Definizione 11 Una funzione $u \in C(\overline{\Omega})$ è <u>subarmonica</u> in Ω se per ogni aperto limitato Ω' con $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ e per ogni $v \in C(\overline{\Omega'})$ armonica in Ω' vale

$$\max_{\overline{\Omega'}} (u-v) = \max_{\partial\Omega'} (u-v).$$

Una funzione $u \in C(\overline{\Omega})$ è <u>superarmonica</u> in Ω se per ogni aperto limitato Ω' con $\overline{\Omega'} \subset \Omega$ e per ogni $v \in C(\overline{\Omega'})$ armonica in Ω' vale

$$\min_{\overline{\Omega'}} (u-v) = \min_{\partial\Omega'} (u-v).$$

È facile verificare che:

- ogni funzione armonica in Ω è subarmonica e superarmonica in Ω,
- u è subarmonica in Ω se e solo se $-u$ è superarmonica in Ω,
- se $u_1, \dots, u_m$ sono funzioni subarmoniche in Ω, allora $u = \max\{u_1, \dots, u_m\}$ è subarmonica in Ω.

Definizione 12 Sia $u \in C(\overline{\Omega})$. Fissata una palla B contenuta in Ω, denotiamo con u_B la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u_B = 0 & \text{in } B, \\ u_B = u & \text{su } \partial B \end{cases},$$

che esiste unica per il Lemma 3. Sia infine $M_B[u]$ la funzione

$$M_B[u] = \begin{cases} u & \text{in } \overline{\Omega} \setminus B \\ u_B & \text{in } B. \end{cases}$$

È chiaro che $M_B[u] \in C(\overline{\Omega})$.

Lemma 13 Se $u \in C(\overline{\Omega})$ è subarmonica in Ω, allora per ogni palla $B \subset \Omega$ la funzione $M_B[u]$ è subarmonica in Ω.

dim Se $B \subset \Omega$, per la subarmonicità di u e per definizione di $M_B[u]$,

$$\max_{\overline{B}} (u - M_B[u]) = \max_{\partial B} (u - M_B[u]) = 0,$$

cosicché $u \leq M_B[u]$ in $\overline{B}$ e dunque

$$u \leq M_B[u] \quad \text{in } \Omega.$$

Sia ora Ω' un aperto limitato con $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Se $v \in C(\overline{\Omega'})$ è armonica in Ω', sia $x_0 \in \overline{\Omega'}$ un punto di massimo per $M_B[u] - v$.

- Se $x_0 \in \partial\Omega'$, allora $\max_{\overline{\Omega'}} (M_B[u] - v) = (M_B[u] - v)(x_0) = \max_{\partial\Omega'} (M_B[u] - v)$, e siamo a posto.

- se $x_0 \in \Omega' \setminus B$, allora per la subarmonicità di u

$$\max_{\overline{\Omega}} \left(M_B[u]-v\right) = \left(M_B[u]-v\right)(x_0) = (u-v)(x_0) \leq \max_{\overline{\Omega}'} (u-v) =$$
$$= \max_{\partial\Omega'} (u-v) \leq \max_{\partial\Omega'} \left(M_B[u]-v\right),$$

e nuovamente siamo a posto;

- se, infine, $x_0 \in \Omega' \cap B$, allora essendo $M_B[u]-v$ armonica in $\Omega' \cap B$,

$$\max_{\overline{\Omega}'} \left(M_B[u]-v\right) = \left(M_B[u]-v\right)(x_0) = \max_{\Omega' \cap B} \left(M_B[u]-v\right) =$$
$$= \max_{\partial(\Omega' \cap B)} \left(M_B[u]-v\right),$$

quindi, per il principio del massimo forte (lemma 5), $M_B[u]-v$ è costante nella chiusura della componente connessa di $\Omega' \cap B$ che contiene x_0. Dunque esiste $x_1 \in \partial(\Omega' \cap B)$ tale che

$$\max_{\overline{\Omega}'} \left(M_B[u]-v\right) = \max_{\partial(\Omega' \cap B)} \left(M_B[u]-v\right) = \left(M_B[u]-v\right)(x_1).$$

Ora, essendo $\partial(\Omega' \cap B) = \partial\Omega' \cup \partial B$:

