IL PROBLEMA DI DIRICHLET PER L'EQUAZIONE DI LAPLACE

Consideriamo il problema ①

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \quad (u \text{ \underline{armonica} in } \Omega) \\ u = g & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ove:

- Ω è un aperto limitato di $\mathbb{R}^N$
- $g \in C(\partial\Omega)$
- $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Se la frontiera $\partial\Omega$ è di classe C^1 a tratti, allora valgono le formule di Green e c'è <u>unicità</u> della soluzione. Infatti se u, v sono 2 soluzioni, per la differenza $w = u - v$ si ha $\Delta w = 0$ in Ω, $w = 0$ su $\partial\Omega$ e dunque

$$0 = \int_\Omega \Delta w \cdot w \, dx = \sum_{i=1}^N \int_\Omega D_i^2 w \cdot w \, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_\Omega \left(D_i \left[D_i w \cdot w \right] - (D_i w)^2 \right) dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial n} \cdot w \, d\sigma - \int_\Omega |Dw|^2 dx,$$

ed essendo $w = 0$ su $\partial\Omega$ si ottiene $|Dw| = 0$ in Ω, dunque w è costante: poiché w è nulla su $\partial\Omega$, si conclude che $w = 0$.

Vogliamo dimostrare l'<u>esistenza</u> della soluzione, sotto ipotesi abbastanza generali sull'aperto Ω. A questo scopo ci occorrono alcuni risultati preliminari, il più importante dei quali è un teorema di esistenza della soluzione nel caso in cui Ω è una palla $B(x_0, r)$.

<u>Lemma 1</u> Sia $\Omega = B(0,R)$. Se $u \in C^2(\overline{B})$ è soluzione del problema di Dirichlet in B con $u=g$ su ∂B, allora

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial B} \frac{g(y)}{|x-y|^n} d\sigma, \quad x \in \Omega.$$

Questo non è un teorema di esistenza, ma è una formula di rappresentazione.

La dimostrazione è lunga e complicata.

(i) Si definisce la <u>soluzione fondamentale dell'equazione di Laplace</u>

$$K(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln|\xi| & \text{se } n=2 \\ \frac{1}{(n-2)\omega_n} |\xi|^{-n+2} & \text{se } n>2, \end{cases}$$

la quale verifica $K(-\xi) = K(\xi)$ e $\Delta K(\xi) = 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

(ii) Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$, e Ω è un aperto limitato con $\partial\Omega$ di classe C^1 a tratti, allora

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} \left[K(x-y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) - u(y) \frac{\partial K}{\partial \nu_y}(x-y) \right] d\sigma - \int_{\Omega} K(x-y) \Delta u(y) \, dy,$$

ove ν è il versore normale esterno a $\partial\Omega$ (usando le formule di Green).

(iii) Si definisce la <u>funzione di Green</u> per un aperto Ω, che è una funzione $G(x,y)$, definita in $(\bar{\Omega}\times\bar{\Omega})\setminus\{(x,x): x\in\bar{\Omega}\}$, tale che

(a) per ogni $x\in\Omega$, $h_x(y) = G(x,y) - K(x-y)$ è armonica in Ω (e non solo in $\Omega\setminus\{x\}$);

(b) $G(x,y) = 0 \quad \forall y\in\partial\Omega, \ \forall x\in\bar{\Omega}\setminus\{y\}$.

Se esiste, $G(x,y)$ verifica: $G(x,y) = G(y,x)$, $G(x,y)\geq 0$.

(iv) Se esiste la funzione di Green per l'aperto Ω, e se $h\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ è armonica in Ω, allora (formula di Green)

$$0 = \int_{\partial\Omega}\left(h\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial h}{\partial\nu}\right)d\sigma - \int_{\Omega} h\,\Delta u\,dx \quad \forall u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega}).$$

Scelta $h(y) = h_x(y) = G(x,y) - K(x-y)$, e sommando questa relazione a quella di (ii), si trova per ogni $u\in C^2(\bar{\Omega})$ e $x\in\Omega$

$$u(x) = \int_{\partial\Omega}\left[\cancel{G(x,y)\frac{\partial u}{\partial\nu}(y)\,d_y} - u\frac{\partial G}{\partial\nu_y}(x,y)\right]d\sigma - \int_{\Omega} G(x,y)\,\Delta u(y)\,d_y,$$

ricordando che $G(x,y)=0$ per $y\in\partial\Omega$.

