MMA | 23/9/20

(1)

Io faccio il 1° modulo (3 crediti) di preliminari matematici.

<u>mail</u> paolo.acquistapace@unipi.it

<u>pagina web</u> http://people.dm.unipi.it/~acquistp/ambi.html

<u>studio</u> stanza 213, dipartimento di matematica

<u>telefono</u> 050 2213209.

Tutto il materiale del corso (eccetto la registrazione delle lezioni) sarà sulla mia pagina web. Su <u>moodle</u> trovate solo il link alla mia pagina.

<u>ricevimento</u> si fa on line, fissando – via mail, o a lezione – un appuntamento (approfittare!).

<u>appunti delle lezioni</u> saranno messi nella mia pagina web.

<u>lezioni</u> saranno on line, salvo che, trovandoci tutti d'accordo, io riesca a trovare l'aula seguendo le regole sanitarie.

<u>registrazione delle lezioni</u> resterà sulla piattaforma Microsoft Teams, non la metterò sulla mia pagina perché occupa un mucchio di spazio.

<u>orario</u> lunedì 16-18, mercoledì 14-16; saranno 24 ore totali.

Prima di cominciare, un piccolo avvertimento:

È inutile studiare senza capire, è inutile capire senza studiare.

<u>Prerequisiti per il corso</u>: il programma del corso di Istituzioni del 1° anno.

<u>Libro di testo</u>: non serve (bastano i miei appunti), comunque è utile il libro di R.A. Adams, Calcolo differenziale 2 - funzioni di più variabili, casa ed. Ambrosiana, perché ha molti esempi ed esercizi.

Lo spazio $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ (per noi sarà $N=2$ o $N=3$)

$\mathbb{R}^N$ è l'insieme dei <u>vettori N-dimensionali</u>

$$\underline{v} = (v_1, \dots, v_N) \quad \text{con} \quad v_i \in \mathbb{R}, \ i=1 \dots N.$$

La <u>norma</u> di un vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$ è il numero ≥ 0

$$|\underline{v}|_N = \sqrt{\sum_{i=1}^N v_i^2}\,.$$

Il <u>prodotto scalare</u> tra due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^N$ è il numero

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle_N = \sum_{i=1}^N v_i w_i\,.$$

Notiamo che $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle_N = \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle_N$ e che, quando $\underline{w} = \underline{v}$,

$$\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle_N = |\underline{v}|_N^2\,.$$

L'opposto del vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^N$ è

$$-\underline{v} = (-v_1, \dots, -v_N)$$

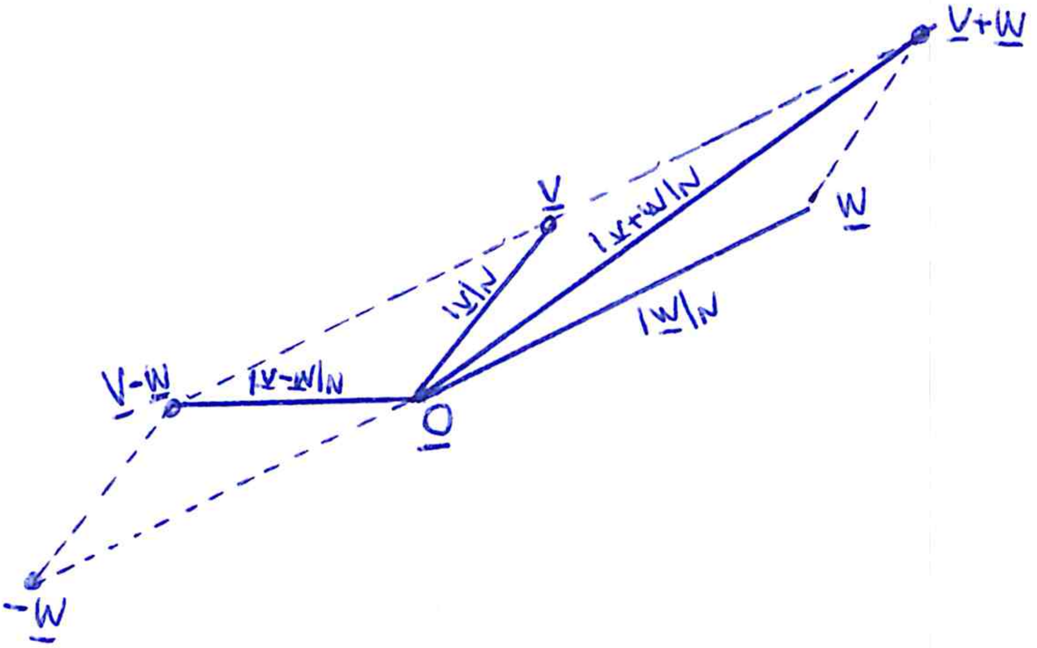
e per definizione di norma si ha $|-\underline{v}|_N = |\underline{v}|_N$.