$\rightarrow$ se $x_1 \in \partial\Omega'$, concludiamo che

$$\max_{\overline{\Omega}'} \left(M_B[u]-v\right) = \left(M_B[u]-v\right)(x_1) = \max_{\partial\Omega'} \left(M_B[u]-v\right);$$

$\rightarrow$ se $x_1 \in \partial B$, per la subarmonicità di u, troviamo

$$\max_{\overline{\Omega}'} \left(M_B[u]-v\right) = \left(M_B[u]-v\right)(x_1) = (u-v)(x_1) \leq \max_{\overline{\Omega}'} (u-v) =$$
$$= \max_{\partial\Omega'} (u-v) \leq \max_{\partial\Omega'} \left(M_B[u]-v\right).$$

Così, in ogni caso, abbiamo

$$\max_{\overline{\Omega}} \left(M_B[u] - v \right) = \max_{\partial\Omega'} \left(M_B[u] - v \right),$$

il che prova che $M_B[u]$ è subarmonica in Ω. □

Possiamo finalmente enunciare e dimostrare il teorema di esistenza per il problema di Dirichlet in un aperto sotto condizioni molto generali.

<u>Teorema 14</u>. Sia Ω un aperto limitato tale che per ogni $y \in \partial\Omega$ esista una palla $B(\xi, r)$ tale che $\overline{\Omega} \cap \overline{B(\xi,r)} = \{y\}$. Allora per ogni $g \in C(\partial\Omega)$ esiste un'unica funzione $u \in C(\overline{\Omega})$ che risolve il problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

<u>dim</u>. Poniamo

$$A = \{ v \in C(\overline{\Omega}) : v \text{ è subarmonica in } \Omega,\ v \le g \text{ su } \partial\Omega \},$$
$$B = \{ w \in C(\overline{\Omega}) : w \text{ è superarmonica in } \Omega,\ w \ge g \text{ su } \partial\Omega \}.$$

Notiamo che $A \ne \emptyset$ perché $\min_{\partial\Omega} g \in A$, e $B \ne \emptyset$ perché $\max_{\partial\Omega} g \in B$. Inoltre risulta

$$v \le w \quad \forall v \in A,\ \forall w \in B:$$

infatti $v - w$ è subarmonica in Ω con $v - w \le 0$ su $\partial\Omega$; per il principio del massimo, $v - w \le 0$ in $\overline{\Omega}$.

Quindi se la soluzione u del problema esiste, essa deve
verificare

$$v \leq u \leq w \quad \forall v \in A, \forall w \in B.$$

Perciò, definiamo la candidata soluzione come

$$u(x) = \sup_{v \in A} v(x) \qquad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Sia $x_0 \in \Omega$. Esiste, per ipotesi, una successione $\{u_k\} \subseteq A$ tale che $u_k(x_0) \to u(x_0)$; posto $v_k = \max\{u_0, u_1, \dots, u_k\}$, si ha ancora $v_k \in A$ e $v_k(x_0) \to u(x_0)$.

Fissiamo una palla $B \subseteq \Omega$, contenente x_0. Poniamo $w_k = M_B[v_k]$: come sappiamo dalla dimostrazione del lemma 13, $v_k \leq w_k$, w_k è subarmonica in Ω, e $w_k = v_k \leq g$ su $\partial\Omega$: quindi $w_k \in A$. Inoltre $w_k \leq w_{k+1}$: infatti ciò è ovvio in $\bar{\Omega} \setminus B$, perché $w_k = v_k \leq v_{k+1} = w_{k+1}$ in $\bar{\Omega} \setminus B$; invece, dentro B la $w_{k+1} - w_k$ è armonica e non negativa su ∂B, quindi $w_{k+1} - w_k$ è non negativa in B per il principio del massimo.

Ora notiamo che, in $\bar{B}$, $v_k \leq w_k \leq u$ (perché $w_k \in A$); dunque $w_k(x_0) \to u(x_0)$. Perciò, essendo w_k armonica in B, essa converge uniformemente, in ogni palla $B' \subset \bar{B'} \subset B$, ad una funzione armonica w (lemma 10), con $w(x_0) = u(x_0)$.

