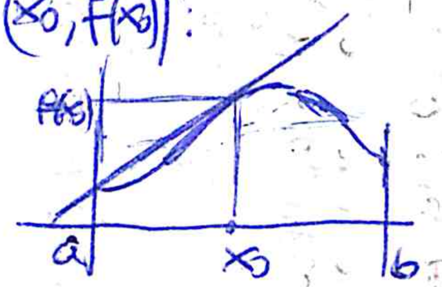
MMA | 28/9/20

Torniamo al calcolo differenziale, entrando nel vivo.
Ricordiamo che per una funzione di una sola variabile, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, se $x_0\in[a,b]$ la <u>derivata</u> di f nel punto x_0 è il <u>limite</u> del suo <u>rapporto incrementale</u>:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

se questo esiste finito; in tal caso tale limite si denota con $f'(x_0)$, ed esprime il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0,f(x_0))$:

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$



<u>Derivate parziali</u>

Sia $f:A\to\mathbb{R}$, con $A\subseteq\mathbb{R}^N$ aperto. Sia $\underline{x}_0\in A$.
Poniamo

$$\underline{e}_1=(1,0,\dots,0),\ \underline{e}_2=(0,1,\dots,0),\ \dots,\ \underline{e}_N=(0,0,\dots,1).$$

I vettori $\underline{e}_i$, $1\le i\le N$, sono una <u>base</u> dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^N$: vale a dire, ogni $\underline{x}\in\mathbb{R}^N$ si scrive univocamente come <u>combinazione lineare</u> degli $\underline{e}_i$:

$$\underline{x}=\sum_{i=1}^{N}x_i\,\underline{e}_i.$$

Definizione La *derivata parziale i-esima* di f in $\underline{x}_0$ è il numero (se esiste finito)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{e}_i) - f(\underline{x}_0)}{h}.$$

Esso si denota con uno qualsiasi dei tre simboli

$$D_i f(\underline{x}_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}_0), \quad f_{x_i}(\underline{x}_0).$$

È chiaro che se $N=1$ questa definizione dà l'usuale derivata $f'(x_0)$.

Esempi (1) se $f(x,y) = 3x^2y^3 - y^2 + 2x^2$, allora

$$f_x(x,y) = 6xy^3 - 2y$$
$$f_y(x,y) = 9x^2y^2 - 2y.$$

(2) se $f(x,y) = e^{xy}$, allora $f_x(x,y) = ye^{xy}$, $f_y(x,y) = xe^{xy}$.

Osserviamo che, per $N=1$, f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0.

Invece per $N>1$, questo non è vero. Ad esempio, sia

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Come sappiamo, questa funzione non è continua perché non ha limite per $(x,y) \to (0,0)$. Tuttavia

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0,$$

quindi g ha le due derivate parziali in $(0,0)$.

Derivate direzionali

I vettori $\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_N$ non hanno nulla di speciale, a parte l'essere $\neq \underline{0}$. Si può fare la derivata in qualunque direzione $\underline{v} \neq \underline{0}$:

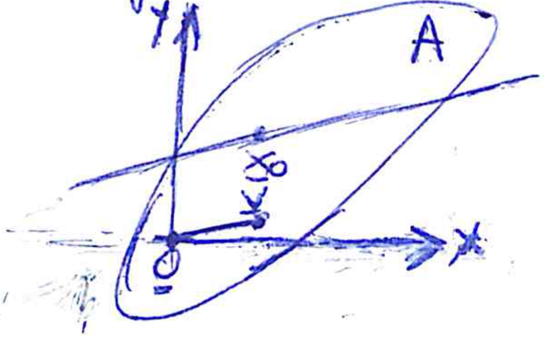
<u>Definizione</u> La <u>derivata direzionale</u> di f in $\underline{x}_0$ secondo la direzione $\underline{v}$ è il numero (se esiste finito)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + h\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{\underline{v}}.$$

Esso si denota con uno qualsiasi dei tre simboli

$$D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0), \quad f_{\underline{v}}(\underline{x}_0).$$

Il significato geometrico della derivata direzionale è il seguente: si taglia il grafico di f (che sta, se $f>0$, sopra all'aperto A) con un piano verticale passante per $\underline{x}_0$, parallelo alla direzione di $\underline{v}$. Questo taglio dà il grafico di una funzione che in $\underline{x}_0$ ha derivata $f_{\underline{v}}(\underline{x}_0)$.



