MMA | lu 2/11/20

Il teorema della divergenza e il teorema di Stokes

Introduciamo due "operatori" fondamentali, che agiscono sui campi vettoriali trasformandoli in una grandezza scalare oppure in un altro campo vettoriale.

Definizione Sia $\underline{f}: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un campo vettoriale di classe C^1 su un aperto A. La divergenza di $\underline{f}$ è la funzione scalare continua

$$[\operatorname{div} \underline{f}](\underline{x}) = \sum_{j=1}^{N} D_j f_j(\underline{x}).$$

Esempi (1) Se $A = \mathbb{R}^2$, $\underline{f}(x,y) = (x,-y)$, allora

$$[\operatorname{div} \underline{f}](x,y) = \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 1 - 1 = 0.$$

(2) Se $A = \mathbb{R}^3$, $\underline{f}(x,y,z) = (x^2, xyz, zy)$, allora

$$[\operatorname{div} \underline{f}](x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x} x^2 + \frac{\partial}{\partial y} xyz + \frac{\partial}{\partial z} zy = 2x + xz + y.$$

Definizione Sia $\underline{g}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale di classe C^1 su un aperto A. Il rotore di $\underline{g}$ è il campo vettoriale continuo

$$[\operatorname{rot} \underline{g}](x,y,z) = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_y g_3 - D_z g_2 \\ D_z g_1 - D_x g_3 \\ D_x g_2 - D_y g_1 \end{pmatrix}(x,y,z).$$

Esempi (1) Se $A = \mathbb{R}^3$, $\underline{g}(x,y,z) = (x,y,z)$, allora $\operatorname{rot} \underline{g} = \underline{0}$.

(2) Se $A = \mathbb{R}^3$, $\underline{g}(x,y,z) = (e^y, e^z, e^x)$, allora $\operatorname{rot} \underline{g} = (-e^z, -e^x, -e^y)$.

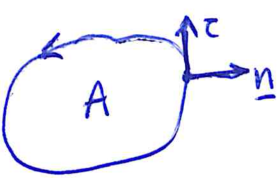
Illustriamo i due teoremi più importanti di questa lezione.

<u>Teorema</u> (<u>della divergenza</u>). Sia $A \subset \mathbb{R}^N$ ($N=2$ o $N=3$) un aperto limitato con frontiera ∂A di classe C^1 (o C^1 a tratti). Sia $\underline{n}$ il versore normale <u>esterno</u> ad A, calcolato sui punti di ∂A. Se $\underline{F}$ è un campo vettoriale di classe C^1, definito su un aperto $B \supset \overline{A}$, si ha

$$\int_A \operatorname{div} \underline{F} \, d\underline{x} = \int_{\partial A} \langle F, \underline{n} \rangle_N \, ds .$$

<u>Osservazioni</u> (1) Se $N=1$, $d\underline{x} = dx\,dy$, e ∂A è una curva chiusa. Se $N=3$, $d\underline{x} = dx\,dy\,dz$ e ∂A è una superficie chiusa; in questo caso, $ds = d\sigma$ e il 2° membro è il flusso del campo $\underline{F}$ uscente dalla superficie ∂A.

(2) Se $N=2$, detto $\underline{\tau}$ il versore tangente a ∂A con verso <u>antiorario</u>,



si ha $n_1 = \tau_2$, $n_2 = -\tau_1$,

quindi il 2° membro del teorema diventa un lavoro!

$$\int_A \operatorname{div} F \, dx\,dy = \int_{\partial A} (F_1 n_1 + F_2 n_2) \, ds = \int_{\partial A} (F_1 \tau_2 - F_2 \tau_1) \, ds = \int_{\partial A} \left\langle \begin{pmatrix} -F_2 \\ F_1 \end{pmatrix}, \underline{\tau} \right\rangle_2 ds =$$

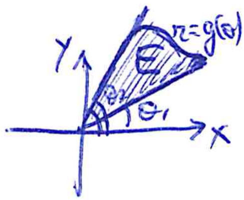
$$= \int_{+\partial A} (F_1 \, dy - F_2 \, dx) .$$

(3) Applicazione all'area di insiemi piani.

