Curve e superfici

Definizione Una curva in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ è una funzione vettoriale $\underline{\gamma}(t)$, definita su un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, a valori in $\mathbb{R}^2$ o in $\mathbb{R}^3$. L'immagine di $\underline{\gamma}$, detta anche sostegno, è un sottoinsieme Γ di $\mathbb{R}^2$ o di $\mathbb{R}^3$.

Esempi: (1) $\underline{\gamma}(t) = (t, 2t+3)$, da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$, ha per immagine Γ la retta di equazione $y = 2x+3$.

(2) $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$, ha per immagine la circonferenza di equazione $x^2+y^2=1$.

(3) $\underline{\gamma}(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \geq 0$, ha per immagine un'elica cilindrica che sale intorno all'asse z mantenendosi a distanza 1 da esso.

(4) $\underline{\gamma}(t) = (t, f(t))$, $t \in [a,b]$, ha per immagine il grafico della funzione $f: [a,b] \to \mathbb{R}$.

Il vettore $\underline{\gamma}'(t)$ (se $\underline{\gamma}$ è di classe C^1 e $\underline{\gamma}'(t) \neq \underline{0}$) è tangente a Γ nel punto $\underline{\gamma}(t)$; dunque la retta tangente a Γ nel punto $\underline{\gamma}(t)$

ha equazioni parametriche $\underline{x} = \underline{\gamma}(t) + s\,\underline{\gamma}'(t)$, $s \in \mathbb{R}$.
Diremo in questo caso che $\underline{\gamma}$ è una <u>curva regolare</u>

<u>Definizione</u> Una <u>superficie</u> in $\mathbb{R}^3$ è una funzione vettoriale $\underline{\sigma}(u,v)$ definita su un insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}^3$.
L'<u>immagine</u> di $\underline{\sigma}$ è un sottoinsieme Σ di $\mathbb{R}^3$ (il <u>sostegno</u>).

L'insieme D è, di solito, un aperto A, oppure la sua chiusura $\bar{A}$, o ancora un insieme D tale che $A \subseteq D \subseteq \bar{A}$, con A aperto.

<u>Esempi</u> (1) $\underline{\sigma}(u,v) = (u, v, 3u+2v+1)$, da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, ha per immagine il piano di equazione $z = 3x+2y+1$.

(2) $\underline{\sigma}(\theta,\varphi) = (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$, da $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$ in $\mathbb{R}^3$, ha per immagine la <u>sfera unitaria</u>: il parametro θ è la latitudine, il parametro φ è la longitudine.

(3) $\underline{\sigma}(u,v) = (u, v, g(u,v))$, da $A \subseteq \mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$, ha per immagine il grafico della funzione $g: A \to \mathbb{R}$.

Se D è aperto e $\underline{\sigma}$ è di classe C^1, i vettori $\underline{\sigma}_u(u,v)$ e $\underline{\sigma}_v(u,v)$, se diversi da $\underline{0}$, sono tangenti a Σ nel punto $\underline{\sigma}(u,v)$. Se essi

sono anche <u>linearmente indipendenti</u>, ossia non paralleli, allora il <u>piano tangente</u> a Σ nel punto $\underline{\sigma}(u,v)$ ha equazioni parametriche $\underline{x} = \underline{\sigma}(u,v) + s\,\underline{\sigma}_u(u,v) + t\,\underline{\sigma}_v(u,v)$, $(s,t) \in \mathbb{R}^2$.
Diremo allora che $\underline{\sigma}$ è una <u>superficie regolare</u>.
In tal caso, il <u>prodotto vettoriale</u> $\underline{\sigma}_u(u,v) \times \underline{\sigma}_v(u,v)$ è perpendicolare a Σ nel punto $\underline{\sigma}(u,v)$.

