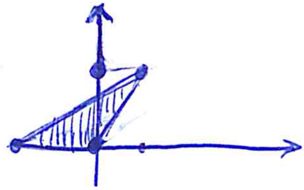
Ancora esercizi su massimi e minimi, presi da vecchie prove scritte.

1) Determinare il massimo ed il minimo di
$$f(x,y) = x^2 - 3y^2 - 4xy + x$$
nel triangolo T di vertici $(0,0)$, $(-1,0)$, $(\frac{1}{2},1)$.



Risoluzione. Cerchiamo i punti stazionari interni:
$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2x - 4y + 1 = 0 \\ f_y(x,y) = -6y - 4x = 0 \end{cases} \iff (x,y) = \left(-\frac{3}{14}, \frac{1}{7}\right) \text{ (è interno)},$$
e si ha
$$f\left(-\frac{3}{14}, \frac{1}{7}\right) = -\frac{57}{196} \simeq -0.2908 .$$
Vediamo cosa succede sul bordo. Nei vertici risulta
$$f(0,0) = 0, \quad f(-1,0) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2},1\right) = -\frac{17}{4} = -4.25 .$$
Consideriamo i tre lati: quello orizzontale è $\{(x,0) : -1 < x < 0\}$ e si ha
$$f(x,0) = x^2 + x, \quad \frac{d}{dx} f(x,0) = 2x + 1 = 0 \iff x = -\frac{1}{2} .$$
Nel punto stazionario vincolato $(-\frac{1}{2}, 0)$ si ha
$$f\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = -\frac{1}{4} = -0.25 .$$
Nel lato che unisce $(0,0)$ a $(\frac{1}{2},1)$, che è $\{(x,2x) ; 0 < x < \frac{1}{2}\}$, si ha
$$f(x,2x) = -19x^2 + x, \quad \frac{d}{dx} f(x,2x) = -38x + 1 = 0 \iff x = \frac{1}{38} .$$

Si ha così il punto stazionario vincolato $\left(\frac{1}{38}, \frac{1}{19}\right)$, nel quale

$$f\left(\frac{1}{38}, \frac{1}{19}\right) = \frac{1}{1444} - \frac{12}{1444} - \frac{8}{1444} + \frac{1}{38} = \frac{1}{76} \simeq 0.013579.$$

Infine, nel lato che unisce $(-1,0)$ a $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, che è $\left\{\left(x, \frac{2}{3}(x+1)\right) : -1 < x < \frac{1}{2}\right\}$, si ha

$$f\left(x, \frac{2}{3}(x+1)\right) = -3x^2 - \frac{13}{3}x - \frac{4}{3};$$

$$\frac{d}{dx} f\left(x, \frac{2}{3}(x+1)\right) = -6x - \frac{13}{3} = 0 \iff x = -\frac{13}{18},$$

e nel punto stazionario vincolato $\left(-\frac{13}{18}, \frac{5}{27}\right)$ si ha

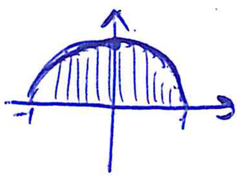
$$f\left(-\frac{13}{18}, \frac{5}{27}\right) = \frac{169}{324} - \frac{75}{729} + \frac{260}{486} - \frac{13}{18} = \frac{54675}{236196} \simeq 0.23148.$$

Confrontando i valori trovati, si conclude che

$$\max_T f = \frac{54675}{236196}, \qquad \min_T f = -\frac{17}{4}.$$

2. Si determini il massimo e il minimo di $f(x,y) = x^3y^2$ su

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0\}.$$



I punti stazionari interni a B sono le soluzioni di

$$\begin{cases} 3x^2y^2 = 0 \\ 2yx^3 = 0, \end{cases}$$

e quindi sono i punti $(x,0)$ (non interni), oppure $(0,y)$, interni quando $0 < y < 1$. In questi punti $f(0,y) = 0$. Sulla parte piatta del bordo si ha $f(x,0) = 0$, inclusi i punti singolari $\pm(1,0)$.