Sia $E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : r \leq g(\theta),\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2\}$, ove ovviamente $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, e g è una funzione continua e positiva su $[\theta_1, \theta_2]$. Si ha

$$m_2(E) = \int_E 1\, dx\,dy = \int_{+\partial E} x\, dy = \int_{-\partial E} y\, dx,$$

e quindi, in particolare,



$$m_2(E) = \frac{1}{2}\int_{+\partial E} (x\,dy - y\,dx).$$

Il bordo ∂E è fatto dai due segmenti

$$+\Gamma_1 : \begin{cases} x = r\cos\theta_1 \\ y = r\sin\theta_1 \end{cases} \quad 0 \leq r \leq g(\theta_1), \qquad -\Gamma_2 : \begin{cases} x = r\cos\theta_2 \\ y = r\sin\theta_2 \end{cases}, \quad 0 \leq r \leq g(\theta_2),$$

e dal tratto curvilineo

$$+\Gamma_3 : \begin{cases} x = g(\theta)\cos\theta \\ y = g(\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 .$$

Quindi

$$m_2(E) = \frac{1}{2}\int_{+\Gamma_1} (x\,dy - y\,dx) + \frac{1}{2}\int_{-\Gamma_2} (x\,dy - y\,dx) + \frac{1}{2}\int_{+\Gamma_3} x\,dy - y\,dx.$$

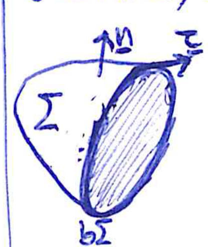
Si verifica immediatamente che gli integrali lungo Γ_1 e lungo Γ_2 sono nulli. Così

$$m_2(E) = \frac{1}{2}\int_{+\Gamma_3} (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \Big[g(\theta)\cos\theta\big(g'(\theta)\sin\theta + g(\theta)\cos\theta\big) +$$
$$+ g(\theta)\sin\theta\,\big[g'(\theta)\cos\theta - g(\theta)\sin\theta\big] d\theta = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} g(\theta)^2\, d\theta.$$

Dunque, per esempio, l'area di uno dei tre petali della "rosa a tre petali" ($E=\{(x,y):\ r\le \sin 3\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}\}$), è

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\sin^2 3\theta\, d\theta = \frac{1}{6}\int_0^{\pi}\sin^2 t\, dt = \frac{\pi}{12}.$$

<u>Teorema (di Stokes, o del rotore)</u> Sia Σ una superficie regolare, orientabile, con bordo $b\Sigma$. Orientiamo Σ col versore normale $\underline{n}$



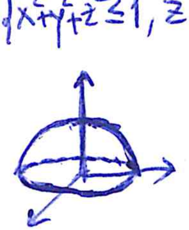
e $b\Sigma$ col versore tangente $\underline{\tau}$ in modo che, percorrendo $b\Sigma$ nel verso di $\underline{\tau}$ con la testa dalla parte di $\underline{n}$, si abbia Σ a sinistra. Se $\underline{F}: B\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ è un campo vettoriale di classe C^1 con $B\supset\Sigma$. Allora

$$\int_{\Sigma}\langle \operatorname{rot}\underline{F},\underline{n}\rangle_3\, d\sigma = \int_{b\Sigma}\langle\underline{F},\underline{\tau}\rangle_3\, ds.$$

<u>Osservazione.</u> Le orientazioni di $\underline{n}$ e $\underline{\tau}$ sono "coerenti" nel senso descritto nell'enunciato se e solo se, detto $\underline{\nu}$ il versore perpendicolare sia a $\underline{n}$ che a $\underline{\tau}$, <u>uscente</u> da Σ, risulta $\det(\underline{\nu}\,|\,\underline{\tau}\,|\,\underline{n})=1$.

<u>Esempio</u> Sia $\underline{F}(x,y,z)=\begin{pmatrix} y+xz\\ 2x+2yz\\ 3z+4xy\end{pmatrix}$ e sia $\Sigma=\{x^2+y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\}$.

la semisfera unitaria superiore, orientata secondo il versore $\underline{n}$ che ha $n_3>0$.



