Funzioni reali di variabile reale

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo (aperto o chiuso, limitato o illimitato). Una funzione $f: I \to \mathbb{R}$ è una regola prestabilita che ad ogni $x \in I$ associa un unico numero $f(x) \in \mathbb{R}$; l'intervallo I è il dominio di f.

Il grafico di f è il sottoinsieme $G_f \subseteq \mathbb{R}^2$ definito da

$$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in I,\ y = f(x)\}.$$

Dunque un sottoinsieme $G \subseteq \mathbb{R}^2$ è grafico di una funzione se e solo se ogni retta verticale interseca G in al più un punto. La funzione (chiamiamola f) sarà definita su $E = \{x \in \mathbb{R} : G \cap [\{x\} \times \mathbb{R}] \neq \emptyset\}$ e si avrà $f(x) = y$, ove y è l'unico elemento di $G \cap [\{x\} \times \mathbb{R}]$.

Noi ci limiteremo a funzioni f definite su intervalli.

Definizione Diciamo che $f: I \to \mathbb{R}$ è iniettiva se per ogni $x, x' \in I$ con $x \neq x'$ si ha $f(x) \neq f(x')$.

Definizione Diciamo che $f: I \to \mathbb{R}$ è surgettiva se per ogni $y \in \mathbb{R}$ esiste $x \in I$ tale che $f(x) = y$.

Osservazione Detta $f(I)$ l'immagine di f, cioè l'insieme

$$f(I) = \{y \in \mathbb{R} : \exists\, x \in I \text{ tale che } f(x) = y\},$$

ogni funzione, scritta come $f: I \to f(I)$, è surgettiva. Invece, talvolta, l'iniettività di f si può ottenere restringendone il dominio ad un opportuno sottointervallo.

Definizione Diciamo che $f: I \to \mathbb{R}$ è biunivoca o bigettiva se è sia iniettiva che surgettiva. In tal caso, esiste l'inversa, che è la funzione $f^{-1}: \mathbb{R} \to I$, definita da

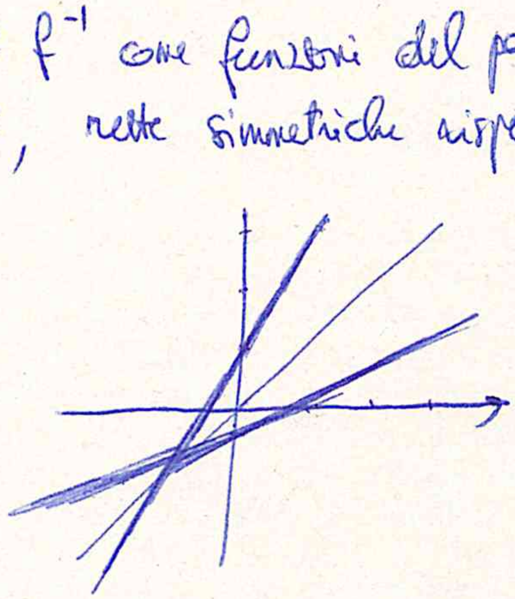
$$f^{-1}(y) = \text{l'unico } x \text{ tale che } f(x) = y.$$

Perciò $f(f^{-1}(y)) = y \ \forall y \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(f(x)) = x \ \forall x \in I$ per ogni $f: I \to \mathbb{R}$ bigettiva.

Esempi (1) $f(x) = ax+b$, $x \in \mathbb{R}$. Se $a=0$, la funzione f è costante ($f(x)=b \ \forall x \in \mathbb{R}$) e il grafico è una retta orizzontale. Se $a \neq 0$, f è bigettiva, il suo grafico è la retta di equazione $y = ax+b$ e risulta

$$f^{-1}(y) = \frac{y-b}{a} \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Il grafico di $f^{-1}(y)$ è la retta $x = \frac{y-b}{a}$ (la stessa di prima). Se però disegnamo i grafici di f e f^{-1} come funzioni del parametro x, avremo $y = ax+b$ e $y = \frac{x-b}{a}$, rette simmetriche rispetto alla bisettrice $y=x$. Nel disegno, si sono presi $a=2$, $b=1$.



Questo è un fatto generale: le curve di equazioni $y=f(x)$ e $y = f^{-1}(x)$, per f bigettiva, sono simmetriche rispetto alla bisettrice $y=x$.

