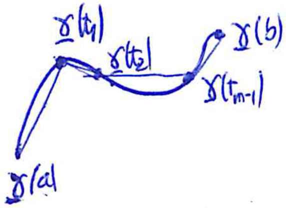
Abbiamo visto che una curva regolare $\underline{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^N$ è una funzione vettoriale di classe C^1, con $\underline{\gamma}'(t)\neq\underline{0}$ per ogni $t\in[a,b]$; il vettore $\underline{\gamma}'(t)$ è tangente all'immagine Γ della curva, nel punto $\underline{\gamma}(t)$.

Vogliamo misurare la <u>lunghezza</u> della curva. Si tenta di



approssimarla per mezzo di spezzate, fissando una <u>suddivisione</u> $\sigma=\{a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b\}$ di $[a,b]$, e considerando la lunghezza della spezzata di vertici $\underline{\gamma}(t_i)$, $0\le i\le m$:

$$\ell(\sigma)=\sum_{k=1}^{m}|\underline{\gamma}(t_k)-\underline{\gamma}(t_{k-1})|_N$$

Chiaramente, questa è una approssimazione <u>per difetto</u>. Quindi:

<u>Definizione</u> La lunghezza di Γ è il numero (eventualmente infinito)

$$\ell(\Gamma)=\sup_{\sigma}\ell(\sigma):$$

dunque si fa l'estremo superiore delle lunghezze di tutte le possibili spezzate.

Ma come si fa il calcolo effettivo?

Teorema Sia $\underline{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{R}^N$ una curva di classe C^1 e sia $\Gamma=\underline{\gamma}([a,b])$. Allora la lunghezza di Γ è data da

$$\ell(\Gamma)=\int_a^b |\underline{\gamma}'(t)|_N\,dt\,.$$

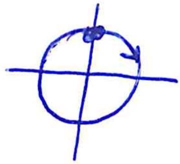
Se interpretiamo il parametro t come tempo, e $\underline{\gamma}(t)$ come la traiettoria percorsa da un punto materiale, allora $|\underline{\gamma}'(t)|_N$ è la velocità (in modulo), e si sa che velocità per tempo fa lo spazio percorso, quindi la lunghezza del tracciato.

Esempi (1) Se $\underline{\gamma}(t)=(\cos t,\sin t)$, $0\le t\le 2\pi$, allora Γ è la circonferenza unitaria e, come è giusto,

$$\ell(\Gamma)=\int_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{1}\,dt=2\pi\,.$$

Se consideriamo la stessa curva con $0\le t\le 4\pi$, la circonferenza viene percorsa 2 volte e infatti $\ell(\Gamma)=4\pi$. Se giriamo nel verso opposto, cioè

$$\underline{\gamma}(t)=(\sin t,\cos t),\quad 0\le t\le 2\pi,$$



la lunghezza è sempre 2π.

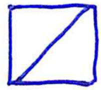
(2) Se $\underline{\gamma}$ è una curva cartesiana, cioè $\underline{\gamma}(t)=(t,f(t))$, con $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ di classe C^1, allora

$$\ell(\Gamma)=\int_a^b\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$$

In particolare:

- $f(x)=x,\quad x\in[0,1] \Longrightarrow \ell(\Gamma)=\int_0^1 \sqrt{1+1}\,dt=\sqrt{2}$,

  come è giusto;



- $f(x)=x^2,\quad x\in[0,1], \Longrightarrow \ell(\Gamma)=\int_0^1\sqrt{1+4x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^2\sqrt{1+t^2}\,dt.$

Poiché

$$\int_0^2\sqrt{1+t^2}\,dt=\left[t\sqrt{1+t^2}\right]_0^2-\int_0^2\frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt=$$

$$=\left[t\sqrt{1+t^2}\right]_0^2-\int_0^2\sqrt{1+t^2}\,dt-\int_0^2\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt,$$

si ottiene

$$2\int_0^2\sqrt{1+t^2}\,dt=\left[t\sqrt{1+t^2}-\ln\left(t+\sqrt{1+t^2}\right)\right]_0^2=2\sqrt{5}-\ln\left(2+\sqrt{5}\right),$$

e quindi

$$\ell(\Gamma)=\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{4}\ln\left(2+\sqrt{5}\right).$$

