ANA. 1

Docente: Paolo Acquistapace, tel. 050 · 2213209,
stanza 213 al dip. Matematica - Largo B. Pontecorvo 5 - Pisa.
mail paolo.acquistapace@unipi.it
pagina web www.dm.unipi.it/~acquistp/
orario di ricevimento: su appuntamento via mail
libro consigliato: PAGANI - SALSA, ANALISI MATEMATICA 1, ZANICHELLI

DIRITTI DEGLI STUDENTI: lezioni puntuali e chiare,
possibilità di fare domande,
tempi adeguati per gli esami,
esami solo sugli argomenti visti a lezione.

DOVERI DEGLI STUDENTI: niente casino a lezione,
studiare,
non barare nelle prove scritte.

DIRITTI MIEI: lezioni senza casino

DOVERI MIEI: lezioni chiare.
puntualità
ricevimenti settimanali
reperibilità via mail

→ Non serve capire senza studiare, non serve studiare senza capire!

Modalità di esame:

(a) prova scritta per tutti,
(b) prove orali per tutti.

Tre prove in itinere durante il corso: se superate con media ≥ 18, esonerano dalla prova scritta (entro la sessione estiva).
L'orale si svolge nella stessa sessione dello scritto.

ALFABETO GRECO

alfa	α	A	iota	ι	I	ro	ρ	P
beta	β	B	coppa	κ	K	sigma	σ	Σ
gamma	γ	Γ	lambda	λ	Λ	tau	τ	T
delta	δ	Δ	mu (mi)	μ	M	iupsilon	υ	Y
epsilon	ε	E	nu (ni)	ν	N	fi	φ	Φ
zeta	ζ	Z	csi	ξ	Ξ	chi	χ	X
eta	η	H	omicron	o	O	psi	ψ	Ψ
teta	θ	Θ	pi	π	Π	omega	ω	Ω

NUMERI REALI

Fin dall' infanzia conosciamo i <u>numeri naturali</u>

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

e i <u>naturali positivi</u>

$$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \setminus \{0\};$$

i <u>numeri interi</u>

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

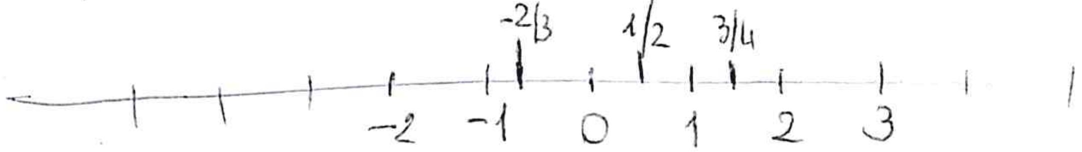
(la sigla $\mathbb{Z}$ viene da zahl = "numero" in Tedesco), e

i <u>numeri razionali</u>, cioè le <u>frazioni</u>:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^+ \right\}$$

(la sigla $\mathbb{Q}$ viene da "quoziente").

Se prendiamo una retta, r, fissiamo un'origine $O \in r$ e una unità di misura, cioè un altro punto P che denota il numero 1, possiamo collocare tutti i punti di $\mathbb{Q}$ sulla retta, in modo ordinato:



Saranno fitti fitti, ma lasceremo dei buchi: ad esempio, il numero $\sqrt{2}$ non c'è: infatti

<u>Teorema</u> $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

<u>dim.</u> Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$: dunque esistono $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^+$ tali che $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ e, per definizione, deve essere $2 = \frac{p^2}{q^2}$, cioè $2q^2 = p^2$. Possiamo anche supporre, semplificando se necessario la frazione $\frac{p}{q}$, che p e q non abbiano fattori comuni. Poiché $p^2 = 2q^2$, il numero p^2 è pari quindi p è pari (perché?), cioè $p = 2k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ma allora

$$2q^2 = p^2 = (2k)^2 = 4k^2,$$ ossia $q^2 = 2k^2$. Ne segue che q^2, e dunque q è pari. Ma allora p e q hanno il fattore comune 2, il che contraddice quanto supposto. $\square$

In effetti i punti della retta sono molti di più dei razionali.

