Teorema 6 Sia Ω un aperto di $\mathbb{R}^N$, siano $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty[$. Allora
$$W^{m,p}(\Omega) = H^{m,p}(\Omega).$$

dim. Sappiamo che $H^{m,p}(\Omega) \subseteq W^{m,p}(\Omega)$. Sia allora $u \in W^{m,p}(\Omega)$ e sia $\varepsilon > 0$. Poniamo
$$\Omega_{-1} = \Omega_0 = \phi, \quad \Omega_n = \{x \in \Omega : |x|_N < n,\ d(x, \partial\Omega) > \tfrac{1}{n}\}.$$
Gli insiemi $\{\Omega_n\}_{n \geq -1}$ sono aperti, $\Omega_n \subset \Omega_{n+1}$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n = \Omega$.

Sia $\{\psi_n\}$ una partizione dell' unità, cioè una successione di funzioni $C_0^\infty(\Omega)$ tali che:
$$0 \leq \psi_n(x) \leq 1 \quad \forall x \in \Omega,$$
$$\operatorname{supp} \psi_n \subset \Omega_{n+1} \setminus \Omega_{n-1},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x) \equiv 1 \quad \forall x \in \Omega.$$

Sia poi k_n un mollificatore di classe C^∞, con
$$\operatorname{supp} k_n \subset B\left(0, \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right),$$
$$\| k_n * (\psi_n u) - (\psi_n u) \|_{m,p} < \frac{\varepsilon}{2^n};$$
allora si ha, per una osservazione già fatta,
$$\operatorname{supp} k_n * (\psi_n u) \subseteq \overline{B\left(0, \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) + (\Omega_{n+1} \setminus \Omega_{n-1})};$$
poichè risulta
$$d(z, \partial\Omega) - |y| \leq d(y+z, \partial\Omega) \leq d(z, \partial\Omega) + |y|,$$

avremo per $y \in B\left(0, \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$ e $z \in \Omega_{n+1} \setminus \Omega_{n-1}$:

$$\frac{1}{n+2} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} < d(y+z, \partial\Omega) \leq \frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{1}{n-2} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n-2},$$

ed anche $|y+z|_N \leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + n < n+2$. Ciò mostra che

$$\text{supp}\, k_n * (\psi_n u) \subseteq \overline{B\left(0, \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) + (\Omega_{n+1} \setminus \Omega_{n-1})} \subseteq \Omega_{n+2} \setminus \Omega_{n-2}.$$

Poniamo adesso

$$v_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [k_n * (\psi_n u)](x).$$

La serie converge perché per ogni $x \in \Omega$ esiste m tale che

$$x \in \Omega_{m+2} \setminus \Omega_{m-2},$$

e dunque nella somma sono non nulli solo gli addendi da $n = m-3$ a $n = m+4$. Inoltre $v_\varepsilon \in C^\infty$ perché

$$D^\alpha v_\varepsilon(x) = \sum_{n=1}^{\infty} [D^\alpha k_n * (\psi_n u)](x)$$

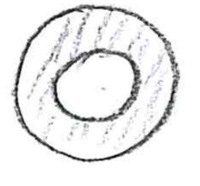
e la serie continua a convergere per lo stesso motivo. Si ha poi

$$\|u - v_\varepsilon\|_{m,p,\Omega_k} = \left\| \sum_{n=1}^{k+1} [k_n * (\psi_n u) - (\psi_n u)] \right\|_{m,p,\Omega_k} \leq$$

$$\leq \sum_{n=1}^{k+1} \| k_n * (\psi_n u) - (\psi_n u) \|_{m,p} < \sum_{n=1}^{k+1} \frac{\varepsilon}{2^n} < \varepsilon,$$

e per $k \to \infty$, per monotonia, $\|u - v_\varepsilon\|_{m,p} \leq \varepsilon$.

Ciò prova che $u \in \overline{\{v \in C^\infty(\Omega) : \|v\|_{m,p} < \infty\}} \subseteq H^{m,p}(\Omega)$. □

Esempio. Sia $\Omega = B(\underline{0},2) \setminus \overline{B(\underline{0},1)} \subset \mathbb{R}^2$. 

