Esercizi

$(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall x \geq -1, \ \forall n \in \mathbb{N}^+$ (disuguaglianza di Bernoulli).

[Induzione: per $n=1$, $1+x \geq 1+x$ vero. Se vale per n,
$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+nx^2 \geq 1+(n+1)x$.]

$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n\cdot 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$.

$\left[\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{h=0}^{n-1}\binom{n-1}{h} = \underbrace{n\,2^{n-1}}_{\uparrow} \text{ (Newton)}\right]$

$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = n(n+1)\,2^{n-2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$.

Per $n=1$ si ha $1=\frac{2}{2}$, vero. Per $n \geq 2$

$\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=2}^{n}\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} + n\,2^{n-1} =$

$= n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} + n\cdot 2^{n-1} = n(n-1)\sum_{h=0}^{n-2}\binom{n-2}{h} + n\cdot 2^{n-1} = n\cdot 2^{n-2}(n-1+2) = n(n+1)\,2^{n-2}$.

$\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{h} = 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. $\left[\sum_{k=0}^{n}\sum_{h=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{h} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{h=0}^{k}\binom{k}{h} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k = 3^n\right]$.

Radice n-sima ($n \in \mathbb{N}^+$).

Teo. Per ogni $a \geq 0$ esiste un unico $x \geq 0$ tale che $x^n = a$. Tale numero è detto radice n-sima di a e si scrive $x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

Dim. Come per la radice quadrata, si considerano $A = \{x \geq 0 : x^n < a\}$ e $B = \{x \geq 0 : x^n > a\}$. Si prova che A, B sono non vuoti e separati, e che l'elemento di separazione x è unico, e verifica $x^n = a$. □

Proposizione (disuguaglianza delle medie). Sia $n \in \mathbb{N}^+$, siano $a_1, \dots, a_n \geq 0$. Posto $G_n = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}$ (media geometrica) e $A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ (media aritmetica), si ha $G_n \leq A_n$; inoltre risulta $G_n = A_n$ se e solo se $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

<u>dim</u>. Se $a_1=\cdots=a_n$ allora $G_n=A_n$ (ovvio).

Viceversa, se non sono tutti uguali allora proviamo che $G_n<A_n$.

Se qualcuno degli a_n è nullo, allora $G_n=0<A_n$. Supponiamo dunque che tutti gli a_n siano positivi.

Se $n=2$, la tesi è vera: essendo $a_1\neq a_2$ si ha

$$\sqrt{a_1a_2}=\frac{1}{2}\left(2\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\right)<\frac{1}{2}(a_1+a_2).$$

Se la tesi vale per n numeri positivi non tutti uguali, proviamola per $n+1$ numeri positivi non tutti uguali. Non essendo tutti uguali, ne esiste uno strettamente maggiore della media aritmetica A_{n+1}; quindi ne esiste anche uno minore di essa: supponiamo (a meno di riordinare gli indici) $a_n<A_{n+1}<a_{n+1}$.

Essendo $\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}a_k=A_{n+1}$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n-1}a_k+(a_n+a_{n+1}-A_{n+1})=nA_{n+1},$$

quindi A_{n+1} è la media aritmetica di $a_1,\dots,a_{n-1},\ a_n+a_{n+1}-A_{n+1}$ (che sono n numeri >0, essendo $a_n+a_{n+1}-A_{n+1}>a_n>0$. Ora, se questi n numeri sono tutti uguali, allora $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n-1}a_k(a_n+a_{n+1}-A_n)}=A_{n+1}$; se invece non sono tutti uguali, per ipotesi induttiva si ha

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n-1}a_k\,(a_n+a_{n+1}-A_{n+1})}<A_{n+1},$$

da cui, in ogni caso,

$$A_{n+1}(a_n+a_{n+1}-A_{n+1})\prod_{k=1}^{n-1}a_k\leq(A_{n+1})^{n+1}.$$

Ma $A_{n+1}(a_n+a_{n+1}-A_{n+1})-a_na_{n+1}=(A_{n+1}-a_{n+1})a_n+A_{n+1}(a_{n+1}-A_{n+1})=$

$=(a_{n+1}-A_{n+1})(A_{n+1}-a_n)>0$, ossia $a_na_{n+1}<A_{n+1}(a_n+a_{n+1}-A_{n+1})$.

