MMA | Es 12/10/20

Esercizi

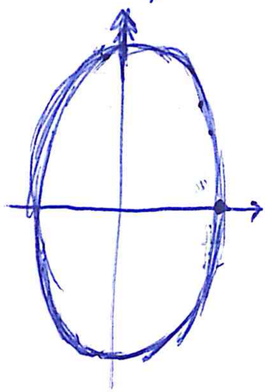
1. Sia $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 9\}$. Trovare i punti stazionari interni a E di $f(x,y) = xy$, stabilendone la natura, e poi calcolare massimo e minimo di f su E.

Risoluzione: si ha $\nabla f(x,y) = (y,x)$, quindi l'unico punto stazionario è $(0,0)$ che è interno ad E. Dato che

$$f(0,0) = 0, \qquad f(x,y) \begin{cases} >0 & \text{per } x,y>0, \text{ o } x,y<0 \\ <0 & \text{per } x>0 \text{ e } y<0, \text{ o } x<0, y>0, \end{cases}$$

il punto è di sella, senza bisogno di calcolare l'Hessiana (che comunque è $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, quindi $\det H_f < 0$).

Consideriamo $\partial E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 = 9\}$. È una ellisse, centrata in $(0,0)$, di semiassi $\frac{3}{2}$ e 3. Usiamo il metodo dei moltiplicatori e consideriamo



$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(4x^2 + y^2 - 9).$$

Si ha $\nabla L = 0$ se e solo se

$$\begin{cases} y + 8\lambda x = 0 \\ x + 2\lambda y = 0 \\ 4x^2 + y^2 = 9 \end{cases};$$

dalla 2ª equazione ricaviamo $x = -2\lambda y$, e dalla 1ª

$$y - 16\lambda^2 y = 0.$$

Dunque $y=0$ oppure $1-16\lambda^2=0$.

Nel 1° caso, dalla 3ª equazione segue $4x^2=9$, e quindi si hanno i due punti stazionari vincolati $\left(\frac{3}{2},0\right), \left(-\frac{3}{2},0\right)$ nei quali la f è nulla.

Nel 2° caso, $\lambda = \pm\frac{1}{4}$, da cui $x = -2\lambda y = \mp \frac{y}{2}$; la 3ª equazione dà allora

$$9 = 4x^2+y^2 = 2y^2,$$

e dunque

$$y = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}; \quad x = \mp\left(\pm\frac{3}{2\sqrt{2}}\right) = \pm\frac{3}{2\sqrt{2}},$$

e i segni di x e y sono indipendenti. Otteniamo così i 4 punti stazionari vincolati $\pm\left(\frac{3}{2\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ e $\pm\left(\frac{3}{2\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, nei quali

$$f\left(\pm\left(\frac{3}{2\sqrt{2}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{9}{4}, \quad f\left(\pm\left(\frac{3}{2\sqrt{2}},-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\right) = -\frac{9}{4}.$$

Si conclude che $\max_E f = \frac{9}{4}$, $\min_E f = -\frac{9}{4}$.

Si poteva anche parametrizzare ∂E come

$$x = \frac{3}{2}\cos\theta, \quad y = 3\sin\theta, \quad \theta\in[0,2\pi],$$

e considerare

$$f\left(\frac{3}{2}\cos\theta, 3\sin\theta\right) = \frac{9}{2}\cos\theta\sin\theta, \quad \theta\in[0,2\pi].$$

Il calcolo viene agevole e lo tralasciamo (con l'invito a farlo per conto vostro!).

(2) Sia $f(x,y) = e^{x^4+y^3-4x^2-3y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Trovare i punti stazionari di f, stabilendone la natura, e calcolare

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f, \quad \inf_{\mathbb{R}^2} f.$$

<u>Risoluzione</u> Notiamo che $t \mapsto e^t$ è crescente (e continua); ne segue che possiamo calcolare i punti stazionari e gli estremi superiore e inferiore della funzione che compare ad esponente:

$$g(x,y) = x^4 + y^3 - 4x^2 - 3y^2,$$

e poi scrivere

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = e^{\sup_{\mathbb{R}^2} g}, \quad \inf_{\mathbb{R}^2} f = e^{\inf_{\mathbb{R}^2} g}.$$

Consideriamo dunque g. Si ha

$$\nabla g(x,y) = \underline{0} \iff \begin{cases} 4x^3 - 8x = 0 \\ 3y^2 - 6y = 0 \end{cases}$$

e le soluzioni sono

$(0,0)$, $(0,2)$, $(\sqrt{2},0)$, $(-\sqrt{2},0)$, $(\sqrt{2},2)$, $(-\sqrt{2},2)$.