La somma di due vettori $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^N$ è il vettore

$$\underline{v} + \underline{w} = (v_1 + w_1, \dots, v_N + w_N),$$

che si rappresenta (nel piano $\mathbb{R}^2$) con la regola del parallelogramma (nello spazio $\mathbb{R}^3$, del parallelepipedo);

La norma della differenza $|\underline{v} - \underline{w}|_N$ (chiaramente, $\underline{v} - \underline{w}$ è una abbreviazione di $\underline{v} + (-\underline{w})$) esprime la distanza fra $\underline{v}$ e $\underline{w}$. In particolare $|\underline{v}|_N$ è la distanza di $\underline{v}$ dall'origine $\underline{O} = (0, \dots, 0)$.



Vale la diseguaglianza triangolare (illustrata in figura)

$$|\underline{v} + \underline{w}|_N \le |\underline{v}|_N + |\underline{w}|_N \quad \forall\, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^N.$$

Si noti che risulta, in qualsiasi dimensione N,

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle_N = |\underline{v}|_N \, |\underline{w}|_N \cos\theta ,$$

ove θ è l'angolo tra i vettori $\underline{v}$ e $\underline{w}$ (nel piano da essi individuato). Ci torneremo sopra....

La <u>palla N-dimensionale</u> di centro $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N$ e raggio $R>0$ è l'insieme

$$B(\underline{x}_0, R) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N : \ |\underline{x} - \underline{x}_0|_N < R \} .$$

<u>Definizione</u> Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^N$ è <u>aperto</u> se per ogni $\underline{x}_0 \in A$ esiste $R>0$ tale che $B(\underline{x}_0, R) \subset A$.

<u>Esempi</u>:

$\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N : \ \sum_{i=1}^{N} x_i^2 > 1 \}$ è aperto in $\mathbb{R}^N$

$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 < y^2 \}$ è aperto in $\mathbb{R}^2$

$\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 - y \geq 0 \}$ non è aperto in $\mathbb{R}^2$.

Sono aperti, in linea generale, gli insiemi descritti da disuguaglianze <u>strette</u>

<u>Definizione</u> Un sottoinsieme $B \subseteq \mathbb{R}^N$ è <u>chiuso</u> se il suo complementare $B^c = \mathbb{R}^N \setminus B$ è aperto.

<u>Esempi</u> $\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^N : \ |\underline{x}|_N \leq 1 \}$ è chiuso in $\mathbb{R}^N$.

$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ |x|+|y|\leq 1\}$ è chiuso in $\mathbb{R}^2$.

