossibile perché $b^2\geq 0$).

nessuna soluzione.

se $b=0 \longrightarrow a^2+|a-2|-3=0$

$a\geq 2 \longrightarrow a^2+a-5=0$ impossibile se $a\geq 2$ $(4+2=6>5)$.

nessuna soluzione

$a<2 \longrightarrow a^2-a-1=0 \longrightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}<2$, ok.

Soluzioni: $z=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

2. Anzitutto, è facile constatare che $z=0$ è soluzione.
Per trovare le soluzioni $z \neq 0$, passiamo ai moduli nell'equazione: si trova $|z|^7 = 2|z|^2$, ossia $|z|^5 = 2$, ossia $|z| = 2^{1/5}$.
Notando poi che $z\bar{z} = |z|^2$, l'equazione si riscrive come

$$\left(2^{1/5}\right)^6 z = -2z^2,$$

ossia, dopo aver semplificato, $\quad z = -2^{\frac{6}{5}-1} = -2^{1/5}$.

3. La seconda equazione dice che $z = \overline{w}^2$, da cui $\bar{z} = w^2$.
Dalla prima equazione,

$$-1 = \bar{z}^2 - w^2 = w^4 - w^2;$$

perciò

$$w^2 = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

In particolare, $|w| = 1$. Se $w^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, cioè $\arg(w^2) = \frac{\pi}{3}$, si ricava

$$\arg w = \frac{\pi}{6} \text{ oppure } \frac{7}{6}\pi,$$

dunque

$$w = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right), \quad z = \overline{w}^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Se $w^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, cioè $\arg(w^2) = -\frac{\pi}{3}$, allora

$$\arg w = -\frac{\pi}{6} \text{ oppure } \frac{5}{6}\pi,$$

e dunque

$$w = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right), \quad z = \overline{w}^2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Semplifichiamo: $i^5 = i$, $(1+i)^2 = 2i$, e dunque

$$i z^5 - 2|z|\bar{z} = 0.$$

Passando ai moduli

$$|z|^5 = 2|z|^2,$$

cioè $z=0$ oppure $|z| = 2^{1/3}$. Per $z \neq 0$ si ha allora

$$i z^5 - 2^{4/3}\bar{z} = 0$$

e moltiplicando per $z$

$$i z^6 = 2^{4/3} z\bar{z} = 2^2 = 4.$$

Perciò

$$z^6 = \frac{4}{i} = -4i$$

e dunque $z$ è una delle radici seste di $-4i$.

Si ha perciò, essendo $\arg(-4i) = -\frac{\pi}{2}$ ovvero $\frac{3}{2}\pi$,

$$z = 2^{1/3}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{6}\right),$$

cioè

$$z_0 = 2^{1/3}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z_1 = 2^{1/3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$z_2 = 2^{1/3}\left(\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$$

$$z_3 = 2^{1/3}\left(\cos\frac{11}{12}\pi + i\sin\frac{11}{12}\pi\right) = -z_0$$

$$z_4 = -z_1$$

$$z_5 = -z_2,$$

oltre a $z=0$.

Altri esercizi:

5. $z^2 - \bar{z}^2 + |z|^2 = i + 1$

6. $\dfrac{z}{\bar{z}^2} |z|^2 = -1$

7. $\begin{cases} z + iw = 1 \\ z\bar{w} = -i \end{cases}$

Risoluzione: 5. Scrivendo $z = a+ib$, si ha l'equazione

$$\cancel{a^2} - \cancel{b^2} + 2iab - \cancel{a^2} + \cancel{b^2} + 2iab + a^2 + b^2 = i + 1$$

che si scinde, separando parte reale e parte immaginaria, in

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 4ab = 1 . \end{cases}$$

Allora $b = \dfrac{1}{4a}$, e sostituendo: $a^2 + \dfrac{1}{16a^2} = 1$,

cioè $16a^4 - 16a^2 + 1 = 0$. Le soluzioni sono

$$a^2 = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 16}}{16} = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{4} .$$

Entrambe le soluzioni sono positive. Dunque abbiamo 2 soluzioni dell'equazione:

$z_1 = a + ib$, con $a = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}}$ e $b = \dfrac{1}{4a}$,

$z_2 = a + ib$, con $a = \sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}}$ e $b = \dfrac{1}{4a}$.

6. Poichè $z\bar{z} = |z|^2$, è $\bar{z} = \dfrac{|z|^2}{z}$, e sostituendo nella equazione si ha (65)

$$\frac{z^3}{|z|^4}|z|^2 = -1,$$

cioè

$$\frac{z^3}{|z|^2} = -1.$$

Passando ai moduli segue che $|z|=1$, da cui

$$z^3 = -1,$$

e infine, essendo $\arg(-1) = \pi$,

$$z = \sqrt[3]{-1} = \begin{cases} \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

7. La prima equazione dà $z = 1 - iw$, e dalla seconda

$$(1-iw)\bar{w} = -i,$$

cioè

$$\bar{w} - i|w|^2 = -i.$$

Scrivendo $w = a+ib$, si ottiene

$$a - ib - i(a^2+b^2) = -i.$$

Separando parte reale e parte immaginaria,

$$\begin{cases} a = 0, \\ -b - \cancel{a^2} - b^2 = -1 \end{cases}$$

e l'equazione $b^2+b-1=0$ fornisce $b = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Perciò le soluzioni sono $\begin{cases} w = i\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \\ z = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} w = -i\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right) \\ z = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ (ricordando che $z = 1 - iw$).