<u>Parentesi sul prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$</u>

Se $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$, il loro <u>prodotto vettoriale</u> $\underline{u} \times \underline{v}$ è un vettore di $\mathbb{R}^3$ che ha:

- <u>modulo</u> pari a $|\underline{u}|_3 \, |\underline{v}|_3 \sin\vartheta$, ove $\vartheta \in [0,\pi]$ è l'angolo fra $\underline{u}$ e $\underline{v}$ (dunque $\underline{u}\times\underline{v} = \underline{0}$ se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono paralleli);
- <u>direzione</u> perpendicolare al piano generato da $\underline{u}$ e $\underline{v}$;
- <u>verso</u> tale che la terna $\underline{u}, \underline{v}, \underline{u\times v}$ sia orientata come gli assi x, y, z: cioè come medio, indice e pollice della mano sinistra disposti ortogonalmente, o, in termini più precisi, la matrice che ha per colonne i vettori $\underline{u}, \underline{v}, \underline{u\times v}$ deve avere determinante positivo.

Si noti che, sulla base di questa definizione, risulta

$$\underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3, \quad \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1, \quad \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2 .$$

Si dimostra abbastanza agevolmente che, posto $\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$

e $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$, risulta

$$\underline{u} \times \underline{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2 ,\ u_3 v_1 - u_1 v_3 ,\ u_1 v_2 - u_2 v_1) ;$$

questa formula si ricorda meglio osservando che essa corrisponde alla scrittura (puramente formale)

$$\underline{u} \times \underline{v} = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} ,$$

sviluppando il determinante rispetto alla prima riga.

Massimi e minimi vincolati

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 definita su un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^N$, con $N=2$ o $N=3$. Se $B \subset A$ è un aperto limitato con $\overline{B} = B \cup \partial B \subset A$, l'insieme $\overline{B}$ è chiuso e limitato: in virtù del teorema di Weierstrass, la funzione f assume massimo e minimo in $\overline{B}$. I punti di massimo e di minimo sono in B, oppure in ∂B: quelli che sono in B, come sappiamo, vanno ricercati fra i punti stazionari di f che stanno dentro B. Vogliamo fornire un metodo per trovare i punti di massimo e di minimo che si trovano in ∂B.
Analizzeremo due situazioni tipiche: (I) ∂B è descritto in forma parametrica come sostegno di una curva o di una

superficie; (II) ∂B è descritto come curva o superficie di livello. Perciò, nel caso (I),

$$\partial B = \{\underline{x} = \underline{\gamma}(t),\ t \in [a,b]\} \text{ con } \underline{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^2 \text{ curva regolare,}$$

oppure

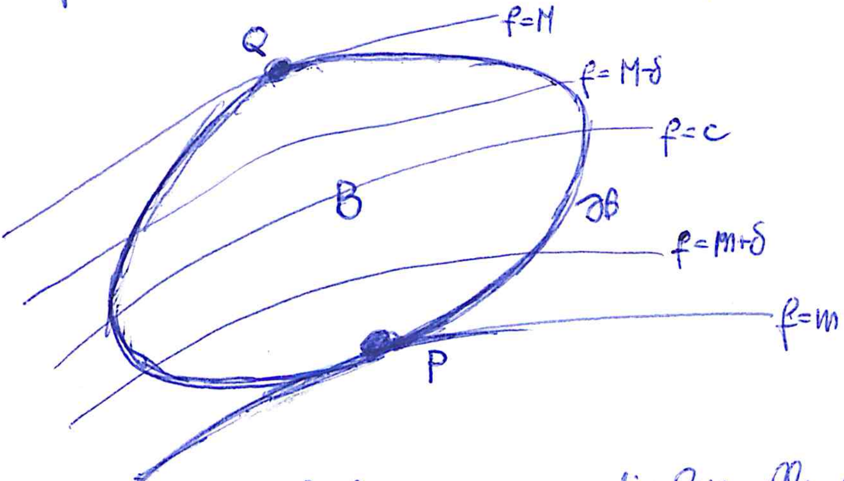
$$\partial B = \{\underline{x} = \underline{\sigma}(u,v),\ (u,v) \in D\} \text{ con } \underline{\sigma} : D \to \mathbb{R}^3 \text{ superficie regolare.}$$

Invece nel caso (II) avremo

$$\partial B = \{\underline{x} \in A :\ \underline{G}(\underline{x}) = \underline{0}\}, \text{ con } \underline{G} : A \to \mathbb{R} \text{ di classe } C^1,$$

tale che $\nabla G \neq \underline{0}$ in A e A aperto di $\mathbb{R}^2$ o di $\mathbb{R}^3$.