(2) $f(x) = ax^2+bx+c$, $x \in \mathbb{R}$.

Se $a \neq 0$, f non è né iniettiva né surgettiva. Però, se $a>0$ la funzione

$$f: \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[\to \left[c - \frac{b^2}{4a}, \infty\right[$$ è bigettiva, con inversa

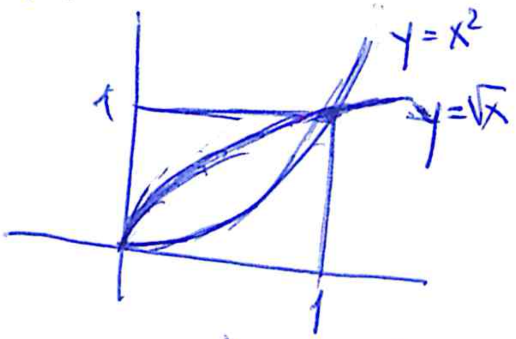
$$f^{-1}(y) = \frac{-b+\sqrt{b^2-4a(c-y)}}{2a}, \quad y \geq c - \frac{b^2}{4a},$$

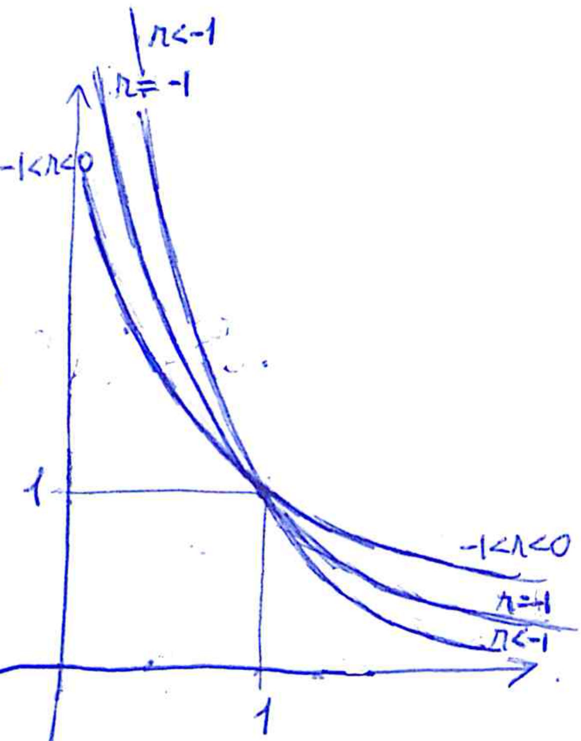
mentre la funzione $f: \left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right] \to \left[c-\frac{b^2}{4a}, +\infty\right[$ è bigettiva, con inversa

$$f^{-1}(y) = \frac{-b-\sqrt{b^2-4a(c-y)}}{2a}, \quad y \geq c - \frac{b^2}{4a}.$$

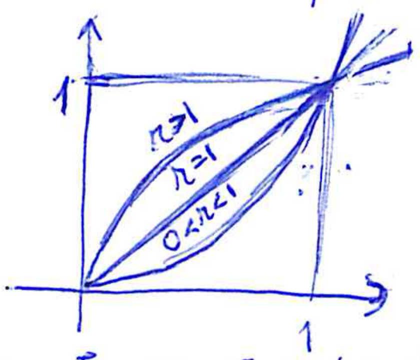
Se $a<0$, è tutto uguale ma l'immagine di f è $\left]-\infty, c-\frac{b^2}{4a}\right]$

Nel caso $a=1$, $b=c=0$, $f(x)=x^2$, i grafici di $f:[0,\infty[\to [0,\infty[$ e di f^{-1} sono:





• (Potenze razionali) $f(x)=x^r$, $x>0$ $(r \in \mathbb{Q})$.