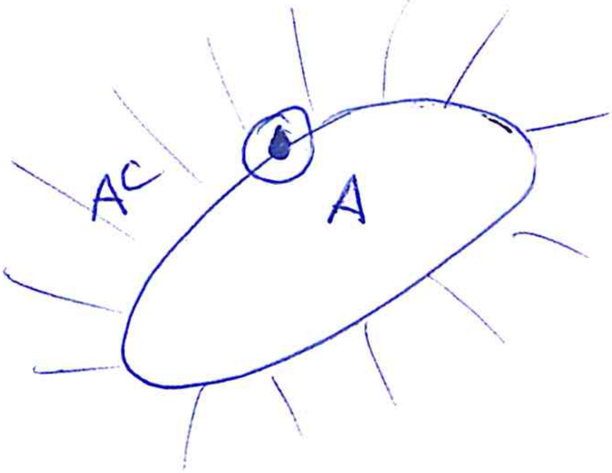
$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \ 0<x<1, \ 1\leq y\leq 2\}$ non è né chiuso, né aperto in $\mathbb{R}^2$.

Se $A\subseteq\mathbb{R}^N$ è aperto, l'insieme

$$\partial A = \{\underline{x}\in A^c : \text{ ogni } B(\underline{x},r) \text{ interseca } A\}$$

è la frontiera di A. Si dimostra che

$$\bar{A} = A\cup\partial A \quad \text{è chiuso (è chiamato la chiusura di } A\text{)}.$$



Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$

Parliamo anzitutto di continuità e limiti. Sia $A\subseteq\mathbb{R}^N$ un aperto e sia $f: A\to\mathbb{R}$ una funzione di N variabili, definita in A.

Definizione Diciamo che f è continua nel punto $\underline{x}_0\in A$ se per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che

$$|\underline{x}-\underline{x}_0|_N<\delta \implies |f(\underline{x})-f(\underline{x}_0)|<\varepsilon.$$

Diciamo che f è continua in A se è continua in ogni punto di A.

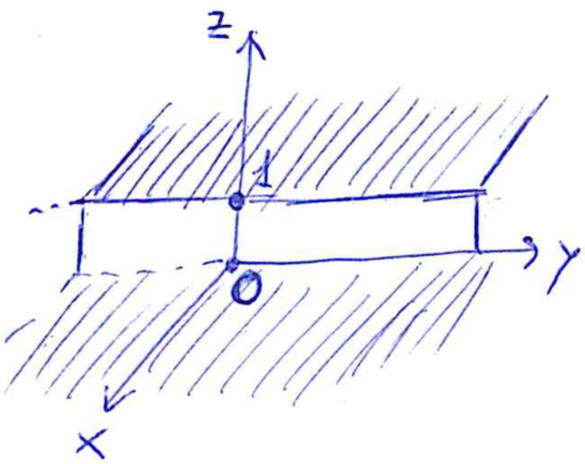
Esempi (1) La funzione $f: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $f(\underline{x}) = |\underline{x}|_N$, è continua: infatti, fissato arbitrariamente $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^N$, si ha

$$\big| |\underline{x}|_N - |\underline{x}_0|_N \big| \leq |\underline{x} - \underline{x}_0|_N \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^N,$$

quindi basta applicare la definizione di continuità con $\delta = \varepsilon$.

(2) La funzione $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da $f(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ se } x<0, y \in \mathbb{R}, \\ 0 \text{ se } x \geq 0, y \in \mathbb{R}, \end{cases}$

ha per grafico un "marciapiede" infinito: ogni punto $(0, y_0)$



è di discontinuità per f in quanto, qualunque sia $\delta > 0$ si ha

$$0 < x < \delta, \; y \in \mathbb{R} \Rightarrow |f(x,y) - f(0,y_0)| = 1;$$

quindi se $\varepsilon < 1$ la definizione di continuità non è soddisfatta.

