Come sappiamo, una <u>superficie regolare</u> è una funzione vettoriale $\underline{\sigma}: D \to \mathbb{R}^3$, ove $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è la chiusura di un aperto A di $\mathbb{R}^2$, tale che i due vettori $\underline{\sigma}_u(u,v)$ e $\underline{\sigma}_v(u,v)$ siano linearmente indipendenti (cioè non paralleli) in ogni punto $(u,v) \in D$. In tal caso, il piano tangente in un punto $\underline{\sigma}(u,v) \in \Sigma$ (ove $\Sigma = \underline{\sigma}(D)$) ha equazioni parametriche

$$\underline{x} = \underline{\sigma}(u,v) + s\,\underline{\sigma}_u(u,v) + t\,\underline{\sigma}_v(u,v), \quad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

Il vettore $\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v(u,v)$ è <u>normale</u> alla superficie Σ nel punto $\underline{\sigma}(u,v)$.

Area di una superficie

<u>Definizione</u> Se $\Sigma = \underline{\sigma}(D)$ è una superficie di classe C^1, la sua <u>area</u> è il numero

$$a(\Sigma) = \int_D |\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v|_3 \, du\, dv.$$

Si potrebbe giustificare euristicamente questa definizione, ma non ne vale la pena. Ci limiteremo a verificarne la correttezza in alcuni casi facili.

<u>Osservazione</u> Posto

$$E = |\underline{\sigma}_u|_3^2, \quad G = |\underline{\sigma}_v|_3^2, \quad F = \langle \underline{\sigma}_u, \underline{\sigma}_v \rangle_3,$$

si ha

$$|\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v|_3^2 = EG - F^2.$$

(I numeri E, G, F sono spesso più facili da calcolare rispetto alla quantità $|\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v|_3$.)

Infatti si ha

$$|\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v|_3^2 = |\underline{\sigma}_u|_3^2 \, |\underline{\sigma}_v|_3^2 \sin^2\theta = |\underline{\sigma}_u|_3^2 \, |\underline{\sigma}_v|_3^2 (1 - \cos^2\theta) =$$

$$= |\underline{\sigma}_u|_3^2 \, |\underline{\sigma}_v|_3^2 - |\underline{\sigma}_u|_3^2 \, |\underline{\sigma}_v|_3^2 \cos^2\theta =$$

$$= |\underline{\sigma}_u|_3^2 \, |\underline{\sigma}_v|_3^2 - \langle \underline{\sigma}_u, \underline{\sigma}_v \rangle_3^2 = EG - F^2.$$

La formula dell'area

$$a(\Sigma) = \int_D |\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v|_3 \, du\,dv = \int_D \sqrt{EG - F^2} \, du\,dv$$

si specializza in situazioni particolari.

(A) <u>Superfici cartesiane</u>: sono i grafici di funzioni di 2 variabili: se $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è di classe C^1, la superficie è

$$\underline{\sigma} : \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases} \qquad (x,y) \in A,$$

e si ha

$$E = 1 + f_x^2, \quad G = 1 + f_y^2, \quad F = f_x f_y,$$

da cui

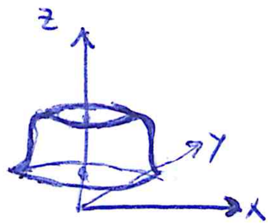
$$EG - F^2 = (1+f_x^2)(1+f_y^2) - f_x^2 f_y^2 =$$
$$= 1 + f_x^2 + f_y^2 = 1 + |\nabla f|_2^2 .$$

Perciò l'area di una superficie cartesiana Σ è

$$a(\Sigma) = \int_A \sqrt{1 + |\nabla f|_2^2}\, dx\, dy .$$

(B) <u>Superfici di rotazione</u>: se Γ è una curva regolare del piano xz, contenuta nel semipiano $x > 0$,

$$\Gamma = \{ x = \gamma_1(t),\ z = \gamma_2(t),\ t \in [a,b] \}$$



allora ruotando Γ intorno all'asse z si ottiene la <u>superficie di rotazione</u>

$$\Sigma = \begin{cases} x = \gamma_1(t)\cos\vartheta \\ y = \gamma_1(t)\sin\vartheta \\ z = \gamma_2(t) \end{cases} \qquad t \in [a,b],\ \vartheta \in [0, 2\pi] .$$

che è regolare: infatti

$$E = \gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2, \quad G = \gamma_1(t)^2, \quad F = 0,$$

e dunque

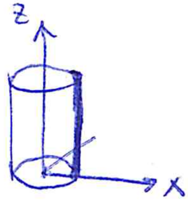
$$\sqrt{EG-F^2} = \gamma_1\sqrt{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\,.$$

Perciò l'area è

$$a(\Sigma) = 2\pi\int_a^b \gamma_1(t)\,|\underline{\gamma}(t)|_2\,dt = \int_\Gamma 2\pi x\,ds\,;$$

in pratica stiamo integrando lungo Γ la lunghezza della circonferenza descritta nella rotazione dei punti di Γ.