$f:]0,\infty[\to]0,\infty[$ è bigettiva, con inversa (se $r \neq 0$)

$$f^{-1}(y) = y^{\frac{1}{r}}.$$

Si ha:

$$\text{se } r>0, \quad \begin{cases} x^r < 1 < x^{-r} & \forall x \in]0,1[\\ x^r > 1 > x^{-r} & \forall x > 1. \end{cases}$$

$$\text{se } r<0, \quad \begin{cases} x^r > 1 > x^{-r} & \forall x \in]0,1[\\ x^r < 1 < x^{-r} & \forall x > 1. \end{cases}$$

Inoltre se $r,s\in\mathbb{Q}$ con $r<s$, si ha

$$\begin{cases} x^s < x^r & \forall x\in]0,1[, \\ x^s > x^r & \forall x>1. \end{cases}$$

Potenze ad esponente reale

Proposizione Siano $a>0$, $x\in\mathbb{R}$. Poniamo

$$A=\{a^r : r\in\mathbb{Q},\ r\le x\},$$
$$B=\{a^s : s\in\mathbb{Q},\ s\ge x\}.$$

Allora:

- se $a\ge 1$, A e B sono insiemi separati, con
$$\sup A = \inf B;$$
- se $0<a\le 1$, B ed A sono insiemi separati, con
$$\sup B = \inf A.$$

In entrambi i casi *definiremo* tale valore comune come a^x.

Osservazione Una conseguenza di questa proposizione (che fra poco verrà dimostrata) è che quando $x\in\mathbb{Q}$, si ha in particolare:

- se $a\ge 1$, $\max A = a^x = \min B$;
- se $0<a\le 1$, $\max B = a^x = \min A$,

cosicché nella definizione di potenza reale che daremo sarà compreso il vecchio caso delle potenze razionali.

46

<u>dim</u>. Supponiamo $a \geq 1$ (il caso $a \in]0,1]$ si fa analogamente). Allora, per (vii), $a^r < a^s$ $\forall r,s \in \mathbb{Q}$ con $r \leq x \leq s$. Quindi A e B sono separati. Poniamo $\lambda = \sup A$, $\mu = \inf B$; si ha $0<\lambda \leq \mu$.

Supponiamo per assurdo $\lambda < \mu$.

Poichè

$$\inf_{n \in \mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} = 1,$$

scelto $\varepsilon = \frac{\mu}{\lambda} - 1 > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che

$$1 \leq a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon = \frac{\mu}{\lambda}.$$

Per la densità dei razionali in $\mathbb{R}$, esiste $r \in \mathbb{Q}$, tale che

$$x - \frac{1}{n} < r < x.$$

Dunque

$$x < r + \frac{1}{n},$$

da cui

$$\mu \leq a^{r+\frac{1}{n}} = a^r a^{\frac{1}{n}} \leq \lambda a^{\frac{1}{n}} < \lambda \frac{\mu}{\lambda} = \mu,$$

ossia $\mu < \mu$, assurdo. Perciò $\lambda = \mu$. $\square$

Dunque, per ogni $x \in \mathbb{R}$ la potenza reale a^x è data da

$$\begin{cases} \sup A = a^x = \inf B & \text{se } a \geq 1 \\ \inf A = a^x = \sup B & \text{se } a \leq 1, \end{cases}$$

ove, come sappiamo,

$$A=\{a^r : r\in\mathbb{Q},\ r\le x\},\quad B=\{a^s : s\in\mathbb{Q},\ s\ge x\}.$$

Si noti che quando $a=1$ risulta $A=\{1\}=B$ e dunque

$$1^x = 1 \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Abbiamo così definito la <u>funzione esponenziale di base a</u>

$$f(x)=a^x,$$

la quale verifica:

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

Infatti (caso $a\ge 1$)

$$\begin{aligned} a^{-x} &= \sup\{a^r : r\in\mathbb{Q},\ r\le -x\} = [\text{posto } s=-r] \\ &= \sup\{a^{-s} : s\in\mathbb{Q},\ s\ge x\} = [\text{per definizione}] \\ &= \sup\left\{\frac{1}{a^s} : s\in\mathbb{Q},\ s\ge x\right\} = \left[\text{perché } a^s\left(\frac{1}{a}\right)^s = 1^s = 1\right] \\ &= \sup\left\{\left(\frac{1}{a}\right)^s : s\in\mathbb{Q},\ s\ge x\right\} = \left[\text{perché } \frac{1}{a}\le 1\right] \\ &= \left(\frac{1}{a}\right)^x; \end{aligned}$$

inoltre

$$a^{-x} = \sup\left\{\frac{1}{a^s} : s\in\mathbb{Q},\ s\ge x\right\} \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{\inf\{a^s : s\in\mathbb{Q},\ s\ge x\}} = \frac{1}{a^x}$$

esercizio!

dim. esercizio: siano $\lambda = \sup\left\{\frac{1}{a^s} : s \in \mathbb{Q}, s \geq x\right\}$ (ove $a \geq 1$).