Il flusso del rotore di $\underline{F}$ attraverso Σ si calcola così:

$$\operatorname{rot}\underline{F} = \begin{pmatrix} 4x-2y \\ x-4y \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \Sigma : \begin{cases} x = \cos\theta\cos\varphi \\ y = \cos\theta\sin\varphi \\ z = \sin\theta \end{cases}, \quad \begin{matrix} 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix},$$

$$D\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\cos\varphi & -\cos\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} -\cos^2\theta\cos\varphi \\ -\cos^2\theta\sin\varphi \\ -\sin\theta\cos\theta \end{pmatrix},$$

ma questo $\underline{n}$ ha $n_3 < 0$. Quindi metteremo un segno "$-$" davanti all'integrale. Il flusso è

$$-\int_\Sigma \langle \operatorname{rot}\underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \Big[(4\cos\theta\cos\varphi - 2\cos\theta\sin\varphi)(-\cos^2\theta\cos\varphi) +$$

$$+ (\cos\theta\cos\varphi - 4\cos\theta\sin\varphi)(-\cos^2\theta\sin\varphi) + 1\cdot(-\sin\theta\cos\theta) \Big] d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \left[4\cos^3\theta\cos^2\varphi - \cos^3\theta\cos\varphi\sin\varphi - 4\cos^3\theta\sin^2\varphi + \sin\theta\cos\theta \right] d\theta\, d\varphi.$$

Il 1° e 3° integrale sono uguali perché $\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin^2\varphi\, d\varphi = \pi$.
Il 2° integrale è nullo perché $\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi = 0$. Il 4° integrale vale $2\pi \cdot \left[\frac{\sin^2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = \pi$. Perciò

$$-\int_\Sigma \langle \operatorname{rot}\underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = +\pi.$$

Potevamo più agevolmente calcolare il lavoro di $\underline{F}$ lungo $b\Sigma$: infatti

$$b\Sigma : \begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \\ z = 0 \end{cases} , \quad \underline{T} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \text{ (orientazione coerente)},$$

quindi

$$\int_{b\Sigma} \langle \underline{F}, \underline{T} \rangle_3 \, ds = \int_0^{2\pi} \left[(\sin\varphi + 0)(-\sin\varphi) + (2\cos\varphi + 0)\cos\varphi + (0 + 4\cos\varphi \sin\varphi) \cdot 0 \right] d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(-\sin^2\varphi + 2\cos^2\varphi \right) d\varphi = -\pi + 2\pi = \pi,$$

come è giusto, visto il teorema.

Esercizi

(1) Calcolare il lavoro di $\underline{F}(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ lungo la curva

$$\Gamma = \left\{ r = \frac{1}{1+\theta}, \ 0 \le \theta < \infty \right\}.$$

(2) Calcolare il flusso del rotore di $\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y^2 - z^2 \\ z^2 - x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ attraverso la superficie Σ che è il bordo laterale della piramide con base $[-1,1] \times [-1,1]$ e vertice $(0,0,1)$, orientata con versore normale $\underline{n}$ tale che $n_3 > 0$.

(3) Calcolare il flusso del campo $\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 1-z \end{pmatrix}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{ z = x^2+y^2,\ 0 \le z \le 1 \},$$

con versore normale $\underline{n}$ tale che $n_3 < 0$.

(4.) Calcolare il flusso del campo $\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$ attraverso la superficie Σ, data dal quadrato di vertici $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,0,\sqrt{2})$, $(1,1,\sqrt{2})$, orientato con versore normale $\underline{n}$ tale che $n_1 > 0$.

(5) Calcolare il flusso del rotore di $\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} ze^{-y} \\ z \\ y \end{pmatrix}$ attraverso la superficie

$$\Sigma = \{ x^2+y^2+z^2 = 1 \}$$

con versore normale $\underline{n}$ esterno.

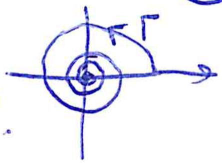
(6) Calcolare il flusso del rotore di $\underline{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ x \\ xe^{-y} \end{pmatrix}$, attraverso la superficie

$$\Sigma = \{ y = x^2+z^2 \le 1,\ z \ge 0 \},$$

con versore normale $\underline{n}$ tale che $n_2 < 0$.

Risoluzione

(1) Dobbiamo calcolare $\int_\Gamma \langle F, \tau \rangle_2 \, ds$, con τ versore tangente orientato secondo le θ crescenti.