Perciò $\prod_{k=1}^{n+1}a_k<(A_{n+1})^{n+1}$, cioè $G_{n+1}<A_{n+1}$ (fine del passo induttivo) □

Esercizi

- $\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \forall n,k \in \mathbb{N}$ con $n \geq k$.

[Induzione: se $n=0$ è $1=1$, se vale per n allora
$$\sum_{m=k}^{n+1} \binom{m}{k} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}.]$$

- $\inf_{n\in\mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a \geq 1, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} = 1 \quad \forall a \in]0,1]$.

[Se $a \geq 1$, allora $a^{\frac{1}{n}} \geq 1$ perché $1^n = 1 \leq a$; ma dato $\varepsilon > 0$, se n è tale che $a < 1+n\varepsilon$, per Bernoulli $a < 1+n\varepsilon \leq (1+\varepsilon)^n$, dunque $a^{\frac{1}{n}} < 1+\varepsilon$. Dunque $\inf_{n\in\mathbb{N}^+} a^{\frac{1}{n}} \leq 1+\varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$.
Se $a \in]0,1]$, idem (mutatis mutandis).]

- $a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} = (ab)^{\frac{1}{n}} \quad \forall a,b \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$. $\left[\left(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n \left(b^{\frac{1}{n}}\right)^n = ab\right]$
- $a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{1}{n+1}} \quad \forall a > 1, \quad a^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n+1}} \quad \forall a \in]0,1[\quad (n \in \mathbb{N}^+)$.

[se $a > 1$, $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{n+1} = a\left(a^{\frac{1}{n}}\right) > a$, quindi $a^{\frac{1}{n}} > a^{\frac{1}{n+1}}$. Idem per $a \in]0,1[$.]

- $1 \leq \sqrt[n]{n} < 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$

[applicare $G_n \leq A_n$ ai numeri $\underbrace{1,1,\dots,1}_{n-2}, \sqrt{n}, \sqrt{n}$.]

- $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n < \left(1+\frac{a}{n+1}\right)^{n+1} \quad \forall n > \max\{0,-a\}$, cioè: per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ se $a \geq 0$, per ogni $n > |a|$ se $a < 0$.

[Applicare $G_{n+1} \leq A_{n+1}$ ai numeri $1, \underbrace{\left(1+\frac{a}{n}\right), \dots, \left(1+\frac{a}{n}\right)}_{n}$.]

- $0 < a < b \Rightarrow 0 < a^n < b^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$.

[Induzione: per $n=1$ è vero; se vale per n, allora $a^{n+1} = a \cdot a^n < a \cdot b^n < b \cdot b^n = b^{n+1}$.]

- $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \forall q \in [0,1[$.

[$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} < \frac{1}{1-q}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; d'altra parte, fissato $\varepsilon > 0$ e scelto $n \in \mathbb{N}$ tale che $q < \varepsilon^{\frac{1}{n+1}}$ (possibile perché $\sup_{n\in\mathbb{N}^+} \varepsilon^{\frac{1}{n}} = 1$), si ha $q^{n+1} < \varepsilon$ e quindi, per tale n, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} > \frac{1-\varepsilon}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{\varepsilon}{1-q}$.
Dunque $\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} q^k > \frac{1}{1-q} - \frac{\varepsilon}{1-q}$ per ogni $\varepsilon > 0$.]

- $n^{\frac{n}{2}} \le n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^+$.

[Si ha $n! = \prod_{k=1}^{n} k = \prod_{k=1}^{n} (n+1-k)$, da cui $[n!]^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n+1-k)$. La funzione $k \to k(n+1-k)$ ha massimo per $k = \frac{n+1}{2}$, dove vale $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$, e minimo agli estremi 1 e n, dove vale n. Ne segue la tesi.]

- Potenze razionali. Si ha $\left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$ (elevate alla q, entrambe valgono x^p)
Poniamo allora, per $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $x^r := \left(x^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(x^p\right)^{\frac{1}{q}}$ $\forall x > 0$. Allora si ha $x^{r+s} = x^r x^s$ $\forall r,s \in \mathbb{Q}$. Infatti, se $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{m}{n}$, allora

$$x^{r+s} = x^{\frac{pn+qm}{qn}},$$

quindi, elevando alla qn,

$$\left(x^{r+s}\right)^{qn} = x^{pn+qm},$$

mentre $\left(x^r x^s\right)^{qn} = \left(x^{\frac{p}{q}} x^{\frac{m}{n}}\right)^{qn} = x^{pn} x^{qm} = x^{pn+qm}$. Ne segue la tesi.