$\mu = \inf\{a^s : s \in \mathbb{Q}, s \geq x\}$

Allora per ogni $s \in \mathbb{Q}$, $s \geq x$, si ha

$$\frac{1}{a^s} \leq \lambda,$$

dunque $a^s \geq \frac{1}{\lambda}$ per ogni $s \in \mathbb{Q}$, $s \geq x$. Ne segue $\mu \geq \frac{1}{\lambda}$.

D'altra parte, per ogni $s \in \mathbb{Q}$, $s \geq x$, si ha

$$a^s \geq \mu,$$

dunque $\frac{1}{a^s} \leq \frac{1}{\mu}$ per ogni $s \in \mathbb{Q}$, $s \geq x$. Ne segue $\lambda \leq \frac{1}{\mu}$.

In definitiva $\mu \geq \frac{1}{\lambda}$ e $\mu \leq \frac{1}{\lambda}$, cioè $\mu = \frac{1}{\lambda}$. $\square$

A questo punto, con estenuanti (anche se non difficili) dimostrazioni tutte uguali, si prova che la funzione esponenziale a^x verifica:

(i) $a^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, (ii) $a^{x+y} = a^x a^y \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,

(iii) $(ab)^x = a^x \cdot b^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, (iv) $(a^x)^y = a^{xy} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$,

(v) $a < b \Rightarrow \begin{cases} a^x < b^x & \forall x > 0 \\ a^x > b^x & \forall x < 0, \end{cases}$

(vi) $\begin{cases} a < 1 \Rightarrow & a^x < 1 < a^{-x} \quad \forall x > 0 \\ a > 1 \Rightarrow & a^x > 1 > a^{-x} \quad \forall x > 0, \end{cases}$

(vii) $\begin{cases} a < 1 \Rightarrow & a^x < a^y \quad \forall x, y \text{ con } x > y \\ a > 1 \Rightarrow & a^x > a^y \quad \forall x, y \text{ con } x > y. \end{cases}$

Dunque $x \longmapsto a^x$, se $a>1$, è <u>strettamente crescente</u>, mentre se $0<a<1$ è <u>strettamente decrescente</u>.

Inoltre essa manda $\mathbb{R}$ in $]0,\infty[$ in modo bigettivo:

<u>Proposizione</u> Se $a>0$, $a\neq 1$, allora $\forall y>0$ $\exists!\, x\in\mathbb{R}$ tale che $a^x=y$. Tale numero x si chiama <u>logaritmo in base a</u> di y e si scrive $x=\log_a y$.

<u>dim</u>. L'unicità segue dalla stretta monotonia di a^x.

Proviamo l'esistenza nel caso $a>1$.

Supponiamo $y>1$: posto

$$A=\{t\in\mathbb{R}:\ a^t<y\},$$

si ha $A\neq\emptyset$ poiché $0\in A$, dato che $a^0=1<y$. Inoltre A è limitato superiormente: esiste infatti $n\in\mathbb{N}^+$ tale che $a^n>y$

$$\left[a^n=[1+(a-1)]^n=1+n(a-1)+\cdots+(a-1)^n>1+n(a-1)>y \text{ per } n>\frac{y-1}{a-1}\right],$$

e quindi per la crescenza di a^x si ha $t<n$ $\forall t\in A$.

Sia dunque $x=\sup A$ e mostriamo che $a^x=y$.

Se fosse $a^x>y$, scelto n in modo che $1\leq a^{\frac1n}<\frac{a^x}{y}$, avremmo $a^{x-\frac1n}>y>a^t$ $\forall t\in A$, cioè $x-\frac1n>t$ $\forall t\in A$, assurdo perché $x=\sup A$.

Se fosse $a^x<y$, scelto n in modo che $1\leq a^{\frac1n}<\frac{y}{a^x}$, avremmo $a^{x+\frac1n}<y$, ossia $x+\frac1n\in A$, assurdo perché $x=\sup A$. Perciò $a^x=y$.

Se $y=1$, basta scegliere $x=0$.