(v) La funzione di Green per la sfera $B(0,R)$ è

$$G(x,y) = \begin{cases} K(x-y) - K\left(\frac{|x|}{R}\left(\frac{xR^2}{|x|^2} - y\right)\right) & \text{se } x\neq 0 \\ G(y,0) = K(y) - K\left(\frac{Ry}{|y|}\right) & \text{se } x=0. \end{cases}$$

(verifica un po' delicata)

(vi) Se $G(x,y)$ è la funzione di Green per la sfera $B(0,R)$, allora

$$\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y) = \frac{|x|^2 - R^2}{R\,\omega_n\,|x-y|^n}.$$

Ne segue che se $u \in C^2(\overline{B})$ risolve il problema di Dirichlet, allora $u = g$ su ∂B e $\Delta u = 0$ in B, e quindi

$$u(x) = -\int_{\partial\Omega} u \frac{\partial G}{\partial \nu_y}\, d\sigma - \int_{\Omega} G\, \Delta u\, dx =$$

$$= \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma. \quad \square$$

<u>Corollario 2</u> Se $\Omega = B(0,R)$, allora

$$1 = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x-y|^n}\, d\sigma$$

<u>dim.</u> Infatti $v(x) \equiv 1$ è armonica e $C^2(\overline{B})$, con $v = 1$ su ∂B. $\square$

<u>Lemma 3</u> Se $\Omega = B(0,R)$, la funzione

$$u(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{R\omega_n} \int_{\partial\Omega} \frac{g(y)}{|x-y|^n}\, d\sigma, \quad x \in B$$

è armonica in B, è di classe $C^\infty(B)$ e verifica

$$\lim_{\substack{x \to \overline{x} \\ x \in B}} u(x) = g(\overline{x}) \quad \forall \overline{x} \in \partial B.$$

<u>dim</u>. Poichè $x \in \Omega$, nella definizione di $u(x)$ l'integrale ha senso perchè l'integrando è continuo; inoltre possiamo derivare sotto il segno di integrale, cosicchè $u \in C^\infty(B)$. Inoltre, con noiosa verifica,

$$D_i \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n} = \frac{-2x_i}{|x-y|^n} - n\frac{(R^2-|x|^2)(x_i-y_i)}{|x-y|^{n+2}},$$

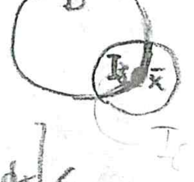
$$D_i^2 \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n} = -\frac{2}{|x-y|^n} + 4n\frac{x_i(x_i-y_i)}{|x-y|^{n+2}} - n\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^{n+2}} + n(n+2)\frac{(R^2-|x|^2)(x_i-y_i)^2}{|x-y|^{n+4}},$$

da cui

$$\Delta \frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^n} = \frac{-2n}{|x-y|^n} + 4n\frac{|x|^2-\langle x,y\rangle}{|x-y|^{n+2}} - n^2\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^{n+2}} + n(n+2)\frac{R^2-|x|^2}{|x-y|^{n+2}} =$$

$$= \frac{1}{|x-y|^{n+2}} \cdot 0 = 0. \quad \square$$

Infine, sia $\bar{x} \in \partial B$ e sia $\varepsilon > 0$. Esiste $\delta > 0$ tale che $|g(y)-g(\bar{x})| < \varepsilon$ per $y \in I_\delta = \partial B \cap B(\bar{x},\delta)$. Allora, se $x \in B$ e $|x-\bar{x}| < \frac{\delta}{2}$, si ha usando il Corollario 2



$$|u(x)-g(\bar{x})| = \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n}\left|\int_{\partial B} \frac{g(y)-g(\bar{x})}{|x-y|^n}\, d\sigma\right| \le$$

$$\le \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n}\left[\int_{I_\delta} \frac{\varepsilon}{|x-y|^n}\, d\sigma + \int_{\partial B \setminus I_\delta} \frac{2\|g\|_\infty}{|x-y|^n}\, d\sigma\right] \le$$