[**Assioma** Esiste un insieme $\mathbb{R}$ di numeri, detti numeri reali, che contiene $\mathbb{Q}$, che è in corrispondenza biunivoca con l'insieme dei punti della retta, e che è dotato di certe strutture.

Andiamo a scoprire le strutture dell'insieme $\mathbb{R}$: esso ha proprietà algebriche, di ordinamento e di continuità.

Proprietà algebriche (operazioni in $\mathbb{R}$).

In $\mathbb{R}$ sono definite due operazioni binarie: la somma e il prodotto

- Somma. Ad ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si può associare la loro somma, che è il numero $a+b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

(i) associatività: $(a+b)+c = a+(b+c) \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

(ii) commutatività: $a+b = b+a \quad \forall a,b \in \mathbb{R}$.

(iii) esistenza dell'elemento neutro: $\exists\, 0 \in \mathbb{R}$ tale che

$$a+0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

[**Proposizione**: l'elemento neutro della somma è unico.

dim. Se $0' \in \mathbb{R}$ è un altro elemento neutro, per (iii) applicato con $a=0'$ e $a=0$ si trova

$$0' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{(perché } 0 \text{ è elemento neutro)}}}{=} 0'+0 = 0+0' = 0 \quad \text{(perché } 0' \text{ è elemento neutro)}.$$

cioè $0'=0$. $\square$

(iv) esistenza dell'opposto: per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste $a' \in \mathbb{R}$ tale c

$$a+a'=0.$$

Proposizione Per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'opposto di a è unico.

dim. Se a', a'' sono opposti di a, allora $a+a' = a+a'' = 0$;
dunque
$$a'' = a''+0 = a''+(a+a') = (a''+a)+a' = (a+a'')+a' = 0+a' = a',$$
cioè $a''=a'$. □

L'opposto di $a \in \mathbb{R}$ si denota con $-a$: dunque
$$\begin{cases} -a \in \mathbb{R} \\ a+(-a)=0 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$
Si noti che $-(-a)=a$ $\forall a \in \mathbb{R}$.

- Prodotto Ad ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si può associare il loro prodotto, che è il numero $a \cdot b \in \mathbb{R}$. Valgono le seguenti proprietà:

(i) associatività $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

(ii) commutatività $a \cdot b = b \cdot a$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

(iii) esistenza dell'elemento neutro: $\exists\, 1 \in \mathbb{R}$ tale che $1 \neq 0$ e
$$a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

Proposizione: l'elemento neutro del prodotto è unico.

dim. Se $1' \in \mathbb{R}$ è un altro elemento neutro, allora $1' \neq 0$ e
$$1' \underset{\text{perché } 1 \text{ è elemento neutro}}{=} 1' \cdot 1 = 1 \cdot 1' \underset{\text{perché } 1' \text{ è elemento neutro}}{=} 1$$
da cui $1'=1$. □

(iv) esistenza dell'inverso: per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esiste $b \in \mathbb{R}$ tale che $a \cdot b = 1$.

Proposizione: per ogni $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ l'inverso di a è unico.

dim. Se b, b' sono inversi di a, allora $a \cdot b = a \cdot b' = 0$;

dunque

$$b' = b' \cdot 1 = b' \cdot (a \cdot b) = (b' \cdot a) \cdot b = (a \cdot b') \cdot b = 1 \cdot b = b \cdot 1 = b,$$

cioè $b' = b$. □

L'inverso di $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ si denota con a^{-1} o con $\frac{1}{a}$.

(V) distributività: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

Proposizione Per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha $a \cdot 0 = 0$.

dim. Sia b l'opposto di $a \cdot 0$; allora $(a \cdot 0) + b = 0$.

