Cambiamento di variabili

Per gli integrali semplici vale la formula

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt = \int_c^d f(x)\,dx$$

se $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ è di classe C^1 e bigettiva (dunque φ è strettamente crescente o strettamente decrescente in $[a,b]$).

Infatti, se φ è strettamente crescente si ha $\varphi' = |\varphi'|$ e $\varphi(a) = c$, $\varphi(b) = d$, da cui

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt = \int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_c^d f(x)\,dx$$

mentre se φ è strettamente decrescente si ha $\varphi' = -|\varphi'|$ e $\varphi(a) = d$, $\varphi(b) = c$, da cui

$$\int_a^b f(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|\,dt = -\int_a^b f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = -\int_d^c f(x)\,dx = \int_c^d f(x)\,dx.$$

Anche in più variabili si può trasformare un integrale N-dimensionale con un cambiamento di variabili, ovviamente cercando di renderlo più semplice.

Teorema Sia $T:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ una funzione vettoriale. Poniamo $\underline{x} = T(\underline{u})$, $\underline{u} \in \mathbb{R}^N$. Se

(i) T è bigettiva da un aperto A ad un aperto B;

(ii) T è di classe C^1 (ossia le sue componenti $T_1, \dots, T_N$ sono di classe C^1);

(iii) La funzione $J_T(\underline{u}) = \det\{DT(\underline{u})\}$ è diversa da 0 in A,

allora per ogni $f: B \to \mathbb{R}$ integrabile si ha la formula

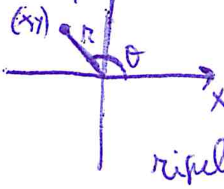
$$\int_B f(\underline{x})\, d\underline{x} = \int_A f(T(\underline{u}))\, |J_T(\underline{u})|\, d\underline{u}.$$

Osservazione: La formula vale anche quando $J_T(\underline{u}) = 0$ in un sottoinsieme $M \subset A$ di misura N-dimensionale nulla.

Naturalmente, applicheremo questa formula solo per $N=2$ o $N=3$.

Esempi fondamentali:

(1) Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$. Qui, $T(r,\theta) = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$, ovvero



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}, \qquad r \geq 0, \quad \theta \in [0, 2\pi];$$

risulta $J_T(r,\theta) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = r.$

La funzione T non è bigettiva da $[0,\infty[\times [0,2\pi]$ in $\mathbb{R}^2$, ma lo è da $]0,\infty[\times]0,2\pi[$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y): x \geq 0, y = 0\}$. Poiché

La semiretta $\{(x,y):\ x\geq 0,\ y=0\}$ ha misura 2-dimensionale nulla, vale la formula seguente: se $D=T(E)$, $E\subseteq[0,\infty[\times[0,2\pi]$,

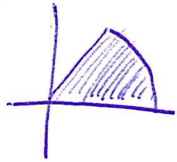
$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_E f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta .$$

Esempi

- $\displaystyle\int_A (3x^2-4y^2)\,dx\,dy$, $\quad A=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq y\leq\sqrt{3}\,x\}$;

si ha $A=T(B)$, ove $B=\{(r,\theta):\ r\leq 1,\ 0\leq \operatorname{tg}\theta\leq\sqrt{3}\}=$

$=\{(r,\theta):\ r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{3}\}$,



dunque

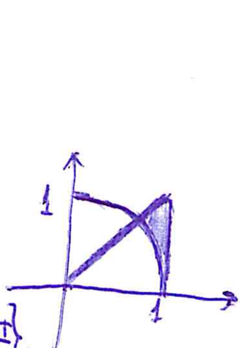
$$\int_A (3x^2-4y^2)\,dx\,dy=\int_B (3r^2\cos^2\theta-4r^2\sin^2\theta)\cdot r\,dr\,d\theta=$$

$$=3\int_0^1 r^3\,dr\cdot\int_0^{\pi/3}\cos^2\theta\,d\theta-4\int_0^1 r^3\,dr\int_0^{\pi/3}\sin^2\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{\theta+\sin\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{\pi/3}-\frac{4}{4}\left[\frac{\theta-\sin\theta\cos\theta}{2}\right]_0^{\pi/3}=$$

$$=\frac{3}{4}\left[\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{8}\right]-\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right]=-\frac{\pi}{24}+\frac{7}{32}\sqrt{3}.$$

- $\displaystyle\int_A xy\,dx\,dy$, $\quad A=\{(x,y):\ x^2+y^2\geq 1,\ 0\leq y\leq x\leq 1\}$;



si ha $A=T(B)$, dove

$B=\{(r,\theta):\ r\geq 1,\ 0\leq r\sin\theta\leq r\cos\theta\leq 1\}=\{(r,\theta):\ 1\leq r\leq\frac{1}{\cos\theta},\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\}$.