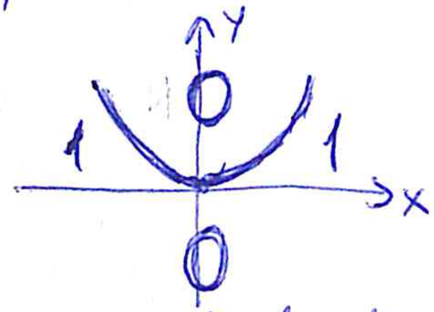
Naturalmente, se $\underline{v} = \underline{e}_i$, si ritrova la derivata parziale i-esima di f in $\underline{x}_0$.

Ma anche se una funzione di più variabili ha tutte le possibili derivate direzionali in $\underline{x}_0$, essa può essere discontinua in $\underline{x}_0$.

Esempio: consideriamo un "marciapiede modificato":

$$g(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad 0 < y < x^2 \text{ e } x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad y \leq 0 \text{ oppure } y \geq x^2 \text{ e } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sia $\underline{x}_0 = \underline{0} = (0,0)$. Per ogni $\underline{v} \neq \underline{0}$, se $|h|$ è abbastanza piccolo, si ha



$$\frac{g(hv_1, hv_2) - g(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} \xrightarrow{h \to 0} 0,$$

quindi $D_{\underline{v}}\, g(0,0) = 0$ per ogni $\underline{v} \neq 0$. Eppure g è discontinua in $(0,0)$, perché se scegliamo $y = \frac{1}{2}x^2$ si ha per $x \to 0$

$$g(x, \tfrac{1}{2}x^2) = 1 \to 1 \neq 0 = g(0,0).$$

Se per $N=1$ la derivabilità implica la continuità, qual'è per $N>1$ la nozione giusta che implichi

(a) la continuità,

(b) l'esistenza del piano N-dimensionale tangente al grafico di f in $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0)) \in \mathbb{R}^{N+1}$?

La nozione giusta è quella di <u>differenziabilità</u>.

Partiamo dalla seguente osservazione: per $N=1$, f è derivabile in x_0 <u>se e solo se</u> esistono un numero $L \in \mathbb{R}$ ed una funzione $\omega :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, tali che

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Lh + \omega(h), \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

Infatti, se f è derivabile in x_0 basta scegliere $L = f'(x_0)$ e $\omega(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - h f'(x_0)$. Viceversa, se esistono L e ω come sopra, allora dalla relazione sopra scritta si ottiene

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L + \frac{\omega(h)}{h},$$

e per $h \to 0$ si ricava che f è derivabile con $f'(x_0) = L$.

<u>Definizione</u> Sia $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto. Sia $\underline{x}_0 \in A$. Diciamo che f è <u>differenziabile</u> in $\underline{x}_0$ se esistono un vettore $\underline{a} \in \mathbb{R}^N$ ed una funzione $\omega : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, tali che

$$f(\underline{x}_0+\underline{v}) = f(\underline{x}_0) + \langle \underline{a}, \underline{v} \rangle_N + \omega(\underline{v}), \qquad \lim_{\underline{v}\to \underline{0}} \frac{\omega(\underline{v})}{|\underline{v}|_N} = 0,$$

ovvero se

$$\lim_{|\underline{v}|_N \to 0} \frac{f(\underline{x}_0+\underline{v}) - f(\underline{x}_0) - \langle \underline{a}, \underline{v} \rangle_N}{|\underline{v}|_N} = 0.$$

