Teorema 14 [di Sobolev]. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ aperto, $N>1$.

(i) Se $1 \le p < N$, esiste $c_{N,p}>0$ tale che, per ogni $q \in [p, p^*]$, si ha
$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c_{N,p} \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$
ove $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

(ii) Se $p=N$, per ogni $q<\infty$ esiste $c_{N,q}>0$ tale che
$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c_{N,q} \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^N(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,N}(\Omega);$$

(iii) Se $p>N$, esiste $c_{N,p}>0$ tale che
$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \le c_{N,p} \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$
ove $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$ e $[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup\limits_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} |x-y|^{-\alpha} |u(x)-u(y)|$.

dim. (i) Supponiamo dapprima $p=1$. Possiamo supporre, per densità, che $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Estendiamo u a 0 in $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.
Poiché, per $1 \le i \le N$,
$$u(x) = -\int_{x_i}^{+\infty} D_i u(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots x_N)\,dt = \int_{-\infty}^{x_i} D_i u(x_1,\dots,x_{i-1},s,x_{i+1},\dots x_N)\,ds,$$
si ha
$$2\,|u(x)| \le \int_{\mathbb{R}} |D_i u(x_1,\dots,x_{i-1},t,x_{i+1},\dots x_N)|\,dt,$$
da cui
$$|u(x)|^{1^*} = |u(x)|^{\frac{N}{N-1}} \le 2^{-\frac{N}{N-1}} \prod_{i=1}^N \left[\int_{\mathbb{R}} |D_i u(x_1,\dots x_{i-1},t,x_{i+1},\dots,x_N)|\,dt\right]^{\frac{1}{N-1}}.$$
Denotiamo gli N fattori all'ultimo membro con $g_i(\langle x_i\rangle) = g_i(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots x_N)$.

Allora $\prod_{i=1}^{N} g_i : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, ma le singole g_i sono definite su $\mathbb{R}^{N-1}$. Proviamo la disuguaglianza

$$(*) \qquad \left\| \prod_{i=1}^{N} g_i \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le \prod_{i=1}^{N} \|g_i\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} .$$

Usiamo l'induzione su N. Per $N=2$ si ha l'uguaglianza

$$\left\| \prod_{i=1}^{2} g_i \right\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} |g_1(y)\, g_2(x)|\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} |g_2|\, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} |g_1|\, dy = \prod_{i=1}^{2} \|g_i\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Se la $(*)$ vale per N, proviamola per $N+1$.

$$\left\| \prod_{i=1}^{N+1} g_i \right\|_{L^1(\mathbb{R}^{N+1})} = \int_{\mathbb{R}^{N+1}} \left| \prod_{i=1}^{N+1} g_i(\langle x_i \rangle) \right| dx_1 \cdots dx_{N+1} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left| \prod_{i=1}^{N} g_i(\langle x_i \rangle) \right| \left| g_{N+1}(\langle x_{N+1} \rangle) \right| dx_1 \cdots dx_N \right] dx_{N+1} \le$$

(Hölder) $$\le \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left| \prod_{i=1}^{N} g_i(\langle x_i \rangle) \right|^{\frac{N}{N-1}} dx_1 \cdots dx_N \right]^{\frac{N-1}{N}} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |g_{N+1}(\langle x_{N+1} \rangle)|^N \right]^{\frac{1}{N}} dx_{N+1}$$

$$= \|g_N\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \cdot \int_{\mathbb{R}} \left\| \prod_{i=1}^{N} |g_i(\langle x_i \rangle)|^{\frac{N}{N-1}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{N-1}{N}} dx_{N+1} \le$$

(ipotesi induttiva) $$\le \|g_N\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \left[\prod_{i=1}^{N} \left\| |g_i|^{\frac{N}{N-1}} \right\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} \right]^{\frac{N-1}{N}} dx_{N+1} =$$

$$= \|g_N\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{N} \left[\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |g_i|^N dx_1 \cdots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \cdots dx_N \right]^{\frac{1}{N}} dx_{N+1} \le$$

(Hölder) $$\le \|g_N\|_{L^N(\mathbb{R}^N)} \prod_{i=1}^{N} \left[\int_{\mathbb{R}^N} |g_i|^N dx_1 \cdots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \cdots dx_{N+1} \right]^{\frac{1}{N}} = \prod_{i=1}^{N+1} \|g_i\|_{L^N(\mathbb{R}^N)}.$$

