Integrali multipli

Come si sa, gli integrali 1-dimensionali sono aree con segno; analogamente, gli integrali doppi sono volumi con segno e quelli N-dimensionali sono volumi (N+1)-dimensionali con segno. Se $D \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, l'integrale $\int_D f(\underline{x})\,d\underline{x}$ misura il volume di E^+, meno il volume di E^-, ove

$$E^+ = \{(\underline{x}, z) \in \mathbb{R}^{N+1} : \underline{x} \in D,\ f(\underline{x}) \geq 0,\ 0 \leq z \leq f(\underline{x})\},$$

$$E^- = \{(\underline{x}, z) \in \mathbb{R}^{N+1} : \underline{x} \in D,\ f(\underline{x}) \leq 0,\ 0 \geq z \geq f(\underline{x})\}.$$

L'insieme di integrazione D deve essere un insieme misurabile, cioè il cui volume può essere misurato. Sono misurabili tutti gli aperti, tutti i chiusi, e tutto ciò che si ottiene da questi mediante unioni e intersezioni (finite o numerabili) e passaggi al complementare.

Prima di descrivere il calcolo degli integrali, elenchiamo le loro proprietà:

1) Se D ha misura nulla (area nulla o volume nullo, a seconda della dimensione N) allora $\int_D f(\underline{x})\,d\underline{x} = 0$.

2) $\int_D 1\,d\underline{x} = m_N(D) =$ misura N-dimensionale di D.

3) <u>linearità</u>: $\int_D [\lambda f(\underline{x}) + \mu g(\underline{x})] d\underline{x} = \lambda \int_D f(\underline{x}) d\underline{x} + \mu \int_D g(\underline{x}) d\underline{x}$,

per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

4) <u>monotonia</u>: se $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x})$ in D, allora $\int_D f(\underline{x}) d\underline{x} \leq \int_D g(\underline{x}) d\underline{x}$.

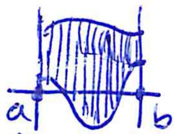
5) <u>additività</u>: se $D = D_1 \cup D_2$ con $D_1 \cap D_2 = \phi$, allora

$$\int_D f(\underline{x}) d\underline{x} = \int_{D_1} f(\underline{x}) d\underline{x} + \int_{D_2} f(\underline{x}) d\underline{x}.$$

Passiamo al <u>calcolo degli integrali</u>. Ci limiteremo a considerare insiemi D <u>normali</u>: in $\mathbb{R}^2$, ciò significa

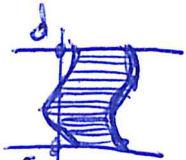
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \alpha(x) \leq y \leq \beta(x)\}$ con $\alpha, \beta \in C^0[a,b]$, $\alpha \leq \beta$

(insieme normale rispetto all'asse x), oppure



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \in [c,d],\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$, con $\gamma, \delta \in C^1[c,d]$, $\gamma \leq \delta$

(insieme normale rispetto all'asse y).



Le funzioni $f(\underline{x})$ da integrare saranno in generale funzioni <u>continue</u> su $\overline{D}$.

Il calcolo consiste in una doppia integrazione 1-dimensionale: se D è normale rispetto all'asse x, si ha

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, dy \right] dx,$$

dunque si integra dapprima lungo le singole fette verticali (con x fissato), e poi si integra facendo variare x. Così le fette verticali "spazzano" tutto D.

Se D è normale rispetto all'asse y, si ha invece

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x,y)\,dx \right] dy ,$$

cioè si integra per fette orizzontali.

Per gli <u>integrali tripli</u>, con D normale rispetto al piano xy,

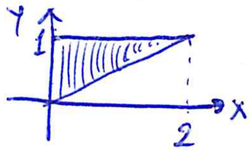
$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le x \le b,\ \alpha(x) \le y \le \beta(x),\ h(x,y) \le z \le k(x,y)\}$$

si avrà

$$\int_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \left[\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left[\int_{h(x,y)}^{k(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dy \right] dx .$$

<u>Esempi</u>

1. $\int_T (2xy+1)\,dx\,dy$, $T = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ \frac{x}{2} \le y \le 1\}$:

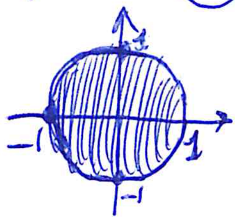


$$\int_T (2xy+1)\,dx\,dy = \int_T 2xy\,dx\,dy + \int_T 1\,dx\,dy =$$

$$= 2\int_0^2 x\left[\int_{\frac{x}{2}}^1 y\,dy\right]dx + \int_0^2 \left[\int_{\frac{x}{2}}^1 1\,dy\right]dx = 2\int_0^2 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^1 dx + \int_0^2 \left(1-\frac{x}{2}\right)dx =$$

$$= 2\int_0^2 \left[\frac{x}{2} - \frac{x^3}{8}\right]dx + 2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^2 = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16}\right]_0^2 + 2 - 1 = 2 - 1 + 2 - 1 = 2 .$$

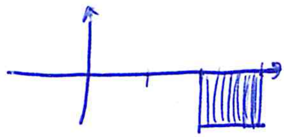
2. $\displaystyle\int_B \left(\sin x + y^3 + 4\right) dx\,dy$, $B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 ;\ x^2+y^2\le 1\}$.