L'idea generale per affrontare questo problema è la seguente, esposta nel caso $N=2$ ma valida anche per $N=3$.



Il gradiente di f ha direzione perpendicolare alle curve di livello di f e verso diretto come i livelli crescenti. Se si percorre ∂B in verso antiorario da P a Q, i valori assunti da f crescono fino al valore massimo, assunto in Q, per poi decrescere fino al valore minimo, assunto in P. Si può osservare che in P e in Q le curve di livello di f sono tangenti a ∂B: quindi, in tali punti <u>∇f ha direzione perpendicolare alla retta tangente a ∂B</u> in tali punti. In breve, ∇f deve essere perpendicolare a ∂B in P e in Q.

Dobbiamo dunque cercare i punti di ∂B (il <u>vincolo</u>) nei quali ∇f è perpendicolare a ∂B. Tali punti si chiamano <u>punti stazionari vincolati</u>. Potrà succedere che tra questi punti vi siano anche punti di sella. Tuttavia si tratterà di "pochi" punti, quindi basterà confrontare i valori di f nei punti stazionari vincolati trovati, e si capirà quale è il massimo e quale è il minimo.

Nella pratica, si hanno questi due metodi per la ricerca dei punti stazionari vincolati.

<u>Proposizione (caso $\boxed{I}$)</u> Nelle ipotesi di $\boxed{I}$, un punto $\underline{x}_0 \in \partial B$ è punto stazionario vincolato per f su ∂B se e solo se risulta:

- per $N=2$ e $\underline{x}_0 = \underline{\gamma}(t_0)$, $\quad \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{\gamma}'(t_0) \rangle_2 = 0$,
- per $N=3$ e $\underline{x}_0 = \underline{\sigma}(u_0, v_0)$, $\quad \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{\sigma}_u(u_0,v_0) \rangle_3 = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{\sigma}_v(u_0,v_0) \rangle_3 = 0$.

Le condizioni sopra scritte ci dicono in effetti che $\nabla f(\underline{x}_0)$ è ortogonale alla retta o al piano tangente a ∂B in $\underline{x}_0$.
Esse si ottengono osservando che t_0 è punto stazionario per la funzione composta $f(\underline{\gamma}(t))$, mentre (u_0,v_0) è punto stazionario per la funzione composta $f(\underline{\sigma}(u,v))$. Imponendo che $(f\circ\varphi)'$ sia nulla in t_0, e che $\nabla f(\underline{\sigma}(u,v))$ sia nullo in (u_0,v_0), e applicando ~~le~~ le regole di derivazione delle funzioni composte, si ottengono esattamente le condizioni sopra scritte.

<u>Proposizione (caso $\boxed{\text{II}}$)</u> Nelle ipotesi di $\boxed{\text{II}}$, $\underline{x}_0\in\partial B$ è punto stazionario vincolato per f su ∂B se e solo se esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che

$$\begin{cases}\nabla f(\underline{x}_0)+\lambda\,\nabla G(\underline{x}_0)=\underline{0}\\ G(\underline{x}_0)=0.\end{cases}$$

Il numero λ si chiama <u>moltiplicatore di Lagrange</u>. Il sistema esprime il fatto che $\underline{x}_0\in\partial B$ e che in tale punto ∇f e ∇G sono paralleli, in accordo col fatto che le curve, o superfici, di livello di f e di G sono tangenti in $\underline{x}_0$.
Il sistema può essere visto come insieme dei punti $(\underline{x}_0,\lambda)$ stazionari per la <u>funzione lagrangiana</u> $L(\underline{x},\lambda)=f(\underline{x})+\lambda G(\underline{x})$ in $\mathbb{R}^{N+1}$ $(N=2\text{ o }3)$.

Osservazione: Se f è continua su ∂B, ma non è di classe C^1 su tutto ∂B (ad esempio per la presenza di valori assoluti, o di radici), oppure se le funzioni che descrivono ∂B non sono di classe C^1 (esempio tipico: ∂B è bordo di un poligono o di un poliedro), allora la teoria precedente non è applicabile. Nei punti "cattivi", bisogna calcolare la f, e confrontare i valori in questi punti con quelli assunti da f nei punti stazionari vincolati "buoni".