(3) Se Γ è parametrizzata in coordinate polari:

$$\Gamma=\{r=g(\theta),\ a\le\theta\le b\},$$

allora $x=g(\theta)\cos\theta$, $y=g(\theta)\sin\theta$, da cui

$$x'=g'(\theta)\cos\theta-g(\theta)\sin\theta,\quad y'=g'(\theta)\sin\theta+g(\theta)\cos\theta,$$

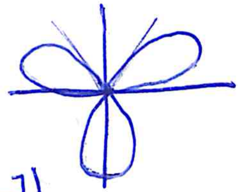
$$\sqrt{x'^2+y'^2}=\sqrt{g'(\theta)^2+g(\theta)^2},$$

e dunque

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{g(\theta)^2 + g'(\theta)^2}\, d\theta.$$

Ad esempio:

- $r = \sin 3\theta$ (rosa a tre petali)



(qui θ varia solo negli intervalli in cui $\sin 3\theta \geq 0$, ossia $[0, \frac{\pi}{3}]$, $[\frac{2}{3}\pi, \pi]$, $[\frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi]$).

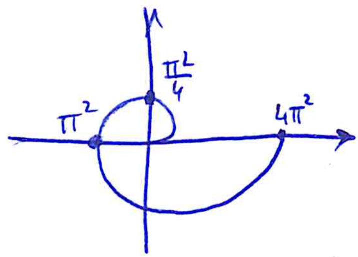
Si ha

$$\ell(\Gamma) = 3\ell(\Gamma_1), \quad \Gamma_1 = \{r = \sin 3\theta,\ 0 \leq \theta \leq \tfrac{\pi}{3}\};$$

si trova

$$\ell(\Gamma) = 3\int_0^{\pi/3} \sqrt{\sin^2 3\theta + 9\cos^2 3\theta}\, d\theta,$$ calcolo impossibile!

- $r = \theta^2$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$:



$$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2}\, d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \theta\sqrt{4+\theta^2}\, d\theta = [\theta^2 = t]$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{4\pi^2} \sqrt{4+t}\, dt = \frac{1}{3}\left[(4+t)^{3/2}\right]_0^{4\pi} = \frac{(4+4\pi^2)^{3/2}}{3}.$$

Integrale di una funzione lungo una curva

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione continua definita sull'aperto A.
Sia poi $\underline{\gamma}: I \to \mathbb{R}^N$ una curva di classe C^1, con $\Gamma = \underline{\gamma}(I) \subset A$.

<u>Definizione</u> L'integrale curvilineo di f lungo Γ è il numero

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_\Gamma f(\underline{\gamma}(t))\,|\underline{\gamma}'(t)|_N\,dt.$$

Valgono le usuali proprietà degli integrali (linearità, monotonia), in particolare

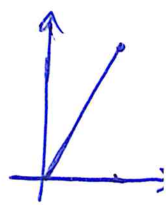
$$\left|\int_\Gamma f\,ds\right| \le \int_\Gamma |f|\,ds,$$

$$\int_\Gamma 1\,ds = \ell(\Gamma),$$

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_{\Gamma_1} f\,ds + \int_{\Gamma_2} f\,ds \quad \text{se } \Gamma = \Gamma_1 \vee \Gamma_2$$

<u>Esempi</u>

- $\int_\Gamma e^{x-y}\,ds$, $\quad \Gamma =$ segmento da $(0,0)$ a $(2,4)$



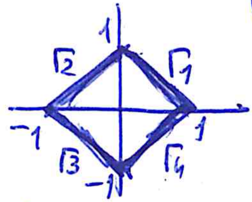
si ha $\Gamma = \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \end{cases}$, $0 \le t \le 1$, da cui

$$\underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \end{pmatrix}, \quad \underline{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

e dunque

$$\int_\Gamma e^{x-y}\,ds = \int_0^1 e^{-2t}\sqrt{4+16}\,dt = \sqrt{20}\int_0^1 e^{-2t}\,dt = \sqrt{5}\,(1-e^{-2}).$$

• $\int_\Gamma (x^2-y^4)\,ds$, $\quad \Gamma=\{(x,y): |x|+|y|=1\}$.