(essendo $|x-y| \ge |\bar{x}-y| - |\bar{x}-x| \ge \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$)

$$\le \varepsilon + \frac{R^2-|x|^2}{R\omega_n}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-n} 2\|g\|_\infty\, \omega_n R^{n-1}.$$

Per $x \to \bar{x}$ si ha $|x| \to R$, e dunque

$$\limsup_{x \to \bar{x}} |u(x) - g(\bar{x})| \leq \varepsilon + 0, \quad \text{ossia} \quad \lim_{x \to \bar{x}} u(x) = g(\bar{x}). \ \square$$

<u>Definizione 4</u> Una funzione $u \in C(\bar{\Omega})$ ha la <u>proprietà della media</u> in Ω se verifica

$$u(x) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\sigma = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\, dy \quad \forall B(x,r) \subseteq \Omega.$$

È facile verificare che i due integrali sono uguali: infatti, posto $M = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{\partial B(x,r)} u(y) dy$, si ha, moltiplicando M per ρ^{n-1} e integrando fra 0 e r:

$$M \frac{r^n}{n} = M \int_0^r \rho^{n-1} d\rho = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \left[\int_{\partial B(x,\rho)} u(y) d\sigma \right] d\rho = \frac{1}{\omega_n} \int_{B(x,r)} u(y) dy.$$

Viceversa, moltiplicando M per $\frac{r^n}{n}$, e poi derivando rispetto ad r, si ha dalla relazione precedente

$$M r^{n-1} = \frac{d}{dr} M \frac{r^n}{n} = \frac{d}{dr} \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \left[\int_{\partial B(x,\rho)} u(y)\, d\sigma \right] d\rho = \frac{1}{\omega_n} \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, d\sigma. \ \square$$

<u>Lemma 5</u> (principio del massimo forte) Sia Ω connesso e sia $u \in C(\bar{\Omega})$. Se u ha la proprietà della media e se u assume massimo o minimo in un punto interno a Ω, allora u è costante in $\bar{\Omega}$.

dim. Sia $M = \max_{\overline{\Omega}} u$ e supponiamo che esista $\bar{x} \in \Omega$ tale che $u(\bar{x}) = M$. Posto $A = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$, l'insieme A è chiuso (perché u è continua) e non vuoto (perché $\bar{x} \in A$).
Proviamo che A è anche aperto: essendo Ω connesso, ciò implicherà che $A = \Omega$, il che proverà la tesi.

Sia $x \in A$ e sia $r > 0$ tale che $B(x,r) \subseteq \Omega$. Se esistesse $\xi \in B(x,r)$ tale che $u(\xi) < M$, vi sarebbe anche una palla $B(\xi, \rho) \subseteq B(x,r)$ in cui $u(y) < M$ $\forall y \in B(y,r)$. Ma allora, per la proprietà della media,

$$M = u(x) = \frac{n}{\omega_n r^n} \int_{B(x,r)} u(y)\,dy =$$

$$= \frac{n}{\omega_n r^n} \left[\int_{B(x,r) \setminus B(\xi,\rho)} u(y)\,dy + \int_{B(\xi,\rho)} u(y)\,dy \right] <$$

$$< \frac{n}{\omega_n r^n} \left[M\, m_n(B(x,r) \setminus B(\xi,\rho)) + M\, m_n(B(\xi,\rho)) \right] =$$

$$= M,$$

il che è assurdo. Dunque $B(x,r) \subseteq A$ e A è aperto.
Discorso analogo per il minimo. $\square$

<u>Teorema 6</u> Sia $u \in C(\overline{\Omega})$. Allora u è armonica in Ω se e solo se u ha la proprietà della media.