Esempio: sia $f(x,y) = (x+1)^2 - 2(y+1)^2$. Cerchiamo $\max_Q f$ e $\min_Q f$, ove $Q = [0,1]\times[0,1]$. La f non ha punti stazionari interni a Q, perchè $f_x(x,y) = 2(x+1) = 0$ e $f_y(x,y) = -4(y+1) = 0$ danno $(x,y) = (-1,-1)$, punto esterno a Q. Vediamo sui quattro lati (aperti):

- $x=0,\ 0<y<1$: $f(0,y) = 1-2(y+1)^2$, derivata mai nulla;
- $x=1,\ 0<y<1$: $f(1,y) = 4-2(y+1)^2$, derivata mai nulla;
- $y=0,\ 0<x<1$: $f(x,0) = (x+1)^2-2$, derivata mai nulla;
- $y=1,\ 0<x<1$: $f(x,1) = (x+1)^2-8$, derivata mai nulla.

Restano i 4 vertici, dove si ha

$$f(0,0) = 1-2 = -1;\ f(0,1) = 1-8 = -7;\ f(1,0) = 4-2 = 2;\ f(1,1) = 4-8 = -4.$$

Si conclude che $\max_Q f = f(1,0) = 2$, $\min_Q f = f(0,1) = -7$.

<u>Esempio</u> Cerchiamo il massimo ed il minimo di $f(x,y)=x^2y$ sul disco chiuso $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq 1\}$.

I punti stazionari di f risolvono il sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y)= 2xy=0 \\ f_y(x,y)= x^2=0, \end{cases}$$

da cui $x=0$ e $0\leq y<1$ (perchè deve essere $x^2+y^2<1$).

In tali punti risulta

$$f(0,y)=0.$$

I punti stazionari vincolati su ∂D si trovano, in accordo con (I), scrivendo

$$\partial D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=1\} = \{(\cos t,\sin t):\ t\in[0,2\pi]\},$$

e considerando la funzione composta

$$f(\cos t,\sin t)=\cos^2 t\sin t.$$

La derivata di questa funzione è $-2\cos t\sin^2 t+\cos^3 t$; essa si annulla se e solo se

$$\cos t\,(\cos^2 t-2\sin^2 t)=0:$$

ciò accade per $t=\frac{\pi}{2}$, $t=\frac{3}{2}\pi$ (cioè per $(x,y)=(0,\pm 1)$), punti nei quali $f(0,\pm1)=0$, e anche per $\cos^2 t=2\sin^2 t$, ossia $1=\cos^2 t+\sin^2 t=3\sin^2 t$, da cui $\sin t=\pm\frac{1}{\sqrt3}$, $\cos t=\pm\sqrt{1-\sin^2 t}=\pm\frac{\sqrt2}{\sqrt3}$, con scelte indipendenti dei segni. Si hanno così i punti stazionari vincolati

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

nei quali

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{2}{3\sqrt{3}},\quad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}},$$

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}},\quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

Confrontando i valori si ottiene $\max_D f=\frac{2}{3\sqrt{3}}$, $\min_D f=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$.

Avremmo potuto scrivere invece, in accordo con (II),

$$\partial D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ G(x,y)=0\},\quad \text{con}\quad G(x,y)=x^2+y^2-1,$$

e utilizzare il metodo dei moltiplicatori. La lagrangiana è

$$L(x,y,\lambda)=x^2y+\lambda(x^2+y^2-1);$$

si ha $\nabla L=0$ se e solo se

$$\begin{cases} 2xy+2\lambda x=0\\ x^2+2\lambda y=0\\ x^2+y^2-1=0.\end{cases}$$

La 1ª equazione è soddisfatta se $x=0$ (da cui, per la 3ª, $y=\pm 1$) oppure se $y=-\lambda$ (da cui, per la 2ª, $x^2-2y^2=0$ e, per la 3ª, $3y^2=1$, cioè $y=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ e dunque $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$). Si ritrovano così i punti stazionari già individuati.