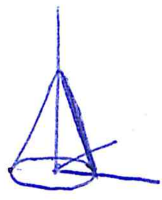
<u>Esempi</u>



- Il <u>cilindro</u> di altezza h e raggio r si ottiene dalla rotazione del segmento S di estremi $(r,0)$ e (r,h) del piano xz attorno all'asse z. Le equazioni di questo segmento sono $\begin{cases} x = r \\ z = th \end{cases}$, $0 \le t \le 1$.

  si ha $\sqrt{x'^2+z'^2} = h$, quindi la superficie laterale del cilindro ha area

$$a(\Sigma) = \int_S 2\pi x\,ds = \int_0^1 2\pi rh\,dt = 2\pi rh\,.$$



- Il cono retto di base il disco di raggio r e altezza h si ottiene ruotando il segmento S di estremi $(r,0)$ e $(0,h)$ del piano xz attorno all'asse z. Si ha

$$S:\ \begin{cases} x = (1-t)r \\ z = th \end{cases},\quad 0 \le t \le 1\,,$$

e dunque la superficie laterale del cono ha area

$$a(\Sigma) = 2\pi\int_S x\,ds = 2\pi\int_0^1 r(1-t)\sqrt{r^2+h^2}\,dt = \pi r\sqrt{r^2+h^2}\,.$$

• la sfera di raggio r si ottiene ruotando la semicirconferenza $\Gamma: \{x = r\cos\theta,\ z = r\sin\theta,\ \theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ attorno all'asse z. Si ha $x' = -r\sin\theta,\ z' = r\cos\theta$, $\sqrt{x'^2+y'^2} = r$, e dunque la superficie della sfera ha area

$$a(\Sigma) = 2\pi\int_\Gamma x\, ds = 2\pi\int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\cos\theta\cdot r\, d\theta = 4\pi r^2.$$

Vediamo due altri esempi più "complicati".

1. Sia Σ l'elica "piena"

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = 2\theta \end{cases} \qquad 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

Si ha $E = 1$, $G = r^2+4$, $F = 0$. Quindi

$$a(\Sigma) = \int_0^1\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+4}\, d\theta\, dr = 2\pi\int_0^1\sqrt{4+r^2}\, dr = 4\pi\int_0^1\sqrt{1+\frac{r^2}{4}}\, dr =$$

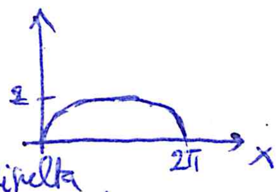
$$= 8\pi\int_0^{1/2}\sqrt{1+s^2}\, ds = 8\pi\left[\frac{1}{2}s\sqrt{1+s^2}+\frac{1}{2}\ln\left(s+\sqrt{1+s^2}\right)\right]_0^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \pi\sqrt{5} + 4\pi\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

2. Sia Σ la superficie ottenuta ruotando la cicloide

$$\Gamma = \{x = t-\sin t,\ y = 1-\cos t,\ 0\le t\le 2\pi\}$$

attorno all'asse x (non z).



Si ha dunque una specie di palla ovale. Risulta, visto che il raggio della rotazione è y,

$$a(\Sigma) = 2\pi \int_\Gamma y \, ds = 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t) \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} \, dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{2\pi} (1-\cos t)\sqrt{2-2\cos t} \, dt = 2\pi\sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^{3/2} dt =$$

$$= 2\pi\sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right)^{3/2} dt = 16\pi \int_0^{\pi} \sin^3 s \, ds =$$

$$= 16\pi \int_0^{\pi} \sin s (1-\cos^2 s) \, ds = 16\pi \int_{-1}^{1} (1-t^2) dt = 32\pi \int_0^1 (1-t^2) dt =$$

$$= 32\pi \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{64}{3}\pi .$$

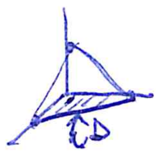
Integrali superficiali di funzioni

Definizione Sia $\Sigma = \underline{\sigma}(D)$ una superficie di classe C^1. Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua, con A aperto contenente Σ. L'integrale superficiale di f su Σ è

$$\int_\Sigma f \, d\sigma = \int_D f(\underline{\sigma}(u,v)) \, |\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v(u,v)|_3 \, du \, dv .$$