Ciò prova il passo induttivo e la $(*)$. Dalla $(*)$ segue:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{1^*} dx \le 2^{-\frac{N}{N-1}} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \prod_{i=1}^N g_i(\langle x_i \rangle) \right|^{\frac{1}{N-1}} dx =$$

$$= 2^{-\frac{N}{N-1}} \left\| \prod_{i=1}^N |g_i|^{\frac{1}{N-1}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le 2^{-\frac{N}{N-1}} \prod_{i=1}^N \left\| |g_i|^{\frac{1}{N-1}} \right\|_{L^{N-1}(\mathbb{R}^{N-1})} =$$

$$= 2^{-\frac{N}{N-1}} \prod_{i=1}^N \|g_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{N-1})}^{\frac{1}{N-1}} = 2^{-\frac{N}{N-1}} \prod_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N-1}},$$

e dunque, essendo $1^* = \frac{N}{N-1}$,

$$\|u\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^N)} \le 2^{-\frac{N}{N-1}} \prod_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}^{\frac{1}{N}} \le \frac{2^{-\frac{N}{N-1}}}{N} \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$$

dove si è usata la disuguaglianza fra media geometrica e media aritmetica; dunque, essendo u e ∇u nulli fuori di Ω,

$$\|u\|_{L^{1^*}(\Omega)} \le \frac{1}{N \cdot 2^{\frac{N}{N-1}}} \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^1(\Omega)}.$$

Sia ora $1<p<N$ e consideriamo $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Si ha allora

$$D_i |u(x)|^{p^*/1^*} = \frac{p^*}{1^*} |u(x)|^{\frac{p^*}{1^*}-1} D_i u(x) \quad \text{q.o. in } \Omega.$$

Dunque per la stima già provata,

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{p^*/1^*} = \left\| |u|^{p^*/1^*} \right\|_{L^{1^*}(\mathbb{R}^N)} \le \frac{1}{N \cdot 2^{\frac{N}{N-1}}} \frac{p^*}{1^*} \sum_{i=1}^N \left\| |u|^{\frac{p^*}{1^*}-1} |D_i u| \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \le$$

$$(\text{Hölder}) \le \frac{1}{N \cdot 2^{\frac{N}{N-1}}} \frac{p^*}{1^*} \left\| |u|^{\frac{p^*}{1^*}-1} \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \le$$

$$\left(\text{poiché } \frac{p^*}{1^*} - 1 = \frac{p^*}{p'}\right) \le \frac{1}{N \cdot 2^{\frac{N}{N-1}}} \frac{p^*}{1^*} \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}^{p^*/p'} \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Ne segue

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le \frac{1}{N \cdot 2^{\frac{N}{N-1}}} \frac{p(N-1)}{N-p} \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Proviamo (iii): sia, al solito, $u \in C_0^\infty(\Omega)$, estesa a 0 fuori di Ω. Siano $x, y \in \Omega$, sia $d = |x-y|$, e fissiamo $B = B_x \cap B_y$, dove $B_x = B(x,d)$, $B_y = B(y,d)$. Se $z \in B$,

$$|u(x)-u(y)| \leq |u(x)-u(z)| + |u(z)-u(y)|,$$

$$m_N(B)\, |u(x)-u(y)| \leq \int_B |u(x)-u(z)|\, dz + \int_B |u(z)-u(y)|\, dz;$$

ma

$$\int_B |u(x)-u(z)|\, dz \leq \int_{B_x} |u(x)-u(z)|\, dz =$$

$$= \int_{\partial B(0,1)} \int_0^d t^{N-1} |u(x)-u(x+tw)|\, dt\, dw \leq$$

$$\leq \int_{\partial B(0,1)} \int_0^d \int_0^t t^{N-1} \left|\frac{\partial}{\partial s} u(x+sw)\right| ds\, dt\, dw \leq$$

$$\leq d^N \int_{\partial B(0,1)} \int_0^d \sum_{i=1}^N |D_i u(x+sw)|\, |w_i|\, ds\, dw \leq$$

$$\leq d^N \int_{B_x} \sum_{i=1}^N |D_i u(z)|\, |z-x|^{1-N}\, dz.$$

Siccome $z \mapsto |z-x|^{1-N} \in L^N(B_x)$ (visto che $p > N \Leftrightarrow p' < \frac{N}{N-1} \Leftrightarrow (N-1)p' < N$), si ha

$$\int_B |u(x)-u(z)|\, dz \leq d^N \left[\int_{B_x} \left(\sum_{i=1}^N |D_i u|\right)^p dz\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{B_x} |z-x|^{(1-N)p'} dz\right]^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= c_N\, d^N \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^p(B_x)} \cdot \left[\int_0^d r^{N-1} r^{(1-N)p'} dr\right]^{\frac{1}{p'}} =$$

$$= c_{N,p} \sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^p(B_x)}\, d^{N+1-\frac{1}{p}} \quad \left(\text{essendo } N + (N+(1-N)p')\tfrac{1}{p'} = N+1-\tfrac{1}{p}\right).$$