<u>Osservazioni</u> (1) Il vettore $\underline{a}$, se esiste, è unico: infatti,

scegliendo $\underline{v} = h\underline{e}_i$ con $h \to 0^+$, dalla definizione segue

$$f(\underline{x}_0 + h\underline{e}_i) = f(\underline{x}_0) + h\langle \underline{a}, \underline{e}_i\rangle_N + \omega(h\underline{e}_i) ;$$

dividendo per h e mandando $h \to 0$, si trova che

$$\exists\ D_i f(\underline{x}_0) = \langle \underline{a}, \underline{e}_i\rangle_N = a_i .$$

Dunque
$$\underline{a} = (D_1 f(\underline{x}_0), D_2 f(\underline{x}_0), \dots, D_N f(\underline{x}_0)) =: \nabla f(\underline{x}_0)$$

è univocamente determinato. Il vettore $\nabla f(\underline{x}_0)$ è detto <u>gradiente</u> di f in $\underline{x}_0$. Perciò, se f è differenziabile in $\underline{x}_0$,

$$\lim_{\underline{v} \to \underline{0}} \frac{\langle f(\underline{x}_0 + \underline{v}) - f(\underline{x}_0) - \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v}\rangle_N}{|\underline{v}|_N} = 0 .$$

(2) Se f è differenziabile in $\underline{x}_0$, allora f è continua in $\underline{x}_0$:

$$|f(\underline{x}_0 + \underline{v}) - f(\underline{x}_0)| = |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v}\rangle_N + \omega(\underline{v})| =$$

$$= |\,|\nabla f(\underline{x}_0)|_N |\underline{v}|_N \cos\vartheta + \omega(\underline{v})| \le |\nabla f(\underline{x}_0)|_N\, |\underline{v}|_N + |\omega(\underline{v})| \xrightarrow{\underline{v} \to \underline{0}} 0 .$$

(3) Se f è differenziabile, dalla definizione segue che

$$\exists\ D_{\underline{v}} f(\underline{x}_0) = \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v}\rangle_N \quad \forall\, \underline{v} \in \mathbb{R}^N \setminus \{\underline{0}\} .$$

(4) Il piano N-dimensionale tangente al grafico di f in $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ è dato da

$$z = f(\underline{x}_0) + \langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0\rangle_N , \quad (\underline{x}, z) \in \mathbb{R}^{N+1} .$$

(5) Come per $N=1$ esistono funzioni continue non derivabili (ad esempio $f(x)=|x|$ è continua ma non derivabile in 0), così per $N>1$ esistono funzioni continue non differenziabili: ad esempio

$$f(\underline{x})=|\underline{x}|_N .$$

Questa funzione è continua, come sappiamo, ma non è differenziabile in $\underline{0}$, perchè non esistono le derivate parziali: infatti

$$\frac{f(h\underline{e}_i)-f(\underline{0})}{h}=\frac{|h|-0}{h}=\begin{cases}1 & \text{se } h>0\\ -1 & \text{se } h<0,\end{cases}$$

quindi non esiste $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h\underline{e}_i)-f(\underline{0})}{h}$.

Qual'è una condizione sufficiente per la differenziabilità? Eccola:

Teorema (del differenziale totale) Sia $f: A\to\mathbb{R}$, con $A\subseteq\mathbb{R}^N$ aperto. Sia $\underline{x}_0\in A$. Se esiste una palla $B(\underline{x}_0,r)\subset A$, tale che
(i) $\exists\ D_i f(\underline{x})$ per $\underline{x}\in B(\underline{x}_0,r)$ e $i=1\dots N$,
(ii) $D_i f$ è continua in $\underline{x}_0$, $i=1\dots N$,
allora f è differenziabile in $\underline{x}_0$.

In particolare, se le $D_i f$ esistono in tutto A e sono continue in A, allora f è differenziabile in A (cioè in ogni punto di A).