Esempi (1) Calcoliamo $\int_\Sigma x^2 y \, d\sigma$, ove Σ è il triangolo di vertici $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Si tratta di una superficie piana,

$$\Sigma = \begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = 1-x-y , \end{cases} \qquad (x,y) \in D = \{(x,y) : 0 \le y \le 1-x\}.$$



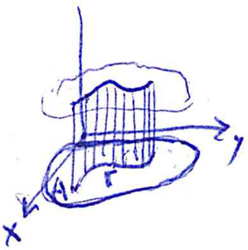
Quindi

$$\int_\Sigma x^2 y \, d\sigma = \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y \sqrt{1 + |\nabla(1-x-y)|_2^2} \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y \sqrt{3}\, dx\, dy = \sqrt{3} \int_0^1 x^2 \frac{(1-x)^2}{2} dx =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\, dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{4} + \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{60} .$$

(2) Sia $\Gamma = \underline{\gamma}(I)$ una curva di classe C^1 del piano xy, sia f una funzione non negativa continua, definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ contenente Γ. Sia Σ la superficie



$$\Sigma : \begin{cases} x = \gamma_1(t) \\ y = \gamma_2(t) \\ z = z \end{cases} \qquad t \in I,\ 0 \leq z \leq f(\underline{\gamma}(t)) ;$$

essa rappresenta una "tenda" verticale, dall'altezza 0 fino alla parte del grafico di f che sta sopra Γ. Poiché

$$E = \gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 = |\underline{\gamma}'(t)|_2^2$$

$$G = 1,$$

$$F = 0,$$

si ha

$$a(\Sigma) = \int_I \int_0^{f(\underline{\gamma}(t))} \sqrt{EG - F^2}\, dz\, dt = \int_I f(\underline{\gamma}(t))\, |\underline{\gamma}'(t)|_2\, dt =$$

$$= \int_\Gamma f\, ds .$$

Dunque, per $f \geq 0$, l'integrale curvilineo $\int f ds$ misura l'area del sottografico curvilineo della restrizione di f a Γ.

Baricentro e momento d'inerzia

Definizione Il baricentro di un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}^3$ è il punto di $\mathbb{R}^3$ di coordinate

$$\left(\frac{1}{m_3(E)}\int_E x\,dxdydz,\ \frac{1}{m_3(E)}\int_E y\,dxdydz,\ \frac{1}{m_3(E)}\int_E z\,dxdydz\right);$$

il momento d'inerzia di E rispetto a un punto, una retta o un piano è

$$\int_E d(\underline{x})^2 d\underline{x}\ ,\quad d(\underline{x}) = \text{distanza di } \underline{x} \text{ dal punto, dalla retta o dal piano.}$$

La stessa definizione vale se l'insieme E è sostituito da una superficie Σ o da una curva Γ; in tal caso gli integrali fatti su E vanno sostituiti da integrali superficiali fatti su Σ o da integrali curvilinei fatti su Γ, e $m_3(E)$ diventa $a(\Sigma)$ o $\ell(\Gamma)$.

Esempio Calcoliamo il momento d'inerzia della superficie

$$\Sigma = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\le 1,\ z=xy\}$$

rispetto all'asse z. Si ha

$$d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2};$$

poi, essendo Σ una superficie cartesiana relativa a $f(x,y)=xy$, si ha $\nabla f(x,y) = (y,x)$, e dunque, posto $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$, troviamo, usando le coordinate polari,

$$\int_\Sigma d(x,y,z)^2 d\sigma = \int_B (x^2+y^2)\sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = 2\pi\int_0^1 r^2\sqrt{1+r^2}\,r\,dr =$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^3 \sqrt{1+r^2}\, dr = \qquad [t = r^2]$$

$$= \pi \int_0^1 t\sqrt{1+t}\, dt = \pi \int_0^1 \left((t+1)\sqrt{1+t} - \sqrt{1+t}\right) dt =$$

$$= \pi \int_0^1 \left[(t+1)^{3/2} - (t+1)^{1/2}\right] dt = \pi \left[\frac{2}{5}(t+1)^{5/2} - \frac{2}{3}(t+1)^{3/2}\right]_0^1 =$$

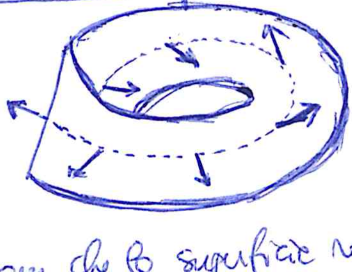
$$= 2\pi \left[\frac{2^{5/2}-1}{5} - \frac{2^{3/2}-1}{3}\right].$$

Volendo poi calcolare il baricentro di Σ, per motivi di simmetria della funzione si trova $(0,0,0)$ (provare per credere!).