Calcoliamo l'Hessiana di g:

$$Hg(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2-8 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}.$$

Quindi $Hg(0,0) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $Hg(0,2) = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$,

$Hg(\pm\sqrt{2},0) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, $Hg(\pm\sqrt{2},2) = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Perciò $(0,0)$ è punto di minimo locale, $(0,2)$ e $\pm(\sqrt{2},0)$ sono punti di sella, $(\pm\sqrt{2},2)$ sono punti di minimo locale. Lo stesso si avrà, naturalmente, per f.

Inoltre

$$\sup_{\mathbb{R}^2} g \geq \sup_{\mathbb{R}} g(x,0) = \sup_{\mathbb{R}} (x^4 - 4x^2) \geq \lim_{x\to+\infty} x^2(x^2-4) = +\infty,$$

$$\inf_{\mathbb{R}^2} g \leq \inf_{\mathbb{R}} g(0,y) = \inf_{\mathbb{R}} (y^3 - 3y^2) \leq \lim_{y\to-\infty} y^2(y-3) = -\infty.$$

Ne segue

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = +\infty, \qquad \inf_{\mathbb{R}^2} f = 0.$$

3. Sia $f(x,y) = \dfrac{x^2+2y}{1+x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Si trovino i punti stazionari di f, stabilendone la natura, e si determinino

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f, \quad \sup_{\mathbb{R}^2} f.$$

Risoluzione La f è di classe C^∞. Calcoliamo ∇f: si ha

$$f_x(x,y) = \frac{2x(1+x^2+y^2) - 2x(x^2+2y)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2x+2xy^2-4xy}{(1+x^2+y^2)^2},$$

$$f_y(x,y) = \frac{2(1+x^2+y^2) - 2y(x^2+2y)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2+2x^2-2y^2-2yx^2}{(1+x^2+y^2)^2};$$

buttando via i denominatori, i punti stazionari risolvono

$$\begin{cases} 2x(1+y^2-2y) = 2x(1-y)^2 = 0 \\ 2(1+x^2-y^2-yx^2) = 0. \end{cases}$$

Le soluzioni sono $(0,-1)$, e poi $(x,1)$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Il calcolo dell'Hessiana è molto laborioso. Notiamo invece che

$$f(0,-1)=-1\leq f(x,y) \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 ,$$

in quanto

$$-1\leq f(x,y) \iff -1-x^2-y^2\leq x^2+2y \iff -(1+y)^2\leq 2x^2$$

e l'ultima disuguaglianza è ovviamente vera.

Inoltre, se $x_0\in\mathbb{R}$,

$$f(x_0,1)=1 \geq f(x,y) \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

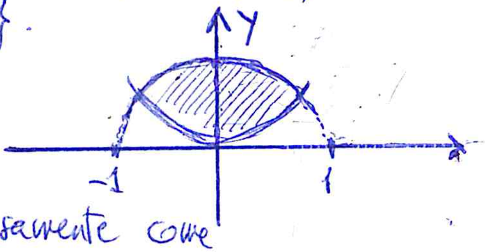
in quanto

$$1\geq f(x,y) \iff 1+x^2+y^2\geq x^2-2y \iff (1+y)^2\geq 0 ,$$

il che è ovviamente vero. Si conclude allora che tutti i punti $(x,1)$ sono di massimo assoluto, mentre $(0,-1)$ è punto di minimo assoluto. In particolare

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f=\min_{\mathbb{R}^2} f=-1, \qquad \sup_{\mathbb{R}^2} f=\max_{\mathbb{R}^2} f=1 .$$

4. Trovare massimo e minimo di $f(x,y)=e^{-x}(x^2+y)$ su $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le 1-x^2\}$.