Si ha

$$\Gamma : \begin{cases} x = \dfrac{\cos\theta}{1+\theta} \\ y = \dfrac{\sin\theta}{1+\theta} \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = -\dfrac{\sin\theta}{1+\theta} - \dfrac{\cos\theta}{(1+\theta)^2} \\ y' = \dfrac{\cos\theta}{1+\theta} - \dfrac{\sin\theta}{(1+\theta)^2} \end{cases};$$

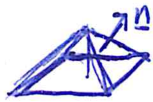
da cui

$$\int_\Gamma \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_2 \, ds = \int_0^\infty (y x' - x y') \, d\theta =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{\sin\theta}{1+\theta} \left(-\frac{\sin\theta}{1+\theta} - \frac{\cos\theta}{(1+\theta)^2} \right) - \frac{\cos\theta}{1+\theta} \left(\frac{\cos\theta}{1+\theta} - \frac{\sin\theta}{(1+\theta)^2} \right) \right] d\theta =$$

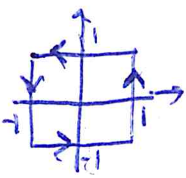
$$= \int_0^\infty -\frac{1}{(1+\theta)^2} \, d\theta = \left[\frac{1}{1+\theta} \right]_0^\infty = -1 .$$

(2) Dobbiamo calcolare $\int_\Sigma \langle \text{rot}\, \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma$, con $\underline{n}$ versore normale esterno (se si vuole $n_3 > 0$). Usando il teorema di Stokes si ha



$$\int_\Sigma \langle \text{rot}\, \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_3 \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma} \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_3 \, ds,$$

ove $\partial\Sigma = [-1,1] \times [-1,1] \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$; l'orientazione del versore tangente è antioraria. Detti Γ_i, $1 \le i \le 4$, i quattro lati, si ha:



$$+\Gamma_1: \begin{cases} x=1 \\ y=y, \\ z=0 \end{cases} \quad -1\le y\le 1, \quad \underline{\tau}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$-\Gamma_2: \begin{cases} x=x \\ y=1 \\ z=0 \end{cases} \quad -1\le x\le 1, \quad \underline{\tau}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$-\Gamma_3: \begin{cases} x=-1 \\ y=y \\ z=0 \end{cases} \quad -1\le y\le 1, \quad \underline{\tau}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$+\Gamma_4: \begin{cases} x=x \\ y=-1 \\ z=0 \end{cases} \quad -1\le x\le 1, \quad \underline{\tau}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

e quindi

$$\int_{b\Sigma} \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_3 \, ds = \int_{-1}^{1} F_2 \, dy - \int_{-1}^{1} F_1 \, dx - \int_{-1}^{1} F_2 \, dy + \int_{-1}^{1} F_1 \, dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} (-1) \, dy - \int_{-1}^{1} 1 \, dx - \int_{-1}^{1} (-1) \, dy + \int_{-1}^{1} 1 \, dx = -2-2+2+2=0.$$

(3) Dobbiamo calcolare $\int_\Sigma \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma$, con $\underline{n}$ normale esterna al paraboloide, essendo $n_3<0$. Essendo

$$\Sigma: \begin{cases} x=x \\ y=y \\ z=x^2+y^2 \end{cases}, \quad (x,y)\in B((0,0),1); \quad D\sigma=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\\2x & 2y\end{pmatrix}, \quad \underline{n}=\begin{pmatrix}-2x\\-2y\\1\end{pmatrix},$$

il verso di $\underline{n}$ è quello sbagliato, e dunque

$$\int_\Sigma \langle F, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = -\int_{\{x^2+y^2\le 1\}} \left(-2x^3-2y^3+1-x^2-y^2\right) dx\,dy =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-2r^3 \cancel{\cos^3\theta} - 2r^3 \cancel{\sin^3\theta} + 1 - r^2\right) r \, dr \, d\theta =$$

(gli integrali $\int_0^{2\pi} \cos^3\theta \, d\theta$ e $\int_0^{2\pi} \sin^3\theta \, d\theta$ sono nulli)

$$= -2\pi \int_0^1 (r - r^3) \, dr = -2\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Si poteva anche fare questa osservazione: se consideriamo la superficie <u>chiusa</u> $\Sigma_0 = \Sigma \cup T$, ove T è il tappo:

$$T = \{(x,y,z) : z = 1, \ x^2 + y^2 \leq 1\},$$

dal teorema della divergenza segue, detto E il paraboloide "pieno",

$$\int_{\Sigma_0} \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \int_E \operatorname{div} \underline{F} \, dx\,dy\,dz = \int_E (2x + 2y - 1) \, dx\,dy\,dz.$$