Infine, la disuguaglianza

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C_{N,p} \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \quad p \leq q < p^*,$$

si ottiene per interpolazione: infatti vale la

Proposizione 15 Se $f \in L^p(\Omega) \cap L^r(\Omega)$, $1 \leq p < r \leq \infty$, allora $f \in L^q(\Omega)$ per ogni $q \in [p,r]$, e

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p^{1-\lambda} \cdot \|f\|_r^{\lambda}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{p} + \frac{\lambda}{r}.$$

dim. Sia $r<\infty$. Poiché $1 = \frac{q(1-\lambda)}{p} + \frac{q\lambda}{r}$, gli esponenti $\frac{p}{q(1-\lambda)}$, $\frac{r}{q\lambda}$ sono coniugati. Dunque per Hölder

$$\int_\Omega |f(x)|^q dx \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{q(1-\lambda)}{p}} \left(\int_\Omega |f(x)|^r dx\right)^{\frac{q\lambda}{r}},$$

ossia

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{1-\lambda} \|f\|_{L^r(\Omega)}^{\lambda}.$$

Se $r=\infty$, si ha $1 = \frac{q}{p}(1-\lambda)$. Allora

$$\int_\Omega |f(x)|^q dx \leq \int_\Omega |f(x)|^p dx \ \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{q-p}$$

da cui

$$\|f\|_{L^q(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p}{q}} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{1-\frac{p}{q}} = \|f\|_{L^p(\Omega)}^{1-\lambda} \|f\|_{L^\infty(\Omega)}^{\lambda}. \ \square$$

Similmente

$$\int_B |u(z)-u(y)|\,dy \le C_{N,p} \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^p(B_y)}\, d^{N+1-\frac{1}{p}}.$$

Perciò

$$m(B)\,|u(x)-u(y)| \le C_{N,p} \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}\, d^{N+1-\frac{1}{p}}.$$

D'altra parte

$$m(B) \ge C_N d^N,$$

per cui

$$|u(x)-u(y)| \le C_{N,p} |x-y|^{1-\frac{N}{p}} \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}$$

per ogni $x,y\in\Omega$. Dunque u è uniformemente continua in Ω, e di conseguenza, con $\alpha = 1-\frac{N}{p}$,

$$[u]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \le C_{N,p} \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Per densità, la tesi vale per ogni $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Resta il caso (ii), di cui omettiamo la dimostrazione. □

Concludiamo con l'analogo multidimensionale del lemma 3.

<u>Proposizione 16</u> Sia $f\in L^1_{loc}(Q)$, ove $Q=\prod_{j=1}^{N}]a_j,b_j[$. Se f ha le derivate deboli $D_1 f,\dots,D_N f$ nulle, allora esiste $C\in\mathbb{R}$ tale che $f(x)=C$ q.o. in Q.

La dimostrazione si basa sul seguente lemma, peraltro un piuttosto noioso.

Lemma 17 Se $\phi \in C_0^\infty(Q)$ e $\int_Q \phi(x)\,dx = 0$, allora esistono $\phi_1, \dots, \phi_N \in C_0^\infty(Q)$, tali che

$$\phi = \sum_{j=1}^N \phi_j, \qquad \int_{a_j}^{b_j} \phi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_j, \dots, x_N)\,dt = 0 \quad \text{per } j = 1, \dots, N.$$

Prima di dimostrare il lemma, vediamo come da esso si deduce la proposizione. Per ipotesi, la nostra f verifica

$$\int_Q f\, D_i \varphi\, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(Q).$$

Osserviamo che se $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ e in più $\int_Q \varphi(x)\,dx = 0$, allora per il Lemma 17 esistono $\varphi_1, \dots, \varphi_N \in C_0^\infty(Q)$ tali che

$$\varphi = \sum_{j=1}^N \varphi_j, \qquad \int_{a_j}^{b_j} \varphi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_N)\,dt = 0.$$

Quindi, posto per $j = 1, \dots, N$

$$\theta_j(x) = \int_{a_j}^{x_j} \varphi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_N)\,dt,$$

si ha $D_j \theta_j = \varphi_j$, $\theta_j \in C_0^\infty(Q)$ e dunque, per ipotesi,

$$\int_Q f \varphi_j\, dx = \int_Q f\, D_j \theta_j\, dx = 0, \quad j = 1 \dots N.$$

Ciò premesso, se $f \equiv 0$ abbiamo finito. Altrimenti, esiste $\phi_0 \in C_0^\infty(Q)$ tale che

$$\int_Q f \phi_0\, dx = 1.$$

Di conseguenza

$$\int_Q \phi_0\,dx = \lambda \neq 0\,,$$

perchè in caso contrario, per quanto detto prima, avremmo $\int_Q f\phi_0\,dx = 0$. Perciò si può scrivere

$$\int_Q f\phi_0\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_Q \phi_0\,dx\,.$$