Se $0<y<1$, allora $\frac{1}{y}>1$; per quanto già visto esiste $x'\in\mathbb{R}$ tale che $a^{x'}=\frac{1}{y}$; ne segue, posto $x=-x'$, $a^x=a^{-x'}=y$. □

La funzione $\log_a y$ è l'inversa di a^x:

$$a^{\log_a y}=y \quad \forall y>0, \qquad \log_a a^x = x \quad \forall x\in\mathbb{R}.$$

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y \quad \forall x,y>0,$$

$$\left[\text{da } a^{u+v}=a^u a^v \text{ con } u=\log_a x,\ v=\log_a y\right].$$

$$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \quad \left[\text{da } a^{-u}=\frac{1}{a^u}, \text{ con } u=\log_a x\right]$$

$$\log_a x = \log_a b \,\log_b x \quad \left[\text{da } (a^u)^v=a^{uv}, \text{ con } u=\log_a b,\ v=\log_b x\right]$$

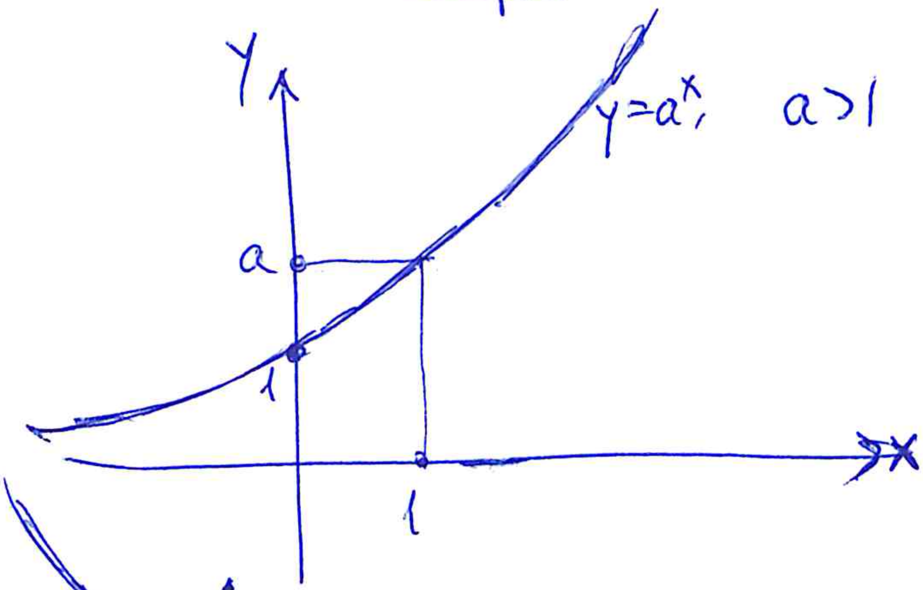
$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