Osservazione. Somme $(f+g)$, prodotti $(f \cdot g)$, quozienti $\left(\frac{f}{g}\right)$, composizioni $(f(g(x)))$, se ben definite, sono continue quando f e g sono continue. Quindi i polinomi in N variabili sono funzioni continue. Un polinomio di grado 3 in 2 variabili è dato da

$$P(x,y) = b_0 + b_1 x + c_1 y + b_2 x^2 + c_2 xy + d_2 y^2 + b_3 x^3 + c_3 x^2 y + d_3 x y^2 + e_3 y^3.$$

<u>Definizione</u> Sia $f: A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto. Se $\underline{x}_0 \in \bar{A}$ e se $L \in \mathbb{R}$, diciamo che

$$\lim_{\substack{\underline{x}\to\underline{x}_0 \\ \underline{x}\in A}} f(\underline{x}) = L$$

se accade che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\underline{x}\in A,\ |\underline{x}-\underline{x}_0|_N < \delta \implies |f(\underline{x}) - L| < \varepsilon.$$

Osserviamo che la precisazione $\underline{x}\in A$ è necessaria solo quando $\underline{x}_0 \in \partial A$; se $\underline{x}_0 \in A$ non serve.

Inoltre, nel caso in cui $\underline{x}_0 \in A$, questa definizione, scegliendo $L = f(\underline{x}_0)$, dà la continuità di f in $\underline{x}_0$. Precisamente: se $\underline{x}_0 \in A$,

$$f \text{ continua in } \underline{x}_0 \iff \exists \lim_{\underline{x}\to\underline{x}_0} f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0).$$

Se invece $\underline{x}_0 \in \partial A$, l'esistenza del limite L permette di <u>estendere</u> f <u>con continuità</u> nel punto $\underline{x}_0$, ponendo $f(\underline{x}_0) = L$.

Definiamo i limiti $\pm\infty$ (che non permettono estensioni per continuità!)

$$\lim_{\substack{\underline{x}\to\underline{x}_0 \\ \underline{x}\in A}} f(\underline{x}) = +\infty \iff \begin{cases} \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tale che} \\ \underline{x}\in A,\ |\underline{x}-\underline{x}_0|_N < \delta \implies f(\underline{x}) > M; \end{cases}$$

$$\lim_{\substack{\underline{x}\to\underline{x}_0 \\ \underline{x}\in A}} f(\underline{x}) = -\infty \iff \begin{cases} \forall M > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tale che} \\ \underline{x}\in A,\ |\underline{x}-\underline{x}_0|_N < \delta \implies f(\underline{x}) < -M. \end{cases}$$

I limiti, finchè siamo in una variabile ($N=1$) sono abbastanza facili da calcolare. Invece, se $N>1$, sono difficili!

Esempio Sia $g(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Questa funzione è continua, perchè quoziente ben definito di polinomi, in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Esiste o no il limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) \quad ?$$

La risposta è no. Infatti, possiamo decidere di tendere a $(0,0)$ lungo la retta $y=\lambda x$, con $\lambda \in \mathbb{R}$, e otteniamo

$$\lim_{x\to 0} g(x,\lambda x) = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{(1+\lambda^2)x^2} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Il numero $\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$ varia al variare della retta. Quindi, a seconda del modo in cui ci avviciniamo all'origine, otteniamo valori diversi: quindi nessun $L \in \mathbb{R}$ può verificare la definizione di limite.

Pertanto, non possiamo estendere g al piano $\mathbb{R}^2$, mantenendola continua. Per giunta

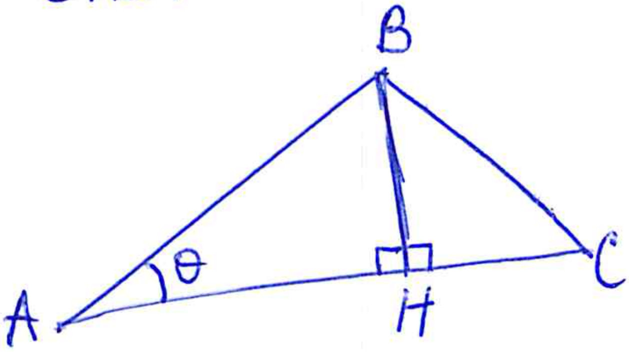
$$\lim_{y\to 0} \lim_{x\to 0} g(x,y) = 0 = \lim_{x\to 0} \lim_{y\to 0} g(x,y),$$

e ciò dimostra che due limiti iterati non sono la stessa cosa di un limite in due variabili.