Sia ora $\varphi \in C_0^\infty(Q)$. Allora

$$\int_Q f\varphi\,dx = \int_Q f\left\{\left(\varphi - \frac{1}{\lambda}\left[\int_Q \varphi\,d\xi\right]\phi_0\right) + \frac{1}{\lambda}\left[\int_Q \varphi\,d\xi\right]\phi_0\right\}dx =$$

$$= \int_Q f\left(\varphi - \frac{1}{\lambda}\left[\int_Q \varphi\,d\xi\right]\phi_0\right)dx + \frac{1}{\lambda}\left[\int_Q \varphi\,d\xi\right]\int_Q f\phi_0\,dx =$$

$$= 0 + \frac{1}{\lambda}\int_Q \varphi\,d\xi \cdot 1\,,$$

in quanto $\varphi - \frac{1}{\lambda}\left[\int_Q \varphi\,d\xi\right]\phi_0 \in C_0^\infty(Q)$ ed ha integrale nullo su Q. Ne segue

$$\int_Q \left[f - \frac{1}{\lambda}\right]\varphi\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\,,$$

e per il lemma 2 si ottiene $f \equiv \frac{1}{\lambda}$ q.o. in Q. Π

Proviamo infine il lemma 17. Per $j=1\ldots N$ sia u_j una funzione di $C_0^\infty(a_j, b_j)$ con $\int_{a_j}^{b_j} u_j(t)\,dt = 1$.

Poi, fissata $\phi \in C_0^\infty(Q)$ con $\int_Q \phi(x)\,dx = 0$, poniamo per $j = 1, \dots, N$

$$\psi_j(x_j, \dots, x_N) \doteq \int_{a_1}^{b_1} \cdots \int_{a_{j-1}}^{b_{j-1}} \phi(t_1, \dots, t_{j-1}, x_j, \dots, x_N)\,dt_1 \cdots dt_{j-1}$$

$$\omega_j(x) = u_1(x_1)\,u_2(x_2) \cdot \ldots \cdot u_{j-1}(x_{j-1})\,\psi_j(x_j, \dots, x_N).$$

Allora si ha:

- $\psi_j \in C_0^\infty(Q_j)$, ove $Q_j = \prod_{h=j}^{N} (a_h, b_h)$,

$$\int_{Q_j} \psi_j(x_j, \dots, x_N)\,dx_j \cdots dx_N = \int_Q \phi(x)\,dx = 0,$$

- $\omega_j \in C_0^\infty(Q)$, $\int_Q \omega_j(x)\,dx = \int_{Q_j} \psi_j(x_j, \dots, x_N)\,dx_j \cdots dx_N = 0$.

Poniamo infine

$$\phi_1 = \phi - \omega_2, \quad \phi_j = \omega_j - \omega_{j+1} \ (2 \le j \le N-1), \quad \phi_N = \omega_N.$$

Allora $\phi_j \in C_0^\infty(Q)$ per $j = 1, \dots, N$, e $\phi = \sum_{j=1}^N \phi_j$. In più

$$\int_{a_1}^{b_1} \phi_1(t, x_2, \dots, x_N)\,dt = \int_{a_1}^{b_1} \phi(t, x_2, \dots, x_N)\,dt - \int_a^b u_1(t)\,dt \cdot \psi_1(x_1, \dots, x_N) =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \phi(t, x_2, \dots, x_N)\,dt - \psi_1(x_1, \dots, x_N) = 0,$$

$$\int_{a_j}^{b_j} \phi_j(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_N)\,dt =$$

$$= u_1(x_1) \cdot \ldots \cdot u_{j-1}(x_{j-1}) \cdot \left[\int_{a_j}^{b_j} \psi_j(t, x_{j+1}, \dots, x_N)\,dt - \int_{a_j}^{b_j} u_j(t)\,dt \cdot \psi_{j+1}(x_{j+1}, \dots, x_N) \right] =$$

$$= u_1(x_1)\cdot\ldots\cdot u_{j-1}(x_{j-1})\cdot\left[\int_{a_j}^{b_j}\psi_j(t,x_{j+1},\ldots,x_N)\,dt-\psi_{j+1}(x_{j+1},\ldots,x_N)\right]=0,$$

$(j=2,\ldots,N-1)$,

$$\int_{a_N}^{b_N}\phi_N(x_1,\ldots,x_{N-1},t)\,dt = u_1(x_1)\cdot\ldots\cdot u_{N-1}(x_{N-1})\cdot\int_{a_N}^{b_N}\psi_N(t)\,dt =$$

$$= u_1(x_1)\cdot\ldots\cdot u_{N-1}(x_{N-1})\cdot\int_Q \phi(x)\,dx = 0.$$

Ciò prova il lemma. □