Per simmetria, $\displaystyle\int_B \sin x \, dx\,dy = 0$; per la stessa ragione, $\displaystyle\int_B y^3\, dx\,dy = 0$. Invece

$$\int_B 4\, dx\,dy = 4\, m_2(B) = 4\pi .$$ L'integrale proposto quindi vale 4π.

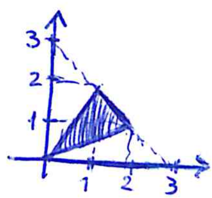
3. $\displaystyle\int_Q (3x+2y)\, dx\,dy$, $Q = [2,3]\times[-1,0]$:



$$\int_Q (3x+2y)\,dx\,dy = 3\int_2^3\int_{-1}^0 x\, dy\,dx + 2\int_2^3\int_{-1}^0 y\, dy\,dx =$$

$$= 3\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 \cdot 1 + 2\int_2^3 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-1}^0 dx = \frac{27}{2} - 6 - 1 = \frac{13}{2}.$$

4. $\displaystyle\int_T y\, dx\,dy$, T = triangolo di vertici $(0,0), (1,2), (2,1)$.



Conviene spezzare in 2 il triangolo T:

$T = T_1 \cup T_2$, ove

$T_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 0\le x\le 1,\ \frac{x}{2}\le y\le 2x\}$,

$T_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ 1\le x\le 2,\ \frac{x}{2}\le y\le 3-x\}$.

Si ha allora:

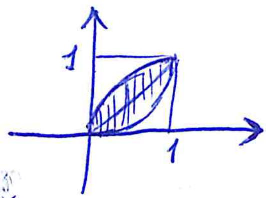
$$\int_T y\, dx\,dy = \int_{T_1} y\, dx + \int_{T_2} y\, dx = \int_0^1\left[\int_{\frac{x}{2}}^{2x} y\, dy\right]dx + \int_1^2\left[\int_{\frac{x}{2}}^{3-x} y\, dx\right]dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^{2x} dx + \int_1^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{\frac{x}{2}}^{3-x} dx =$$

$$= \int_0^1 \left(2x^2 - \frac{x^2}{8}\right) dx + \int_1^2 \left[\frac{(3-x)^2}{2} - \frac{x^2}{8}\right] dx =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{24} - \left[\frac{(3-x)^3}{6}\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{24}\right]_1^2 = \frac{2}{3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{6} + \frac{4}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{24} = \frac{3}{2}.$$

5. $\int_D xy^2\,dx\,dy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq x^2, \ x \geq y^2\}$.

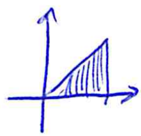


$$\int_D xy^2\,dx\,dy = \int_0^1 x \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y^2\,dy\,dx = \int_0^1 \frac{x}{3}\left(x^{3/2} - x^6\right) dx =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{3}\left[\frac{x^{7/2}}{\frac{7}{2}} - \frac{x^8}{8}\right]_0^1 dx = \frac{2}{21} - \frac{1}{24} = \frac{3}{56}.$$

6. $\int_T \frac{xy}{1+y^4}\,dx\,dy$, T = triangolo di vertici $(0,0),(1,1),(1,0)$.

$$\int_T \frac{xy}{1+y^4}\,dx\,dy = \int_0^1 x\left[\int_0^x \frac{y}{1+y^4}\,dy\right] dx$$



Nell'integrale interno, se poniamo $y^2 = t$, si ha $dt = 2y\,dy$, da cui

$$\int_0^x \frac{y}{1+y^4}\,dy = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,x^2.$$ Dunque

$$\int_T \frac{xy}{1+y^4}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,\mathrm{arctg}\,x^2\,dx,$$

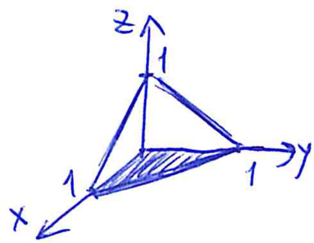
e con $x^2 = s$, da cui $ds = 2x\,dx$, si trova

$$\int_T \frac{xy}{1+y^4}\,dx\,dy = \int_0^1 \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\, s\,ds = \text{(integrando per parti)}$$

$$= \left[\frac{s}{4}\,\mathrm{arctg}\, s\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{s}{4\,(1+s^2)}\,ds = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{4}\left[\ln\sqrt{1+s^2}\,\right]_0^1 = \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}\ln 2.$$