Sia ora ξ un altro punto di B. Esiste $\{\bar{u}_k\} \subseteq A$, tale che $\bar{u}_k(\xi) \to u(\xi)$. Siano

$$z_k = \max\{v_k, \bar{u}_1, \dots, \bar{u}_k\}\,; \quad Y_k = M_B[z_k]\,.$$

Come prima, si vede che $z_k, Y_k \in A$, $Y_k \le Y_{k+1}$, $v_k \le z_k$ e dunque $w_k \le Y_k$, e $\bar{u}_k \le z_k \le Y_k \le u$ in B; dunque $Y_k(\xi) \to u(\xi)$. Posto $y = \lim\limits_{k\to\infty} Y_k$, ricordando che $w = \lim\limits_{k\to\infty} w_k$ si ha $y - w \ge 0$ in $\bar{B}$ e $y(x_0) = w(x_0) = u(x_0)$. Ma $y-w$ è armonica in B, che ha un punto di minimo x_0 interno a B: dunque $y = w$ in B, e pertanto $y(\xi) = w(\xi) = u(\xi)$. Così si è provato che nel generico punto $\xi \in B$ si ha $w(\xi) = u(\xi)$, e pertanto $u = w$ è armonica in B. Ma B era una palla arbitraria, contenente un arbitrario punto $x_0 \in \Omega$. Perciò u è armonica in Ω.

Ora proviamo che

$$\lim_{x\in\Omega,\, x\to y} u(x) = g(y) \quad \forall y \in \partial\Omega.$$

Definiamo le <u>funzioni barriera</u>.

<u>Definizione 14</u> Sia $y \in \partial\Omega$ e sia $B(\xi, r)$ una palla tale che $\overline{B(\xi,r)} \cap \bar{\Omega} = \{y\}$. Una funzione barriera nel punto y è una funzione $d_y \in C(\bar{\Omega})$ tale che

(i) α_y è superarmonica in Ω,

(ii) $\alpha_y \geq 0$ in $\overline{\Omega}$,

(iii) $\alpha_y(x) = 0 \iff x = y$.

Nelle ipotesi fatte su Ω, per ogni $y \in \partial\Omega$ esiste una funzione barriera: se $B(\xi, r)$ è tale che $\overline{B(\xi,r)} \cap \overline{\Omega} = \{y\}$,

poniamo

$$\alpha_y(x) = \begin{cases} \ln \dfrac{|x-\xi|}{r} & \text{se } n=2 \\ r^{2-n} - |x-\xi|^{2-n} & \text{se } n>2 . \end{cases}$$

Infatti α_y è armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$, dunque in Ω, è non negativa in $\overline{\Omega}$ (perchè $|x-\xi| \geq r$ per ogni $x \in \Omega$) ed è nulla in $x \in \overline{\Omega}$ se e solo se $x = y$.

Sia allora $y \in \partial\Omega$ e fissiamo $\varepsilon > 0$. Esiste una palla S di centro y, tale che $|g(y) - g(x)| < \varepsilon$ per ogni $x \in S \cap \partial\Omega$.

Poniamo

$$K = \frac{\sup_{x,x' \in \partial\Omega} |g(x) - g(x')|}{\min_{x \in \partial\Omega \setminus S} \alpha_y(x)} .$$

Si vede facilmente che

$$|g(x) - g(y)| \leq \varepsilon + K \alpha_y(x) \quad \forall x \in \partial\Omega :$$

infatti, scelto $x_0 \in \partial\Omega \cap S$, si ha

$$|g(x)-g(y)| \leq |g(x)-g(x_0)|+|g(x_0)-g(y)| \leq K\alpha_y(x)+\varepsilon.$$

Notiamo ora che, essendo α_y superarmonica in Ω e non negativa,

$$g(y)-\varepsilon-K\alpha_y(\cdot) \in A, \quad g(y)+\varepsilon+K\alpha_y(\cdot) \in B:$$

dunque si ha

$$g(y)-\varepsilon-K\alpha_y(x) \leq u(x) \leq g(y)+\varepsilon+K\alpha_y(x) \quad \forall x \in \bar{\Omega}.$$

Pertanto

$$|u(x)-g(y)| \leq \varepsilon+K\alpha_y(x), \quad \forall x \in \bar{\Omega},$$

e infine

$$\limsup_{x\in\Omega,\, x\to y} |u(x)-g(y)| \leq \varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon>0$ arbitrario, si ha la tesi. □