Si ha $\Gamma=\Gamma_1\vee\Gamma_2\vee\Gamma_3\vee\Gamma_4$, ove

$\Gamma_1=\{(x,y): y=1-x,\ x\in[0,1]\}$, $\quad \underline{\gamma}_1(x)=\begin{pmatrix}x\\1-x\end{pmatrix}$, $\quad |\underline{\gamma}_1'(x)|_2=\sqrt{2}$,

$\Gamma_2=\{(x,y): y=1+x,\ x\in[-1,0]\}$, $\quad \underline{\gamma}_2(x)=\begin{pmatrix}x\\1+x\end{pmatrix}$, $\quad |\underline{\gamma}_2'(x)|_2=\sqrt{2}$,

$\Gamma_3=\{(x,y): y=-1-x,\ x\in[-1,0]\}$, $\quad \underline{\gamma}_3(x)=\begin{pmatrix}x\\-1-x\end{pmatrix}$, $\quad |\underline{\gamma}_3'(x)|_2=\sqrt{2}$,

$\Gamma_4=\{(x,y): y=-1+x,\ x\in[0,1]\}$, $\quad \underline{\gamma}_4(x)=\begin{pmatrix}x\\-1+x\end{pmatrix}$, $\quad |\underline{\gamma}_4'(x)|_2=\sqrt{2}$.

Quindi

$$\int_\Gamma (x^2-y^4)\,ds=\int_0^1\left(x^2-(1-x)^4\right)\sqrt{2}\,dx+\int_{-1}^0\left(x^2-(1+x)^4\right)\sqrt{2}\,dx+$$

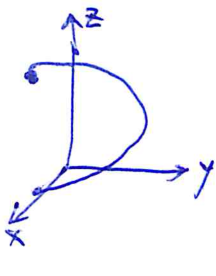
$$+\int_{-1}^0\left(x^2-(-1-x)^4\right)\sqrt{2}\,dx+\int_0^1\left(x^2-(-1+x)^4\right)\sqrt{2}\,dx=$$

$$=2\int_0^1\left(x^2-(1-x)^4\right)\sqrt{2}\,dx+2\int_0^1\left(x^2-(1+x)^2\right)\sqrt{2}\,dx=$$

(con la sostituzione $t=-x$ nel 1° integrale)

$$=4\int_0^1\left[x^2-(1-x)^4\right]\sqrt{2}\,dx=4\sqrt{2}\left[\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)^5}{5}\right]_0^1=$$

$$=\frac{8\sqrt{2}}{15}.$$



• $\int_\Gamma z\,ds$, $\quad \Gamma=\{(\cos t,\sin t,t): 0\le t\le 2\pi\}$

Si ha $\underline{\gamma}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\t\end{pmatrix}$, $\underline{\gamma}'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\\1\end{pmatrix}$ e $|\underline{\gamma}'(t)|_3=\sqrt{2}$; risulta

$$\int_\Gamma z\,ds=\int_0^{2\pi}t\sqrt{2}\,dt=2\sqrt{2}\pi^2.$$

Campi vettoriali

Un campo vettoriale su un aperto A di $\mathbb{R}^k$ è una funzione $\underline{u}: A \to \mathbb{R}^N$, $\underline{u}(\underline{x}) = (u_1(\underline{x}), \dots, u_N(\underline{x}))$ che si assume continua (e spesso di classe C^1 o C^2).

Si noti che una curva, in particolare, è un campo vettoriale definito su un intervallo uni-dimensionale.