7. Volume del tetraedro generato da $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Si ha $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x,$
$0 \le z \le 1-x-y\}$,



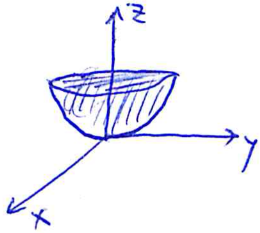
e quindi

$$m_3(T) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dy\,dx =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{(1-x-y)^2}{2}\right]_0^{1-x} dx = \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}\,dx = \left[-\frac{(1-x)^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

8. Volume delimitato dal paraboloide $z = x^2+y^2$ e dal piano $z=1$.

Si ha $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -1 \le x \le 1,$
$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ x^2+y^2 \le z \le 1\}$.



Dunque

$$m_3(H) = \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left(\int_{x^2+y^2}^1 1\,dz\right) dy\right] dx =$$

$$= \int_{-1}^1 \left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-x^2-y^2)\,dy\right] dx = \int_{-1}^1 \left[(1-x^2)y - \frac{y^3}{3}\right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[2(1-x^2)^{3/2} - 2\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3} \right] dx = \frac{4}{3} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{3/2} dx =$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^1 (1-x^2)^{3/2} dx = \left[x = \sin t, \quad dx = \cos t \, dt \right]$$

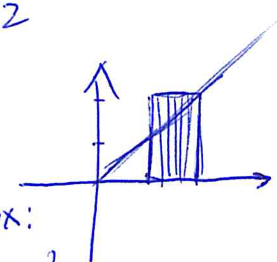
$$= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 t \, dt = \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \, (1 - \sin^2 t) \, dt =$$

$$= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt - \frac{2}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t \, dt =$$

$$= \frac{8}{3} \left[\frac{t + \sin t \cos t}{2} \right]_0^{\pi/2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin^2 u \, du =$$

$$\frac{8}{3} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \left[\frac{u - \sin u \cos u}{2} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$

9. $\int_R |x-y| \, dx \, dy, \quad R = [1,2] \times [0,2]$



Occorre distinguere dove $y \le x$ e dove $y \ge x$:

$$|x-y| = \begin{cases} x - y & \text{su } R_1 = \{(x,y) \in R : 0 \le y \le x\} \\ y - x & \text{su } R_2 = \{(x,y) \in R : x \le y \le 2\} \end{cases}$$

Allora

$$\int_R |x-y| \, dx \, dy = \int_{R_1} (x-y) \, dx \, dy + \int_{R_2} (y-x) \, dx \, dy =$$

$$= \int_1^2 \left[\int_0^x (x-y) \, dy + \int_x^2 (y-x) \, dy \right] dx =$$

$$= \int_1^2 \left(\left[-\frac{(x-y)^2}{2} \right]_0^x + \left[\frac{(y-x)^2}{2} \right]_x^2 \right) dx = \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{(2-x)^2}{2} \right] dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{(2-x)^3}{6} \right]_1^2 = \frac{4}{3}.$$

10. $\int_Q e^{-(x+1)y}\,dx\,dy$, $\quad Q=[0,1]\times[0,\infty[$:

$$\int_Q e^{-(x+1)y}\,dx\,dy=\int_0^1\left[\int_0^\infty e^{-(x+1)y}\,dy\right]dx=$$

$$=\int_0^1\left[\frac{-e^{-(x+1)y}}{x+1}\right]_0^\infty dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}\,dx=\left[\ln(x+1)\right]_0^1=\ln 2.$$

NB. Se avessimo richiesto di calcolare $\int_{Q'} e^{-(x+1)y}\,dx\,dy$,

con $Q'=[0,\infty[\times[0,\infty[$, avremmo trovato analogamente

$$\int_{Q'} e^{-(x+1)y}\,dx\,dy=\int_0^\infty\frac{1}{x+1}\,dx=\left[\ln(x+1)\right]_0^\infty=+\infty.$$

Niente di male: l'integrale esiste ancora, ma è divergente anziché convergente.

Gli integrali che non esistono sono quelli che, calcolati, danno luogo ad espressioni della forma $+\infty-\infty$, che non ha senso. Ad esempio,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\operatorname{tg}x\,dx=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\sin x}{\cos x}\,dx=\left[-\ln|\cos x|\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=-\infty-(-\infty)=$$

$=-\infty+\infty$, impossibile,

e questo integrale non esiste.