Dunque

$$0 = (a \cdot 0) + b = (a \cdot (0+0)) + b = [(a \cdot 0) + (a \cdot 0)] + b =$$
$$= (a \cdot 0) + [(a \cdot 0) + b] = (a \cdot 0) + 0 = (a \cdot 0). \; \square$$

Proposizione Per ogni $a \in \mathbb{R}$ l'inverso a^{-1} è diverso da 0.

dim. Se fosse, per assurdo, $a^{-1} = 0$, allora

$$1 = a \cdot a^{-1} = a \cdot 0 = 0,$$

che è contro l'ipotesi $1 \neq 0$. □

Osservazione L'ipotesi $1 \neq 0$ è fondamentale: infatti l'insieme $\{0\}$ verifica tutte le proprietà sopra elencate. Non otterremmo quindi univocamente $\mathbb{R}$, senza tale ipotesi.

Osservazione Tutte le proprietà sopra elencate valgono anche in $\mathbb{Q}$. Ma le proprietà assiomatiche di $\mathbb{R}$ non sono finite qui!

Conseguenze delle proprietà finora viste.

(a) semplificazione per la somma Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a+b=a+c$, allora $b=c$.

dim. $b = b+(a+(-a)) = (b+a)+(-a) = (c+a)+(-a) =$
$= c+(a+(-a)) = c$. $\square$

(b) semplificazione per il prodotto Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, se $a \neq 0$, e se $ab=ac$, allora $b=c$.

dim $b = b\cdot(a\cdot a^{-1}) = (b\cdot a)\cdot a^{-1} = (c\cdot a)a^{-1} = c\cdot(a\cdot a^{-1}) = c$. $\square$

(c) definizione di sottrazione: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a+c=b$.

[È unico, perché $a+c=b$ implica $(-a+a)+c=(-a)+b$, ossia $c=(-a)+b$

Tale c si denota con $b-a$. Dunque $b-a$ è uguale a $b+(-$

(d) definizione di divisione: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$, con $a \neq 0$, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $a\cdot c=b$.

[È unico perché da $a\cdot c=b$ segue $c=(a^{-1}\cdot a)\cdot c = a^{-1}\cdot(a\cdot c) = a^{-1}\cdot b$.]

Tale c si denota con $\frac{b}{a}$. Dunque $\frac{b}{a}$ è uguale a $b\cdot\frac{1}{a}$.

(e) legge di annullamento del prodotto: se $a, b \in \mathbb{R}$ e $ab=0$, allora $a=0$ oppure $b=0$.

[Se fosse $a\neq 0$, $b \neq 0$, avremmo
$0 = 0\cdot(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}) = (a\cdot b)\cdot(\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}) = a\cdot(b\cdot\frac{1}{b})\cdot\frac{1}{a} = a\cdot\frac{1}{a} = 1$, assurdo]

<u>Osservazione</u> Chi è l'opposto di ab? è $-(ab)$, per definizione; ma è anche $(-a)b$, e anche $a(-b)$. Infatti $(-a)b+ab=[(-a)+a]b=0\cdot b=0$. (idem per $a(-b)$). Quindi $(-a)(-b)=ab$ perché entrambi sono opposti di $(-a)b$.

<u>Proprietà di ordinamento</u> (disuguaglianze in $\mathbb{R}$)

L'insieme $\mathbb{R}$ è dotato di una <u>struttura d'ordine</u>, secondo la quale certi numeri reali sono <u>positivi</u> (e si trovano alla destra del numero 0).

<u>Proprietà dei numeri positivi</u>

(i) se a, b sono positivi, allora $a+b$, ab sono positivi;

(ii) per ogni $a\in\mathbb{R}$ vale <u>una e una sola</u> delle tre eventualità

a positivo, $\quad -a$ positivo, $\quad a=0$.

<u>Definizione</u> Diciamo che a è <u>negativo</u> se $-a$ è positivo.

<u>Osservazioni</u> (1) 0 non è positivo e non è negativo.

(2) 1 è positivo: infatti o 1 è positivo, o -1 è positivo; nel primo caso $1=1\cdot 1$ è positivo, e nel secondo caso $1=(-1)\cdot(-1)$ è positivo. In ogni caso quindi si ottiene che 1 è positivo (per cui -1 è negativo).