Un campo vettoriale che ben conosciamo è il gradiente di una fissata funzione $f: A \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, di classe C^1:

$$\nabla f : A \longrightarrow \mathbb{R}^N, \quad \nabla f(\underline{x}) = (D_1 f(\underline{x}), \dots, D_N f(\underline{x})).$$

è un campo vettoriale continuo.

Lavoro di un campo vettoriale lungo una curva

Il termine "lavoro" è preso in prestito dalla fisica. Se $\Gamma = \underline{\gamma}(I)$ è una curva regolare, il versore tangente a Γ nel generico punto $\underline{\gamma}(t)$ è

$$\underline{\tau} = \frac{\underline{\gamma}'(t)}{|\underline{\gamma}'(t)|_N}.$$

Esso determina su Γ un' orientazione, ossia un verso di percorrenza legato alla parametrizzazione scelta. Possiamo sempre invertire tale verso, scegliendo la nuova parametrizzazione

$$\underline{\varphi}(t) = \underline{\gamma}(a+b-t), \quad t \in I = [a,b].$$

Infatti $\underline{\varphi}'(t) = -\underline{\gamma}'(t)$ e dunque il versore tangente associato a $\underline{\varphi}$ è l'opposto del precedente.

Ciò premesso, il lavoro del campo vettoriale $\underline{F}$ lungo la curva orientata Γ è

$$\int_\Gamma \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_N \, ds .$$

Esso è l'integrale curvilineo lungo Γ della funzione scalare

$$f(\underline{x}) = \langle \underline{F}(\underline{x}), \underline{\tau} \rangle_N .$$

Benché gli integrali curvilinei di funzioni siano <u>indipendenti</u> dall'orientazione della curva (infatti in essi compare $|\underline{\gamma}'(t)|_N$ e non $\underline{\gamma}'(t)$), al contrario il lavoro di un campo vettoriale <u>dipende</u> dall'orientazione di Γ, perché vi compare il versore tangente $\underline{\tau}$. Dunque è utile indicare tale dipendenza, scrivendo

$$\int_{+\Gamma} \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_N \, ds, \quad \int_{-\Gamma} \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_N \, ds,$$

indicando con $+\Gamma$ e $-\Gamma$ la curva Γ orientata nel verso concorde con $\underline{\tau}$ o nel verso opposto. Ovviamente si ha

$$\int_{-\Gamma} \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_N \, ds = -\int_{+\Gamma} \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_N \, ds .$$

Ai fini del calcolo esplicito, si noti che

$$\int_{+\Gamma} \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_N \, ds = \int_a^b \langle F(\underline{\gamma}(t)), \frac{\underline{\gamma}'(t)}{|\underline{\gamma}'(t)|_N} \rangle_N \, |\gamma'(t)|_N \, dt =$$

$$= \int_a^b \langle F(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle_N \, dt .$$

Quindi per calcolare questo tipo di integrali <u>non serve</u> determinare la norma del vettore $\underline{\gamma}'(t)$.

<u>Osservazione</u> Si usa spesso la notazione (qui descritta per $N=3$, ma valida anche per $N=2$)

$$\langle \underline{F}, \tau \rangle_N \, ds = F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz .$$

Il motivo è questo: essendo

$$\Gamma = \{ \underline{x} = \underline{\gamma}(t), t \in I \} = \{ (x,y,z) : x = \gamma_1(t), \; y = \gamma_2(t), \; z = \gamma_3(t), t \in I \},$$

risulta

$$\langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_3 \, ds = \langle \underline{F}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle_3 \, dt =$$

$$= F_1(\underline{\gamma}(t)) \, \gamma_1'(t) \, dt + F_2(\underline{\gamma}(t)) \, \gamma_2'(t) \, dt + F_3(\underline{\gamma}(t)) \, \gamma_3'(t) \, dt =$$

$$= F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz .$$

Perciò si può scrivere indifferentemente

$$\int_{+\Gamma} \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_3 \, ds \quad \text{oppure} \quad \int_{+\Gamma} (F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz)$$

per indicare il lavoro del campo $\underline{F}$ lungo la curva orientata Γ.