La funzione
$$u(x,y) = \theta \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$
ove θ è l'argomento principale di $x+iy$, è in $W^{1,2}(\Omega)$ ma non appartiene alla chiusura di $C^m(\overline{\Omega})$ in $\|\cdot\|_{m,p}$. Le derivate deboli di u sono
$$u_x(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad u_y(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2},$$
come si verifica in modo facile ma laborioso, utilizzando le coordinate polari. Il fatto che u non sia approssimabile da funzioni di $C^m(\overline{\Omega})$ segue per assurdo, utilizzando il fatto che se $\{u_k\} \subseteq C^m(\overline{\Omega})$ convergesse a u in $\|\cdot\|_{1,2}$ allora, passando in coordinate polari, le u_k sarebbero 2π-periodiche mentre la u non lo è.

Esempi (1) Sia $Q = [-1,1] \times [-1,1]$. Allora $u(x,y) = |x| + |y|$ appartiene a $W^{1,\infty}(Q)$, con $u_x = \operatorname{sgn} x$, $u_y = \operatorname{sgn} y$.

(2) Sia $N=1$. La funzione di Heaviside, $H(x) = \chi_{[0,\infty[}(x)$ è in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, è derivabile q.o. con $H'(x) = 0$, ma non ha derivata debole in $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Infatti se $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$
$$\int_{\mathbb{R}} H(x)\varphi'(x)\,dx = \int_0^\infty \varphi'(x)\,dx = -\varphi(0) = -\langle \delta, \varphi \rangle$$
La "derivata debole" di H è la delta di Dirac, ma $\delta \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

(3) Se $N=1$, allora $\log|x| \in L^1(-a,a) \setminus W^{1,1}(-a,a)$. Infatti

$(\log|x|)' = \frac{1}{x} \notin L^1(-a,a)$.

(4) Se $N \geq 2$, allora $\log|x| \in W^{1,1}(B_R)$ con $D_i \log|x| = \frac{x_i}{|x|^2}$, $i=1\ldots N$.

Proposizione 7 Sia $N=1$, sia $u \in W^{1,1}(I)$ con $u'=0$. Allora u è q.o. costante in I.

dim. Per ipotesi,
$$\int_I u\varphi' \, dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I),$$
e per il lemma 3 si ha la tesi. □

Proposizione 8 Sia $N=1$, siano $u, f \in L^1(I)$. Se $u'=f$ (debole) in I, allora esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che
$$u(x) = \int_a^x f(t)\,dt + C, \qquad \text{ove } a = \inf I$$

dim. La funzione $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,dt$ è continua e, per ogni $\varphi \in C_0^\infty(I)$,
$$\int_I \left(\int_a^x f(t)\,dt\right) \varphi'(x)\,dx = \int_a^b \int_a^x f(t)\,dt\, \varphi'(x)\,dx = \text{(Fubini-Tonelli)}$$
$$= \int_a^b \left[\int_t^b \varphi'(x)\,dx\right] f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\varphi(t)\,dt$$
Dunque
$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x) \quad \text{(debole)}.$$
Perciò
$$\int_I \left(u(x) - \int_a^x f(t)\,dt\right) \varphi'(x)\,dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(I).$$
Dal lemma 3 segue $u(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$. □

Definizione Sia $u: I \to \mathbb{R}$. Diciamo che u è <u>assolutamente continua</u> su I se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per qualunque famiglia finita di sottointervalli disgiunti $[x_1, x_1']$, ..., $[x_m, x_m']$ di I, con $\sum_{i=1}^{m} |x_i' - x_i| < \delta$, risulta

$$\sum_{i=1}^{m} |u(x_i') - u(x_i)| < \varepsilon .$$

Lo spazio delle funzioni assolutamente continue su I si denota con $AC(I)$. È chiaro che ogni $u \in AC(I)$ è uniformemente continua; il viceversa non è vero, poiché la funzione di Cantor non è assolutamente continua.

Si dimostrano i fatti seguenti:

1. $u \in AC(I) \Longrightarrow u$ è derivabile q.o. in I, $u' \in L^1(I)$ e, posto $I = [a,b]$,
$$u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,dt \quad \forall x \in [a,b].$$

2. Se $u(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c$, con $f \in L^1(a,b)$, allora $u \in AC[a,b]$ e $u' = f$ q.o.

3. In particolare, $W^{1,1}(a,b) = AC[a,b]$. Infatti, se $u \in W^{1,1}(a,b)$, per la proposizione 8 si ha $u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt + c$, quindi $u \in AC[a,b]$. Se $u \in AC[a,b]$, allora $u' \in L^1(a,b)$ e $u(x) = u(a) + \int_a^x u'(t)\,dt$, dunque u ha u' come derivata debole, ossia $u \in W^{1,1}(a,b)$.