Tornando al significato geometrico della derivata direzionale, se $|\underline{v}|_N = 1$ il numero $f_{\underline{v}}(\underline{x}_0)$ rappresenta la pendenza del grafico di f in $(\underline{x}_0, f(\underline{x}_0))$ nella direzione $\underline{v}$. La massima pendenza si ha quando $\underline{v} = \pm \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{|\nabla f(\underline{x}_0)|_N}$, sempre che sia $\nabla f(\underline{x}_0) \neq \underline{0}$ (se $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$, la pendenza è 0): infatti

$$|f_{\underline{v}}(\underline{x}_0)| = |\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{v} \rangle_N| \leq |\nabla f(\underline{x}_0)|_N \, |\underline{v}|_N = |\nabla f(\underline{x}_0)|_N,$$

mentre se $\underline{v} = \pm \frac{\nabla f(\underline{x}_0)}{|\nabla f(\underline{x}_0)|_N}$ si ha

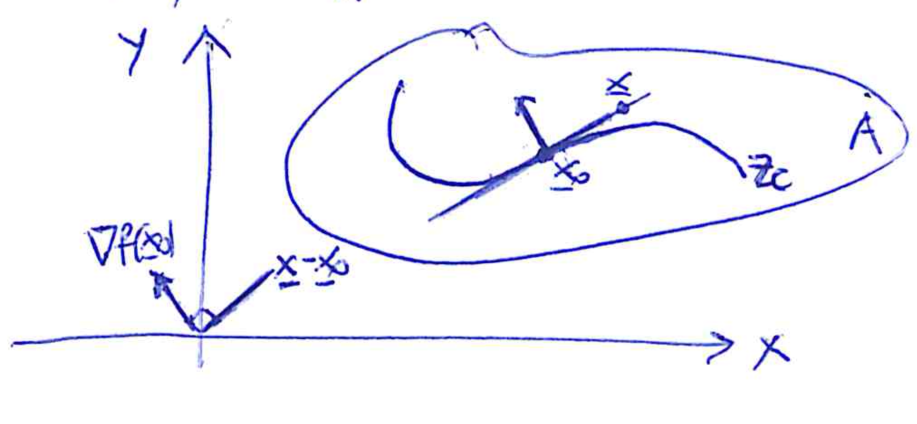
$$f_{\underline{v}}(\underline{x}_0) = \pm |\nabla f(\underline{x}_0)|_N .$$

In particolare, lungo una <u>curva di livello</u>

$$Z_c = \{\underline{x} \in A : f(\underline{x}) = c\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

la pendenza del grafico di f è nulla nelle direzioni $\underline{v}$ che sono tangenti a Z_c. Quindi $\nabla f(\underline{x}_0)$ deve essere ortogonale a Z_c quando $\underline{x}_0 \in Z_c$. Ne segue che l'equazione del piano $(N-1)$-dimensionale tangente in $\underline{x}_0$ a Z_c è

$$\langle \nabla f(\underline{x}_0), \underline{x} - \underline{x}_0 \rangle_N = 0 .$$



Esempio Sia $f(x,y)=e^{4x^2-9y^2}$: la f è differenziabile con $\nabla f(x,y)=\left(8x\,e^{4x^2-9y^2}, -18y\,e^{4x^2-9y^2}\right)$.

Scelto $(x_0,y_0)=(1,1)$, il piano tangente al grafico di f in $(1,1,f(1,1))$ è

$$z=f(1,1)+\left\langle \nabla f(1,1), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}\right\rangle_2$$

ossia

$$z=e^{-5}+8e^{-5}(x-1)-18e^{-5}(y-1).$$

Se $\underline{v}=\left(\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$, si ha

$$f_{\underline{v}}(1,1)=\left\langle \nabla f(1,1), \left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right)\right\rangle_2 =$$
$$=4e^{-5}+9e^{-5}=13e^{-5}.$$

Sia Z la curva di livello 1:

$$Z=\{(x,y): f(x,y)=1\}=\{(x,y): 4x^2-9y^2=0\}.$$

Il punto $\left(1,\frac{2}{3}\right)$ appartiene a Z. La retta tangente a Z in tale punto è

$$\left\langle \nabla f\left(1,\tfrac{2}{3}\right), \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2/3 \end{pmatrix}\right\rangle_2=0,$$

cioè

$$8(x-1)-18\left(y-\tfrac{2}{3}\right)=0.$$