Si noti che $\displaystyle\int_T \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \int_T \left\langle \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_3 d\sigma = 0$;

quindi

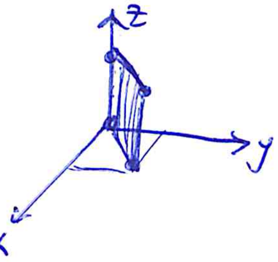
$$\int_\Sigma \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \int_E (2x + 2y - 1) \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} \left[\int_{x^2+y^2}^1 (2x + 2y - 1) \, dz\right] dx\,dy = [\text{coordinate cilindriche}]$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_{r^2}^1 \left(\cancel{2r\cos\theta} + \cancel{2r\sin\theta} - 1\right) r \, dz \, d\theta \, dr =$$

$$= \int_0^1 -2\pi r (1 - r^2) \, dr = 2\pi \int_0^1 (r^3 - r) \, dr = 2\pi \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

4. Dobbiamo calcolare $\int_\Sigma \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma$, con $\underline{n}$ versore normale tale che $n_1 > 0$.



Si ha

$$\Sigma = \{(x,y,z) : z \in [0,\sqrt{2}],\ x = y \in [0,1]\},$$

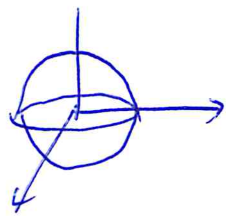
ossia

$$\Sigma : \begin{cases} x = y \\ y = y \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} y \in [0,1] \\ z \in [0,\sqrt{2}] \end{matrix}, \quad D\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

e $\underline{n}$ ha l'orientazione corretta. Perciò

$$\int_\Sigma \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2}} (y^2 - y^2) \, dz \, dy = 0 .$$

5. Dobbiamo calcolare $\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma$; con $\underline{n}$ versore normale esterno. Ma Σ è una superficie chiusa (è il bordo della palla unitaria di $\mathbb{R}^3$). Detta B tale palla, per il teorema della divergenza si ha

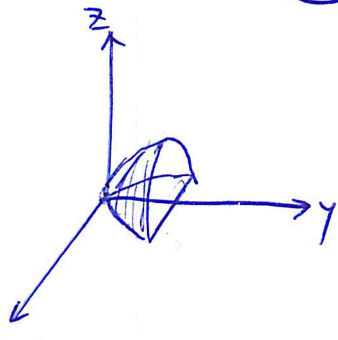


$$\int_\Sigma \langle \operatorname{rot} \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \int_B \operatorname{div} \operatorname{rot} \underline{F} \, dx\,dy\,dz;$$

ma la divergenza di un rotore è sempre 0, per cui il flusso cercato vale 0.

⑥ Dobbiamo calcolare $\int_\Sigma \langle \mathrm{rot}\, F, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma$, con $\underline{n}$ versore normale tale che $n_2 < 0$. 120

Utilizzando coordinate cilindriche con asse uguale all'asse y, si ha



$$\Sigma : \begin{cases} x = r \sin\theta \\ y = r^2 \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\ r \in [0,1]$$

$$D\sigma = \begin{pmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ 2r & 0 \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{pmatrix}, \qquad \underline{n} = \begin{pmatrix} -2r^2 \sin\theta \\ -r \\ -2r^2\cos\theta \end{pmatrix}$$

e l'orientazione di $\underline{n}$ è corretta. Risulta poi

$$\mathrm{rot}\, \underline{F} = \det \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ D_x & D_y & D_z \\ y & x & xe^{-y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -xe^{-y} \\ -e^{-y} \\ 0 \end{pmatrix},$$

e dunque

$$\int_\Sigma \langle \mathrm{rot}\, F, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \left[-re^{-r^2} \sin\theta \left(-2r^2 \sin\theta\right) - \left(e^{-r^2}\right)(-r) + 0 \right] dr\, d\theta =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2\theta \, d\theta \int_0^1 2r^3 e^{-r^2} dr + \pi \int_0^1 r e^{-r^2} dr =$$

$$= \pi \int_0^1 (r^3 + r) e^{-r^2} dr = \quad [r^2 = t]$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (t+1) e^{-t} dt = \frac{\pi}{2} \left[-(t+2)e^{-t}\right]_0^1 = \pi \left[1 - \frac{3}{2} e^{-1}\right].$$