Notiamo che

$$x^2\le 1-x^2 \iff x^2\le \frac{1}{2},$$

quindi D si descrive più precisamente come

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -\frac{1}{\sqrt{2}}\le x\le \frac{1}{\sqrt{2}},\ x^2\le y\le 1-x^2\right\}.$$

Cerchiamo i punti stazionari interni: si ha

$$\nabla f(x,y)=\left(-e^{-x}(x^2+y)+2x\,e^{-x},\ e^{-x}\right),$$

quindi ∇f non si annulla mai.

Vediamo cosa succede su ∂D: ci sono i due punti singolari (dove non vi è retta tangente) $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)$, nei quali

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}},\quad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2}\right)=e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Sul bordo inferiore, di equazione

$$y=x^2,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}},$$

si ha $f(x,x^2)=2x^2e^{-x}$; la derivata è $(4x-2x^2)e^{-x}$, e si annulla per $x=0$ e $x=2$ (ma $x=2$ non ci riguarda); dunque si ha il punto stazionario vincolato $(0,0)$, dove

$$f(0,0)=0.$$

Sul bordo superiore, di equazione

$$y=1-x^2,\quad -\frac{1}{\sqrt{2}}<x<\frac{1}{\sqrt{2}},$$

si ha $f(x, 1-x^2) = e^{-x}$, e la derivata non si annulla mai. Quindi, per confronto dei valori trovati,

$$\max_D f = e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \min_D f = 0.$$

Notiamo che in questo caso il metodo dei moltiplicatori non era conveniente, perché avremmo dovuto impiegarlo due volte.

5. Sia $f(x,y,z) = xyz - x - y - z$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Trovare i punti stazionari di f, stabilendone la natura, e determinare

$$\sup_{\mathbb{R}^3} f, \quad \inf_{\mathbb{R}^3} f.$$

<u>Risoluzione</u> Si ha $\nabla f = \underline{0}$ se e solo se

$$\begin{cases} yz - 1 = 0 \\ xz - 1 = 0 \\ xy - 1 = 0 \end{cases}, \text{ ossia } \quad xy = xz = yz = 1.$$

Le soluzioni sono $(1,1,1)$ oppure $(-1,-1,-1)$.

La matrice Hessiana è

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix},$$

quindi

$$H_f(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_f(-1,-1,-1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I criteri sono inapplicabili, ma gli autovalori si possono calcolare; infatti si vede che

$$\det(H_f(1,1,1) - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda+1)(-\lambda^2+\lambda+2) = (\lambda+1)^2(2-\lambda),$$

quindi $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Ne segue che $(1,1,1)$ è punto di sella; analogamente si verifica che gli autovalori di $H_f(-1,-1,-1)$ sono $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$, per cui anche $(-1,-1,-1)$ è punto di sella.

Infine si ha

$$\sup_{\mathbb{R}^3} f \geq \sup_{\mathbb{R}} f(x,x,x) = \sup_{\mathbb{R}} (x^3 - 3x) = +\infty,$$

$$\inf_{\mathbb{R}^3} f \leq \inf_{\mathbb{R}} f(x,x,x) = \inf_{\mathbb{R}} (x^3 - 3x) = -\infty.$$

(6) Determinare le dimensioni di una scatola rettangolare di volume V fissato, di area minima (base più superfici laterali).

Risoluzione Dette x, y, z le lunghezze degli spigoli della scatola, l'area da rendere minima è

$$2xy + 2xz + 2yz,$$

sotto la condizione (vincolo)

$$xyz = V.$$

Conviene eliminare z, scrivendo $z = \frac{V}{xy}$, e minimizzare su $\{(x,y) : x > 0, y > 0\}$ la funzione

$$g(x,y) = 2\left(xy + \frac{V}{y} + \frac{V}{x}\right).$$

I punti stazionari risolvono

$$\begin{cases} 2y - \dfrac{2V}{x^2} = 0 \\ 2x - \dfrac{2V}{y^2} = 0 \end{cases}$$