Torniamo adesso a considerare il prodotto scalare $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_N$.

Mettiamoci in $\mathbb{R}^2$ e facciamo alcune precisazioni.

1. Teorema di Carnot Dato un triangolo ABC, si ha
$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\,\overline{AB}\,\overline{AC}\cos\theta,$$
ove θ è l'angolo fra AB e AC.



Infatti:

$$\overline{BC}^2 = \overline{CH}^2 + \overline{BH}^2$$
(per il teorema di Pitagora). Quindi
$$\overline{BC}^2 = \left(\overline{AC} - \overline{AH}\right)^2 + \overline{AB}^2\sin^2\theta =$$
$$= \left(\overline{AC} - \overline{AB}\cos\theta\right)^2 + \overline{AB}^2\sin^2\theta =$$
$$= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2\cos^2\theta - 2\,\overline{AC}\,\overline{AB}\cos\theta + \overline{AB}^2\sin^2\theta =$$
$$= \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,\overline{AC}\,\overline{AB}\cos\theta \quad (\text{perché } \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1).$$

2. $\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle_N = |\underline{x}|_N |\underline{y}|_N \cos\theta$, ove θ è l'angolo fra $\underline{x}$ e $\underline{y}$.

Mettiamoci nel piano generato da $\underline{x}$ e $\underline{y}$, e scegliamo nel teorema di Carnot $A = \underline{0}$, $B = \underline{x}$, $C = \underline{y}$. Allora $|\underline{x}|_N = \overline{AB}$, $|\underline{y}|_N = \overline{AC}$ e dunque
$$|\underline{x}|_N^2 + |\underline{y}|_N^2 - 2|\underline{x}|_N|\underline{y}|_N\cos\theta = \overline{BC}^2 = |\underline{x}-\underline{y}|_N^2 = \langle \underline{x}-\underline{y}, \underline{x}-\underline{y}\rangle_N =$$

$$= |\underline{x}|_N^2 + |\underline{y}|_N^2 - 2\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle_N ,$$

e pertanto

$$|\underline{x}|_N |\underline{y}|_N \cos\theta = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle_N .$$

3. In $\mathbb{R}^2$, siano $\underline{P} = (x_P, y_P)$, $\underline{Q} = (x_Q, y_Q)$, e sia θ l'angolo orientato da $\underline{P}$ verso $\underline{Q}$. Allora

$$\cos\theta = \frac{x_P x_Q + y_P y_Q}{|\underline{P}|_2 |\underline{Q}|_2} = \frac{\langle \underline{P}, \underline{Q}\rangle_2}{|\underline{P}|_2 |\underline{Q}|_2},$$

$$\sin\theta = \frac{x_P y_Q - x_Q y_P}{|\underline{P}|_2 |\underline{Q}|_2} = \frac{1}{|\underline{P}|_2 |\underline{Q}|_2} \det\begin{pmatrix} x_P & y_P \\ x_Q & y_Q \end{pmatrix}.$$

La 1ª formula segue dalla precisazione 2, la seconda si ottiene scrivendo $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ e utilizzando la 1ª formula; si trova

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{(x_P x_Q + y_P y_Q)^2}{|\underline{P}|_2^2 |\underline{Q}|_2^2} = \frac{(x_P^2 + y_P^2)(x_Q^2 + y_Q^2) - (x_P x_Q + y_P y_Q)^2}{|\underline{P}|_2^2 |\underline{Q}|_2^2} =$$

$$= \frac{(x_P y_Q - x_Q y_P)^2}{|\underline{P}|_2^2 |\underline{Q}|_2^2},$$

ed estraendo la radice quadrata si ha la tesi (scegliendo il segno giusto in base all'orientazione prefissata).