Corollario 9 Sia $N=1$, sia $u \in W^{1,2}(I)$. Allora u è una funzione hölderiana di esponente $1/2$.

dim. La derivata debole di u è $u' \in L^2(I)$. Dunque se I è limitato, $u' \in L^1(I)$, altrimenti $u' \in L^1_{loc}(I)$. In ogni caso per la proposizione 8

$$u(x) = \int_a^x u'(t)\,dt + c.$$

Perciò, se $x, y \in I$,

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u'(t)\,dt \right| \leq \|u'\|_2 \, |x-y| . \square$$

Stabilità per moltiplicazioni

Proposizione 10 Sia $u \in W^{m,p}(\Omega)$, sia $v \in C^m(\Omega)$ con $D^\alpha v \in L^\infty(\Omega)$ per $|\alpha| \leq m$. Allora $uv \in W^{m,p}(\Omega)$ e

$$D^\alpha(uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} u \, D^\beta v \qquad \forall\, |\alpha| \leq m.$$

dim Si fa per calcolo diretto. Sia $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Vediamo anzitutto un passo base, verificando che la derivata D_i debole del prodotto $u\varphi$ è $(D_i u)\varphi + u D_i \varphi$: infatti, per ogni $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega D_i(\varphi u)\psi\,dx = -\int_\Omega \varphi u\, D_i\psi\,dx = -\int_\Omega [u\, D_i(\psi\varphi) - u\,\psi\, D_i\varphi]\,dx =$$

$$= \int_\Omega [(D_i u)\varphi + u(D_i\varphi)]\,\psi\,dx .$$

Ciò premesso, si ha per $|\alpha| = 1$, $\alpha = e_i$:

$$\int_\Omega uv\, D_i\varphi\, dx = \int_\Omega v\left(D_i(\varphi u) - (D_i u)\varphi\right) dx =$$

$$= -\int_\Omega D_i v \cdot u\varphi\, dx - \int_\Omega v\, D_i u\, \varphi\, dx =$$

$$= -\int_\Omega \left[u D_i v + v D_i u\right]\varphi\, dx,$$

e ciò prova il primo passo. Sia ora $|\alpha| = k$, con $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$. Allora per quanto visto

$$D_1(uv) = D_1 u \cdot v + u D_1 v,$$

$$D_1^2(u,v) = D_1^2 u \cdot v + 2 D_1 u\, D_1 v + u D_1^2 v,$$

$$\cdots\cdots$$

$$D_1^{\alpha_1}(u,v) = \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_1}{\gamma_1} D_1^{\gamma_1} u\, D_1^{\alpha_1-\gamma_1} v.$$

Poi si passa a $D_2, D_2^2, \dots, D_2^{\alpha_2}$, ottenendo

$$D_2^{\alpha_2} D_1^{\alpha_1}(uv) = \sum_{\gamma_2=0}^{\alpha_2} \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_2}{\gamma_2}\binom{\alpha_1}{\gamma_1} D_2^{\gamma_2} D_1^{\gamma_1} u\, D_2^{\alpha_2-\gamma_2} D_1^{\alpha_1-\gamma_1} v,$$

e ripetendo con le altre derivazioni lo stesso procedimento,

$$D^\alpha(uv) = D_N^{\alpha_N} \cdots D_1^{\alpha_1}(uv) =$$

$$= \sum_{\gamma_N=0}^{\alpha_N} \cdots \sum_{\gamma_1=0}^{\alpha_1} \binom{\alpha_N}{\gamma_N} \cdots \binom{\alpha_1}{\gamma_1} D_N^{\gamma_N} \cdots D_1^{\gamma_1} u\, D_N^{\alpha_N-\gamma_N} \cdots D_1^{\alpha_1-\gamma_1} v =$$

$$= \sum_{\gamma \le \alpha} \binom{\alpha}{\gamma} D^\gamma u\, D^{\alpha-\gamma} v. \quad \square$$

<u>Corollario 11</u> Le funzioni di $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ a supporto compatto sono dense in $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