Orientazione di una superficie in $\mathbb{R}^3$

Possiamo orientare una superficie regolare $\Sigma = \underline{\sigma}(D)$ mediante il versore normale $\underline{n}$, scegliendone un verso. Ad esempio, se Σ è una sfera, il versore $\underline{n}$ può essere diretto verso l'esterno della sfera oppure verso l'interno.

Tuttavia ciò non è sempre possibile: il nastro di Möbius è una superficie non orientabile globalmente, perché ha una sola faccia



Supponiamo dunque che la superficie regolare $\Sigma = \underline{\sigma}(D)$ sia orientabile. Sia poi $\underline{F}: A \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale continuo, definito in un aperto A contenente Σ.

Definizione Il flusso del campo $\underline{F}$ attraverso Σ è l'integrale superficiale
$$\int_{\Sigma} \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma .$$

Il termine "flusso" viene dalla fisica, quando F è un campo elettrico, o magnetico, oppure è la velocità di un fluido.

Si noti che, così come accade per il lavoro di un campo lungo una curva, il flusso attraverso una superficie dipende dall'orientazione di essa, a causa della presenza del versore normale $\underline{n}$. Si scrive quindi
$$\int_{+\Sigma} \langle F, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma ,$$
avendo prefissato un'orientazione di Σ. Scrivendo $\int_{-\Sigma} \langle F, \underline{n} \rangle_3 d\sigma$, si intende l'orientazione opposta, cosicché
$$\int_{-\Sigma} \langle F, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = -\int_{+\Sigma} \langle F, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma .$$

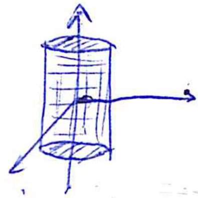
Poiché
$$\underline{n} = \frac{\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v}{|\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v|_3} ,$$
risulta
$$\int_{+\Sigma} \langle F, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \int_{D} \langle \underline{F}(\underline{\sigma}(u,v)), \underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v \rangle_3 \, du\, dv ,$$
perché il fattore $|\underline{\sigma}_u \times \underline{\sigma}_v|_3$ si semplifica.

Quando la superficie è chiusa, come nel caso di una sfera o di un toro, si parla di flusso uscente o entrante a seconda che il versore normale $\underline{n}$ sia esterno o interno.

<u>Esempio</u> Calcoliamo il flusso del campo $\underline{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ uscente dalla superficie chiusa (cilindro tappato)

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2=a^2, |z| \le h\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le a^2, |z|=h\}.$$

Si tratta di una superficie regolare a tratti,



$\Sigma = \bigcup_{j=1}^{3} \Sigma_j$, ove:

$$\Sigma_1 : \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \le \theta \le 2\pi \\ -h \le z \le h \end{array}, \qquad \Sigma_2 : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = h \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array},$$

$$\Sigma_3 : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = -h \end{cases} \quad \begin{array}{l} 0 \le r \le a \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array}.$$

Su Σ_1 si ha $D\underline{\sigma} = \begin{pmatrix} -a\sin\theta & 0 \\ a\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underline{\sigma_\theta} \times \underline{\sigma_z} = \begin{pmatrix} a\cos\theta \\ a\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$ (uscente);

Su Σ_2 si ha $D\sigma = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\sigma_r} \times \underline{\sigma_\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ (uscente)

Su Σ_3 si ha $D\sigma = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\underline{\sigma_r} \times \underline{\sigma_\theta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$ (entrante).

Quindi

$$\int_\Sigma \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma = \int_{\Sigma_1} \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma + \int_{\Sigma_2} \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma - \int_{\Sigma_3} \langle \underline{F}, \underline{n} \rangle_3 \, d\sigma =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_{-h}^{h} (a^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta) \, dz \, d\theta + \int_0^a \int_0^{2\pi} r h \, d\theta \, dr - \int_0^a \int_0^{2\pi} r(-h) \, d\theta \, dr =$$

$$= 2h a^2 \pi + 2h a^2 \pi + 2\pi h \frac{a^2}{2} + 2\pi h \frac{a^2}{2} = 6\pi h a^2.$$