da cui

$$y=\frac{V}{x^2}\,,\quad x=\frac{V}{y^2}$$

cioè

$$y=\frac{V}{\left(\frac{V}{y^2}\right)^2}=\frac{y^4}{V}\,,$$

dunque $y^3=V$ ossia $y=V^{1/3}$; poi $x=\frac{V}{y^2}=\frac{V}{V^{2/3}}=V^{1/3}$, e di conseguenza

$$z=\frac{V}{xy}=V^{1/3}.$$

Si ha quindi l'unico punto stazionario $(V^{1/3},V^{1/3},V^{1/3})$ che è ovviamente di minimo perché

$$\sup_{([0,\infty[)^2} g \geq \lim_{x\to\infty} g(x,x)=\lim_{x\to+\infty} 2\left(x^2+\frac{2V}{x}\right)=+\infty.$$

Dunque la scatola di area minima è il cubo di spigolo $V^{1/3}$.

7. Sia $f(x,y)=x^2y\,e^{-x^2-y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Trovare i punti stazionari di f, stabilendone la natura, e calcolare $\sup_{\mathbb{R}^2} f$, $\inf_{\mathbb{R}^2} f$.

Risoluzione

I punti stazionari di f risolvono

$$\begin{cases} e^{-x^2-y^2}\left(2xy-2x^3y\right)=0 \\ e^{-x^2-y^2}\left(x^2-2x^2y^2\right)=0\,, \end{cases}$$

e le soluzioni sono $(0,y)$ per ogni $y\in\mathbb{R}$, ed anche $\pm\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ e $\pm\left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

La matrice Hessiana è

$$H_f(x,y) = e^{-x^2-y^2}\begin{pmatrix} y(2-10x^2+4x^4) & x(2-x^2-4y^2+4x^2y^2) \\ x(2-x^2-4y^2+4x^2y^2) & x^2y(-6+4y^2) \end{pmatrix};$$

dunque

$$H_f(0,y) = e^{-y^2}\begin{pmatrix} 2y & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ e non si può dire nulla;

tuttavia se $y>0$

$$f(0,y)=0, \quad f(x,y)=x^2y\,e^{-x^2-y^2} \geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

mentre se $y<0$

$$f(0,y)=0, \quad f(x,y)=x^2y\,e^{-x^2-y^2} \leq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R},$$

e infine se $y=0$

$$f(0,0)=0, \quad f(x,x)=x^3e^{-2x^3}\begin{cases} >0 & \text{se } x>0 \\ <0 & \text{se } x<0, \end{cases}$$

per cui:

$y>0 \Rightarrow (0,y)$ punto di minimo relativo,
$y<0 \Rightarrow (0,y)$ punto di massimo relativo,
$y=0 \Rightarrow (0,0)$ punto di sella.

Poi,

$$H_f\left(-1,+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = e^{-3/2}\begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & -1 \\ -1 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ e il punto

è di massimo relativo con $f\left(-1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3/2}$;

$$H_f\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=e^{-3/2}\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & -1\\ -1 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$ e il punto è di minimo relativo, con $f\left(-1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3/2}$;

$$H_f\left(1,+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=e^{-3/2}\begin{pmatrix}-2\sqrt{2} & 1\\ 1 & -2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$ e il punto è di massimo relativo, con $f\left(1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3/2}$;

$$H_f\left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=e^{-3/2}\begin{pmatrix}2\sqrt{2} & 1\\ 1 & 2\sqrt{2}\end{pmatrix}$$ e il punto è di minimo relativo, con $f\left(1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3/2}$.

Calcoliamo sup ed inf della f: notiamo che

$$|f(x,y)|\leq |x|^2|y|e^{-x^2-y^2},$$

quindi

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty}|f(x,y)|=0.$$

Ne segue che f raggiunge il suo sup nel punto di massimo relativo con valore maggiore, e raggiunge il suo inf nel punto di minimo relativo con valore minore. In questo caso i valori sono unici e si ha

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f=\max_{\mathbb{R}^2} f=f\left(\pm1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3/2},$$

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f=\min_{\mathbb{R}^2} f=f\left(\pm1,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-3/2}.$$