Rimane da analizzare la parte curva del bordo, che è la semicirconferenza $\{(\cos t, \sin t) : t \in]0,\pi[\}$. Si ha

$$f(\cos t, \sin t) = \cos^3 t \sin^2 t,$$

$$\frac{d}{dt} f(\cos t, \sin t) = -3\cos^2 t \sin^3 t + 2 \sin t \cos^4 t =$$

$$= \cos^2 t \sin t \left(-3\sin^2 t + 2\cos^2 t\right);$$

tale derivata in $]0,\pi[$ è nulla per $\cos t = 0$, ossia $t = \frac{\pi}{2}$, oppure per $-3\sin^2 t + 2\cos^2 t = -3 + 5\cos^2 t = 0$, ossia $\cos^2 t = \frac{3}{5}$, vale a dire $\cos t = \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ e $\sin t = +\sqrt{1-\cos^2 t} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$. Il valore $t = \frac{\pi}{2}$ corrisponde al punto $(0,1)$, dove

$$f(0,1) = 0;$$

nei punti $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$ si ha

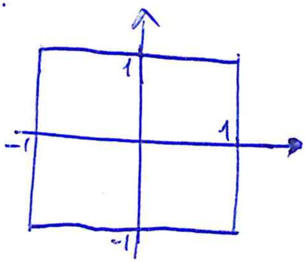
$$f\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right) = \pm\frac{6\sqrt{3}}{25\sqrt{5}} \simeq \pm 0.1859$$

Confrontando i valori si trova

$$\max_B f = \frac{6\sqrt{3}}{25\sqrt{5}}, \quad \min_B f = -\frac{6\sqrt{3}}{25\sqrt{5}}.$$

(3.) Si determini il massimo e il minimo di $f(x,y) = x^4 + y^3$ su

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \le 1, |y| \le 1\}.$$



Risoluzione

L'insieme Q è il quadrato

$$[-1,1] \times [-1,1].$$

Troviamo i punti stazionari risolvendo

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 4x^3 = 0 \\ f_y(x,y) = 3y^2 = 0 \end{cases}$$

che ha la soluzione $(0,0)$, con $f(0,0)=0$. Il punto è certamente di sella, essendo $f(x,0) \geq 0$ e $f(0,y) \leq 0$ per $y \leq 0$.

Sul bordo ci sono i 4 vertici, $(-1,-1), (1,-1), (1,1), (-1,1)$, dove

$$f(-1,-1)=0, \quad f(1,-1)=0, \quad f(1,1)=2, \quad f(-1,1)=2.$$

Sul lato $\{y=-1, -1<x<1\}$ si ha

$$f(x,-1) = x^4-1, \quad \frac{d}{dx} f(x,-1) = 4x^3 = 0 \quad \text{per } x=0;$$

nel punto stazionario vincolato $(0,-1)$ si ha $f(0,-1)=-1$.

Sul lato $\{x=1, -1<y<1\}$ si ha

$$f(1,y) = 1+y^3, \quad \frac{d}{dy} f(1,y) = 3y^2 = 0 \quad \text{per } y=0;$$

nel punto stazionario vincolato $(1,0)$ si ha $f(1,0)=1$.

Sul lato $\{y=1, -1<x<1\}$ si ha

$$f(x,1) = x^4+1, \quad \frac{d}{dx} f(x,1) = 4x^3 = 0 \quad \text{per } x=0;$$

nel punto stazionario vincolato $(0,1)$ si ha $f(0,1)=1$.

Sul lato $\{x=-1, -1<y<1\}$ si ha

$$f(-1,y) = 1+y^3, \quad \frac{d}{dy} f(-1,y) = 3y^2 = 0 \quad \text{per } y=0;$$

nel punto stazionario vincolato $(-1,0)$ si ha $f(-1,0)=1$. Conclusione:

$$\max_Q f = 2, \quad \min_Q f = -1.$$

4) Determinare i punti stazionari di
$$f(x,y) = (8x+y)e^{-xy},$$
stabilendone la natura, e calcolare $\inf_{\mathbb{R}^2} f$, $\sup_{\mathbb{R}^2} f$.