Dunque B è un insieme normale rispetto all'asse θ del piano $r\theta$.

Perciò

$$\int_A xy\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 \cos\theta \sin\theta \, r \, dr\right] d\theta =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \sin\theta \left(\int_1^{\frac{1}{\cos\theta}} r^3 \, dr\right) d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta \sin\theta \left[\frac{1}{\cos^4\theta} - 1\right] d\theta =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{\cos^3\theta} - \cos\theta\right] \sin\theta \, d\theta = [\cos\theta = t]$$

$$= -\frac{1}{4}\int_1^{1/\sqrt{2}} \left(\frac{1}{t^3} - t\right) dt = +\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \left(\frac{1}{t^3} - t\right) dt =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2t^2} - \frac{t^2}{2}\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 = \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] = \frac{1}{16}.$$

- $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx$. Come si calcola questo integrale semplice? Si ha

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \quad \text{(per parità dell' integrando)};$$

poi si osserva che

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{[0,\infty[\times[0,\infty[} e^{-x^2-y^2} dx\,dy.$$

Ma $[0,\infty[\times[0,\infty[= T(E)$, con $E = \{(r,\theta): r \geq 0, \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.

Quindi

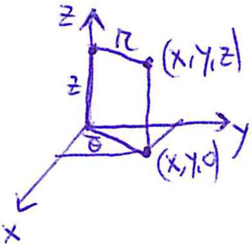
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r \, d\theta\right] dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr = \frac{\pi}{2}\left[\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4},$$

da cui infine

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

(2.) <u>Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$</u> Qui, $(x,y,z)=T(r,\theta,z)$, cioè

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z. \end{cases}$$



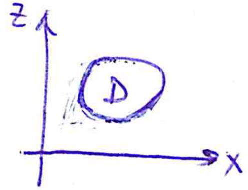
Si ha

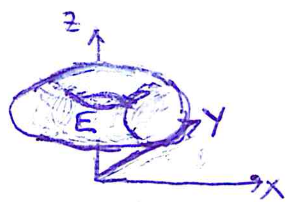
$$J_T(r,\theta,z) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r,$$

e la funzione T è bigettiva da $]0,\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : x\geq 0, y=0\}$, e il semipiano $\{(x,y,z): x\geq 0, y=0\}$ ha misura 3-dimensionale nulla. Perciò, se $D=T(E)$,

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_E f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dr\, d\theta\, dz.$$

<u>Esempio</u> Volume di un <u>solido di rotazione</u>: se D è un insieme misurabile del piano xz (cioè $y=0$), sia E il ruotato di D attorno all'asse z:





$$E = \{(x,y,z) : (\sqrt{x^2+y^2}, z) \in D\},$$

Infatti l'ascissa x del punto $(x,z)\in D$ diventa il raggio della rotazione che porta (x,z) in $(\sqrt{x^2+y^2}, z) \in E$.

Dunque, in coordinate cilindriche

$$E = T(F), \quad F = \{(r,\theta,z) : (r,z)\in D,\ 0\le\theta\le 2\pi\},$$

e pertanto il volume di E è

$$m_3(E) = \int_E 1\, dx\, dy\, dz = \int_F r\, dr\, d\theta\, dz = \int_D \int_0^{2\pi} r\, dr\, d\theta\, dz =$$

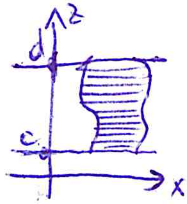
$$= \int_D 2\pi r\, dr\, dz = \int_D 2\pi x\, dx\, dz$$

Cioè si integra "per circonferenze" al variare di $(x,z)\in D$.