In definitiva, per calcolare un integrale del tipo

$$\int_{+\Gamma} (A\,dx + B\,dy + C\,dz)$$

occorre:

(a) parametrizzare Γ e verificare se l'orientazione della nostra parametrizzazione coincide con quella prefissata: nel caso che non coincida, premettere al calcolo un segno "$-$";

(b) posto $\underline{F} = (A, B, C)$, e detta $\underline{\gamma}(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$ la nostra parametrizzazione, calcolare

$$\int_I \langle \underline{F}(\underline{\gamma}(t)), \underline{\gamma}'(t) \rangle_3 \, dt = \int_I \left[A(\underline{\gamma}(t))\gamma_1'(t) + B(\underline{\gamma}(t))\gamma_2'(t) + C(\underline{\gamma}(t))\gamma_3'(t)\right] dt.$$

<u>Esempi</u>

- $\int_{+\Gamma} \langle F, \tau \rangle_2 \, ds$, $\quad \underline{F} = (xe^{xy}, ye^{-xy})$, Γ = segmento da $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.

Si ha $\Gamma = \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$, $0 \le t \le 1$, $\quad \underline{\gamma}(t) = \begin{pmatrix}t\\t\end{pmatrix}$, $\quad \underline{\gamma}'(t) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. Quindi, essendo l'orientazione coincidente con quella richiesta,

$$\int_{+\Gamma} \langle \underline{F}, \underline{\tau} \rangle_2 \, ds = \int_0^1 \left[t e^{t^2} \cdot 1 + t e^{-t^2} \cdot 1\right] dt = \frac{1}{2}\left[e^{t^2} - e^{-t^2}\right]_0^1 = \underline{\frac{e - e^{-1}}{2}}.$$

- Sia $\Gamma = \{(\cos t, \sin t, t), 0 \le t \le 2\pi\}$. Calcoliamo

$$\int_\Gamma x^2 y z \, ds, \qquad \int_{+\Gamma} \left(\frac{1}{y}\,dx + \frac{1}{x}\,dy + z\,dz\right).$$

Il 1° integrale è $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t \cdot t \sqrt{2}\, dt$ e si fa per parti:

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t \sin t \cdot t\, dt = -\frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi} t \cdot \frac{d}{dt}\cos^3 t\, dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{3}\left[t \cos^3 t\right]_0^{2\pi} + \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi}\cos^3 t\, dt =$$

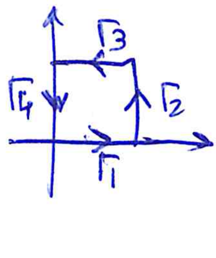
$$= -\frac{2\pi\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{2\pi}\cos t\,(1-\sin^2 t)\, dt = -\frac{2\pi\sqrt{2}}{3} + 0 = -\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}.$$

Il 2° integrale, essendo $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ e $\underline{\gamma}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$:

$$\int_{+\Gamma}\left(\frac{1}{y}dx + \frac{1}{x}dy + z\,dz\right) = \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{\sin t}\sin t + \frac{1}{\cos t}\cos t + t\, 1\right)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[-1+1+t\right]dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\pi^2.$$

- Sia $\underline{F}(x,y) = (3y, 2x)$ e sia Γ il bordo del quadrato $[0,1]\times[0,1]$, percorso in verso antiorario. Allora



$$\int_{+\Gamma}\langle \underline{F}, \underline{\tau}\rangle_2\, ds = \int_{+\Gamma}(3y\,dx + 2x\,dy) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4}\int_{+\Gamma_i}(3y\,dx + 2x\,dy) =$$

$$= \int_0^1 (0\cdot 1 + 2x\cdot 0)\,dx + \int_0^1 (3y\cdot 0 + 2\cdot 1)\,dy +$$

$$+ \int_0^1 (3\cdot(-1) + 2x\cdot 0)\,dx + \int_0^1 (3y\cdot 0 + 0\cdot(-1))\,dy = 0+2-3-0 = -1.$$