Risoluzione

Risulta
$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{-xy}\left(8 - y(8x+y)\right) = 0 \\ f_y(x,y) = e^{-xy}\left(1 - x(8x+y)\right) = 0 \end{cases}$$
e quindi (x,y) è stazionario se e solo se
$$\begin{cases} 8xy + y^2 = 8, \\ 8x^2 + xy = 1 \end{cases}$$
In particolare x e y sono diversi da 0. Moltiplicando la 2^a equazione per 8, si ha
$$\begin{cases} 8xy + y^2 = 8 \\ 8xy + 64x^2 = 8, \end{cases}$$
da cui $64x^2 = y^2$, ossia $y = \pm 8x$. Sostituendo nella 1^a,
$$\pm 64x^2 + 64x^2 = 8,$$
dunque deve valere il segno $+$ e si ottiene $128x^2 = 8$, ossia $x^2 = \frac{1}{16}$, e $x = \pm\frac{1}{4}$, $y = \pm 2$ (con i segni concordi). Cioè, i punti stazionari sono
$$\pm\left(\frac{1}{4}, 2\right).$$
Calcoliamo la matrice Hessiana: poiché

$$f_{xx}(x,y) = e^{-xy}\left(-8y - y\left(8 - 8xy - y^2\right)\right),$$

$$f_{xy}(x,y) = e^{-xy}\left(-8x - 2y - x\left(8 - 8xy - y^2\right)\right),$$

$$f_{yy}(x,y) = e^{-xy}\left(-x - x\left(1 - 8x^2 - xy\right)\right),$$

otteniamo

$$H_f\left(\frac{1}{4}, 2\right) = \begin{pmatrix} e^{-1/2}(-16) & e^{-1/2}(-6) \\ e^{-1/2}(-6) & e^{-1/2}\left(-\frac{1}{4}\right) \end{pmatrix} = e^{-1/2}\begin{pmatrix} -16 & -6 \\ -6 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

mentre

$$H_f\left(-\frac{1}{4}, -2\right) = \begin{pmatrix} e^{-1/2}\cdot 16 & e^{-1/2}\cdot 6 \\ e^{-1/2}\cdot 6 & e^{-1/2}\cdot \frac{1}{4} \end{pmatrix} = e^{-1/2}\begin{pmatrix} 16 & 6 \\ 6 & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

ed essendo

$$\det H_f\left(\frac{1}{4}, 2\right) = \det H_f\left(-\frac{1}{4}, 2\right) = e^{-1/2}\cdot(-32) < 0,$$

i due punti stazionari sono di sella.

Infine

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f \geq \lim_{x\to+\infty} f(x,-x) = \lim_{x\to+\infty} 7xe^{x^2} = +\infty,$$

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f \leq \lim_{x\to-\infty} f(x,-x) = \lim_{x\to-\infty} 7xe^{x^2} = -\infty,$$

da cui

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty, \qquad \inf_{\mathbb{R}^2} f = -\infty.$$

5. Sia $f(x,y) = e^{-x^2+xy-y^2+x+2y}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. 66

(i) Si calcoli $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,0)$, ove $\underline{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(ii) Si trovino i punti stazionari di f, stabilendone la natura.

(iii) Si trovino, se esistono, $\max_{\mathbb{R}^2} f$, $\min_{\mathbb{R}^2} f$.

Risoluzione

(i) Poiché f è di classe C^∞, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,0) = \langle \nabla f(1,0), \underline{v} \rangle_2 .$$

Calcoliamo ∇f:

$$f_x(x,y) = e^{-x^2+xy-y^2+x+2y}\left(-2x+y+1\right)$$
$$f_y(x,y) = e^{-x^2+xy-y^2+x+2y}\left(x-2y+2\right),$$

quindi

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(1,0) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} .$$

(ii) Annullando il gradiente di f si trova il sistema

$$\begin{cases} -2x+y+1=0 \\ x-2y+2=0 \end{cases},$$

che ha l'unica soluzione $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Calcoliamo la matrice Hessiana: risulta

$$f_{xx}(x,y) = e^{-x^2+xy-y^2+x+2y}\left(-2+(-2x+y+1)^2\right)$$

$$f_{xy}(x,y) = e^{-x^2+xy-y^2+x+2y}\left(1+(-2x+y+1)(x-2y+2)\right)$$

$$f_{yy}(x,y) = e^{-x^2+xy-y^2+x+2y}\left(-2+(x-2y+2)^2\right).$$

Osservato che nel punto $\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$ si ha $-2x+y+1=x-2y+2=0$, otteniamo facilmente

$$Hf\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right) = e^{7/3}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poichè $\det Hf\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)>0$ e $a_{11}=-2<0$, il punto $\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$ è di massimo relativo, con

$$f\left(\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right) = e^{7/3}.$$

(iii) Notiamo che

$$xy \leq \frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2 \qquad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Dunque

$$f(x,y) \leq e^{-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2+x+2y} =$$

$$= e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\left[1-2\frac{x+2y}{x^2+y^2}\right]}$$

e di conseguenza (essendo $\lim\limits_{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x+2y}{x^2+y^2}=0$)