<u>dim</u>. Sia $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. Prendiamo $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ con $\psi \equiv 1$ su $B(0,1)$ e $\psi \equiv 0$ su $B(0,2)^c$. Allora per la proposizione 10

$$x \mapsto \psi\left(\frac{x}{k}\right) u(x) \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \quad \forall k \in \mathbb{N}^+,$$

e

$$D^\alpha \left[\psi\left(\frac{x}{k}\right) u(x)\right] - D^\alpha u(x) = \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \psi\left(\frac{x}{k}\right) D^\beta u(x) + \left[\psi\left(\frac{x}{k}\right) - 1\right] D^\alpha u(x).$$

Perciò

$$\| D^\alpha [\psi(\tfrac{\cdot}{k}) u] - D^\alpha u \|_p \leq \sum_{\beta < \alpha} \binom{\alpha}{\beta} k^{-|\alpha-\beta|} \|D^{\alpha-\beta}\psi\|_\infty \|D^\beta u\|_p + 2\left[\int_{|x|\geq k} |D^\alpha u|^p dx\right]^{1/p}$$

e l'ultimo membro tende a 0 per $k \to \infty$.
Poiché il supporto di $\psi(\frac{\cdot}{k})u$ è contenuto in $B(0,2k)$, si ha la tesi. $\square$

Consideriamo adesso un importante sottospazio chiuso di $W^{m,p}(\Omega)$.

<u>Definizione</u> $W_0^{m,p}(\Omega)$ è la chiusura di $C_0^\infty(\Omega)$ nella norma $\|\cdot\|_{m,p}$.

Se $\Omega = \mathbb{R}^N$ è facile provare che $W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N) = W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$:

infatti

Proposizione 12 $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ è denso in $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$.

<u>dim</u> Sia $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$. Dal corollario 11 sappiamo che, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $v \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ con supporto compatto K, tale che $\|u - v\|_{m,p} < \varepsilon$. Sia ora φ_ε un mollificatore di classe C^∞: la convoluzione $v * \varphi_\varepsilon$ verifica:

- $v * \varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ (perché il supporto di $v * \varphi_\varepsilon$ è contenuto in $\overline{K + B(0,\varepsilon)}$)
- $D^\alpha(v * \varphi_\varepsilon) = v * D^\alpha \varphi_\varepsilon = (D^\alpha v) * \varphi_\varepsilon \to D^\alpha v$ per $\varepsilon \to 0$, per ogni $|\alpha| \leq m$

Dunque $\|v * \varphi_\varepsilon - u\|_{m,p} \leq \|v * \varphi_\varepsilon - v\|_{m,p} + \|v - u\|_{m,p}$ è infinitesimo per $\varepsilon \to 0$. □

Teoremi di struttura in $W^{m,p}(\Omega)$

Il primo teorema è una maggiorazione valida per le funzioni di $W_0^{1,p}(\Omega)$, che permette di mostrare che la norma $\|\cdot\|_{1,p}$ è equivalente a $\sum_{i=1}^N \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}$ (senza il termine $\|u\|_{L^p(\Omega)}$); questa maggiorazione richiede però che Ω sia limitato.

Teorema 13 [disuguaglianza di Poincaré] Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$, sia $p>1$. Allora

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{p}{N}(\operatorname{diam}\Omega) \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

<u>dim</u>. Sia $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Fissato $y \in \Omega$, per $i=1,\dots,N$ si ha

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx = \int_\Omega |u(x)|^p D_i(x_i - y_i)\, dx = (\text{integrando per parti})$$

$$= -p \int_\Omega |u(x)|^{p-1} D_i u(x)\,(x_i - y_i)\, dx \leq$$

$$\leq p \int_\Omega |u(x)|^{p-1} \, |D_i u(x)| \, |x-y|_N \, dx \leq (\text{Hölder})$$

$$\leq p \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_\Omega |D_i u(x)|^p\right)^{1/p} \cdot \operatorname{diam}\Omega,$$

e semplificando

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq p\,(\operatorname{diam}\Omega)\, \|D_i u\|_{L^p(\Omega)}$$

Sommando fra 1 e N

$$N\,\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq p\,(\operatorname{diam}\Omega) \sum_{i=1}^{N} \|D_i u\|_{L^p(\Omega)},$$

e la tesi segue per densità. $\square$

Il secondo risultato è un teorema di immersione: le funzioni di $W_0^{1,p}(\Omega)$ hanno un grado di sommabilità migliore: sono in $L^q(\Omega)$ per $p \leq q \leq p^*$ (p^* opportuno) o sono addirittura continue.