In particolare, se D è un insieme normale rispetto all'asse z,

$$D = \{(x,z) : z\in[c,d],\ \alpha(z)\le x\le \beta(z)\}, \quad \text{con } \beta\ge\alpha\ge 0,$$

allora



$$m_3(E) = \int_D 2\pi x\, dx\, dz = \int_c^d \int_{\alpha(z)}^{\beta(z)} 2\pi x\, dx\, dz =$$

$$= \int_c^d \left[\pi x^2\right]_{\alpha(z)}^{\beta(z)} dz = \int_c^d \left[\pi \beta(z)^2 - \pi\alpha(z)^2\right] dz,$$

cioè si integra per corone circolari orizzontali al variare di $z\in[c,d]$.

3. Coordinate polari o sferiche in $\mathbb{R}^3$

Qui si ha

$(x,y,z) = T(r,\theta,\varphi)$, ossia

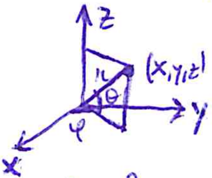
$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi \\ y = r\cos\theta\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

$r \geq 0$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (latitudine)

$\varphi \in [0, 2\pi]$ (longitudine).

Si ha

$$J_T(r,\theta,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix} =$$



$$= r^2\cos\theta.$$

La funzione T è bigettiva da $]0,\infty[\times]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\times]0,2\pi[$ in $\mathbb{R}^3\setminus\{(x,y,z): x\geq 0, y=0\}$, e il semipiano $\{(x,y,z): x\geq 0, y=0\}$ ha misura 3-dimensionale nulla. Perciò, se $D = T(E)$,

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_E f(r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)\, r^2\cos\theta \, dr\, d\theta\, d\varphi.$$

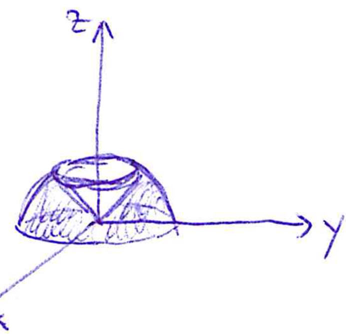
Esempi

- $\int_A (x^2+y^2+z^2)^2\,dx\,dy\,dz$, $A = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}$.

Si ha $A = T(E)$, ove

$E = \{(r,\theta,\varphi): r \leq 1,\ \sin\theta \leq \cos\theta\} =$

$= \{(r,\theta,\varphi): r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4},\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$,



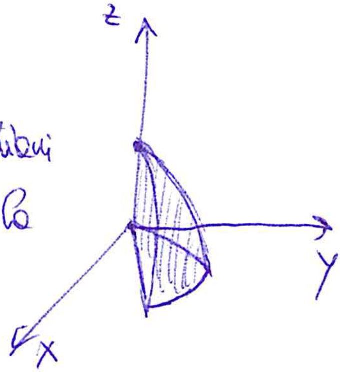
da cui

$$\int_A (x^2+y^2+z^2)^2\,dx\,dy\,dz = \int_E r^4 r^2 \cos\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/4} r^6 \cos\theta\, d\theta \right] d\varphi \right) dr = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta\, d\theta \int_0^1 r^6\, dr =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{7}\pi .$$

• $\int_E xyz\, e^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz$. E delimitato dalla sfera $x^2+y^2+z^2=1$, e dai piani $z=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y=\sqrt{3}\,x$.



Siamo quindi dentro la sfera, sopra il piano dell'equatore e compresi fra i meridiani $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$ e $y=\sqrt{3}\,x$. In coordinate sferiche si ha

$E=T(F)$, con

$$F=\left\{(r,\theta,\varphi):\ r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{6}\le\varphi\le\frac{\pi}{3}\right\}.$$

Perciò

$$\int_E xyz\, e^{-x^2-y^2-z^2}\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} r^5 e^{-r^2} \cos^3\theta \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi \right] d\theta \right] dr =$$

$$= \int_0^1 r^5 e^{-r^2} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \sin\theta \left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos\varphi \sin\varphi\, d\varphi \right] d\theta \right] dr = \left[r^2 = t \right]$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{2} t^2 e^{-t}\, dt \left[-\frac{\cos^4\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\sin^2\varphi}{2} \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= -\left[\frac{(t^2+2t+2)e^{-t}}{2} \right]_0^1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{32}\left[2 - \frac{5}{e} \right].$$