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} f(x,y)=0.$$

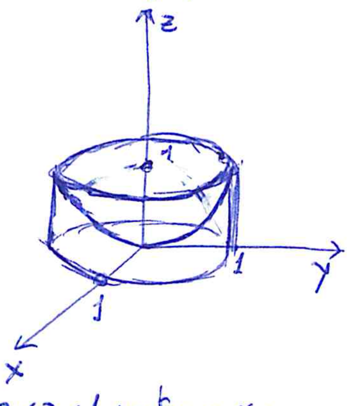
Dunque la funzione positiva f, al di fuori di una opportuna palla chiusa $\overline{B(0,R)}$, è compresa fra 0 ed $\varepsilon > 0$ fissato a piacere.
Il massimo di f dentro la palla chiusa $\overline{B(0,R)}$ non è certo sul bordo, dove $0 < f \leq \varepsilon$, e quindi è preso in un punto interno: tale punto è necessariamente stazionario, e quindi deve coincidere con $\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$. In definitiva

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = \max_{\mathbb{R}^2} f = f\left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) = e^{7/3},$$

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = 0 \quad , \quad \min_{\mathbb{R}^2} f \text{ non esiste.}$$

(6) Si trovino il massimo ed il minimo di $f(x,y,z) = y^2 z^2 - x^2$ su $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

Risoluzione L'insieme E è l'intercapedine tra il paraboloide $z = x^2 + y^2$ e il piano $z = 1$, delimitata dalla superficie verticale cilindrica $x^2 + y^2 = 1$.



Cerchiamo i punti stazionari interni:

$$\begin{cases} f_x(x,y,z) = -2x = 0 \\ f_y(x,y,z) = 2yz^2 = 0 \\ f_z(x,y,z) = 2zy^2 = 0 \end{cases}$$

Ha le soluzioni $(0,0,z)$ e $(0,y,0)$;
per essere punti interni ad E deve essere $0 < z < 1$, mentre nessun

$y\in\mathbb{R}$ va bene. Si ha

$$f(0,0,z)=0 \quad \forall z\in\,]0,1[\,.$$

Sul bordo ci sono 3 pezzi: il tappo superiore $z=1>x^2+y^2$, il tappo inferiore $z=x^2+y^2<1$, e lo spigolo di contatto fra i due tappi, che è la circonferenza $x^2+y^2=1=z$.

Sul tappo superiore si ha $f(x,y,1)=y^2-x^2$, $\nabla f(x,y,1)=(-2x,-2y)$. Dunque l'unico punto stazionario vincolato è $x=0, y=0$, ossia $(0,0,1)$, e risulta

$$f(0,0,1)=0.$$

Sul tappo inferiore si ha

$$f(x,y,x^2+y^2)=y^2(x^2+y^2)^2-x^2,$$

e

$$\nabla f(x,y,x^2+y^2)=\begin{pmatrix} 4xy^2(x^2+y^2)-2x \\ 2y(x^2+y^2)^2+4y^3(x^2+y^2)\end{pmatrix}.$$

Si riconosce che $\nabla f(x,y,x^2+y^2)$ è nullo per $(x,y)=(0,0)$. Se si cercano soluzioni con $y\neq 0$, segue subito $x\neq 0$, ma non se ne trovano perché la 2ª equazione $2y(x^2+y^2)(x^2+y^2+2y^2)$ non si può annullare per $y\neq 0$. Si ha dunque l'unico punto stazionario vincolato $(0,0,0)$, con

$$f(0,0,0)=0.$$

Infine lo spigolo è parametrizzato da $x=\cos\theta$, $y=\sin\theta$, $z=1$, $\theta\in[0,2\pi]$; si ha $f(\cos\theta,\sin\theta,1)=\sin^2\theta-\cos^2\theta$, con derivata $4\sin\theta\cos\theta=0$ se e solo se $\operatorname{sen}\theta=0$ oppure $\cos\theta=0$: si ottengono i punti

$(0,1,1)$, $(0,-1,1)$, $(1,0,1)$ $(-1,0,1)$,

nei quali

$$f(0,1,1)=1,\quad f(0,-1,1)=1,\quad f(1,0,1)=-1,\quad f(-1,0,1)=-1 .$$

In conclusione,

$$\max_E f = 1,\qquad \min_E f = -1 .$$