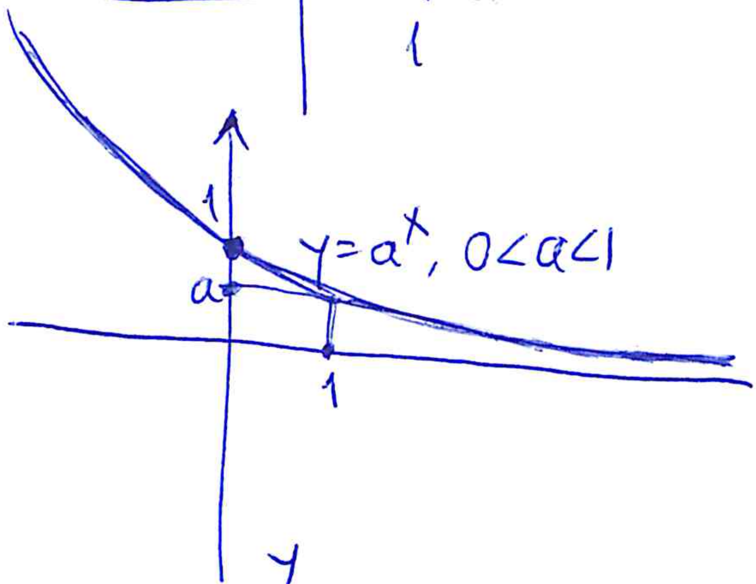
$$\log_a b^x = x\log_a b$$

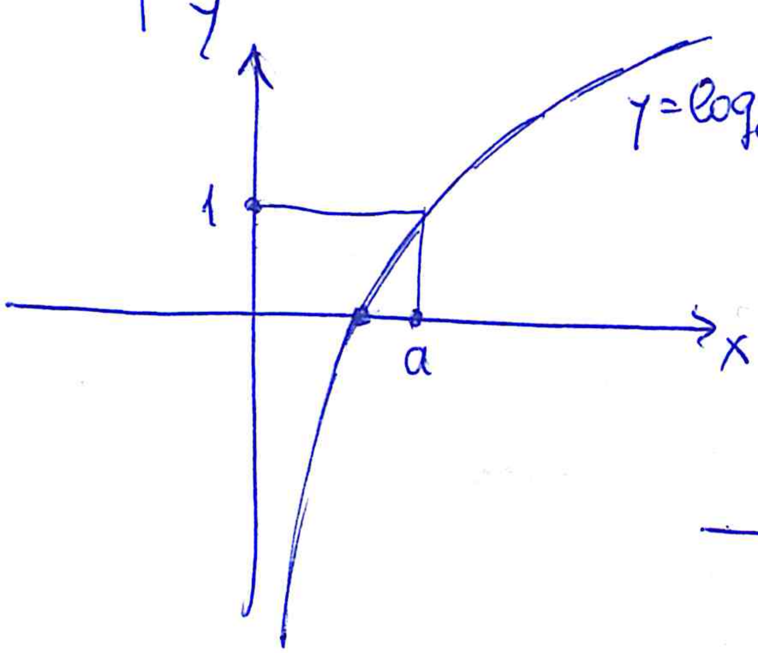
$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

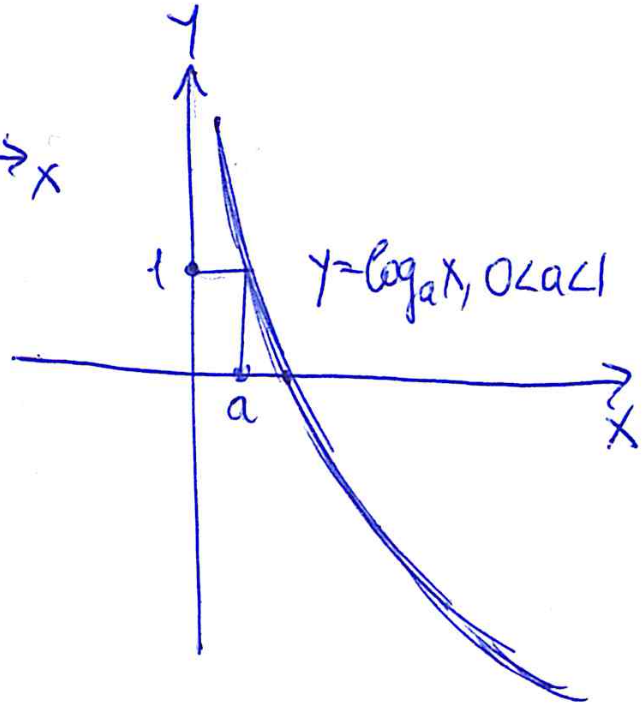
(qui $b,a>0$ e $\neq 1$, $x,y>0$).

Grafici









Esercizi

- $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

- $\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$, $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$.

- $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$, $\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$.

- Calcolare $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{7}{8}\pi$, $\operatorname{tg} \frac{7}{12}\pi$.

- Calcolare l'area del triangolo di vertici $(1,1)$, $(2,6)$, $(-1,3)$.

- Risolvere $4 \sin x \operatorname{tg} x - \frac{3}{\cos x} > 0$.

- Risolvere $\frac{\sqrt{3} \sin x - 1}{\sqrt{3} \sin x + 1} > 0$.

- Provare le formule di prostaferesi

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}.$$

- Provare che $|\cos\alpha - \cos\beta| \leq |\alpha-\beta|$, $|\sin\alpha - \sin\beta| \leq |\alpha-\beta|$.

- Provare che $1 + 2 \sum_{n=1}^{N} \cos nx = \frac{\sin \left(N+\frac{1}{2}\right)x}{\sin \frac{x}{2}}$ $\forall x \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.