<u>dim.</u> $(\Rightarrow)$ Sia $B(x_0,r) \subseteq \Omega$. Se u è armonica in Ω, u è anche

armonica in $B(x_0,r)$: quindi vale la rappresentazione

$$u(z) = \frac{r^2-|z-x_0|^2}{r\,\omega_n} \int_{\partial B(x_0,r)} \frac{u(\xi)}{|z-\xi|^n}\,d\xi \quad \forall z\in B(x_0,r).$$

Scelto $z=x_0$, troviamo

$$u(x_0) = \frac{r}{\omega_n}\int_{\partial B(x_0,r)} \frac{u(\xi)}{r^n}\,d\xi = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_{\partial B(x_0,r)} u(\xi)\,d\xi.$$

($\Leftarrow$) Sia $B=B(x_0,r)\subset\Omega$. Indichiamo con v la soluzione del problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B \\ v = u & \text{su } \partial B \end{cases}$$

fornita dal Lemma 3. Allora $v\in C(\overline{B})$ e v, essendo armonica in B, ha la proprietà della media in B. Perciò $w:=v-u$ ha la proprietà della media in B ed è nulla su ∂B. Siano x_1 e x_2 punti di massimo e di minimo per w su $\overline{B}$.

- Se almeno uno dei due punti è interno a B, il principio del massimo forte (Lemma 5) implica che w è costante su $\overline{B}$, e dunque nulla su $\overline{B}$.
- Se entrambi i punti sono su ∂B, allora w ha massimo e minimo su $\overline{B}$ nulli, e dunque w è nulla su $\overline{B}$.

Perciò $u\equiv v$ e quindi u è armonica in B. Siccome B è un'arbitraria palla contenuta in Ω, u è armonica in Ω. □

<u>Lemma 7</u> (stima puntuale) Sia $B = B(x_0, r)$ e sia $u \in C(\overline{B})$ una funzione armonica in B e non negativa in $\overline{B}$. Allora

$$\frac{1 - \frac{|x-x_0|}{r}}{\left(1 + \frac{|x-x_0|}{r}\right)^{n-1}} u(x_0) \le u(x) \le \frac{1 + \frac{|x-x_0|}{r}}{\left(1 - \frac{|x-x_0|}{r}\right)^{n}} \quad \forall x \in B.$$

<u>dim</u>. Si parte dalla formula di rappresentazione

$$u(x) = \frac{r^2 - |x-x_0|^2}{r\omega_n} \int_{\partial B} \frac{u(y)}{|y-x|^n} \, d\sigma \quad \forall x \in B,$$

Dato che

$$\frac{1}{(r+|x-x_0|)^n} \le \frac{1}{|x-y|^n} \le \frac{1}{(r-|x-x_0|)^n} \quad \forall y \in \partial B, \ \forall x \in B,$$

risulta

$$\frac{r - |x-x_0|}{(r+|x-x_0|)^{n-1}} \le \frac{r^2 - |x-x_0|^2}{|x-y|^n} \le \frac{r + |x-x_0|}{(r-|x-x_0|)^{n-1}} \quad \forall y \in \partial B, \ \forall x \in B;$$

moltiplicando per $\frac{u(y)}{r\omega_n}$ e integrando su ∂B si ottiene

$$\frac{r - |x-x_0|}{(r+|x-x_0|)^{n-1}} \frac{1}{r\omega_n} \int_{\partial B} u(y) \, d\sigma \le u(x) \le \frac{r + |x-x_0|}{(r-|x-x_0|)^{n-1}} \frac{1}{r\omega_n} \int_{\partial B} u(y) \, d\sigma,$$

e ricordando che u gode della proprietà della media

$$r^{n-2} \frac{r - |x-x_0|}{(r+|x-x_0|)^{n-1}} u(x_0) \le u(x) \le r^{n-2} \frac{r+|x-x_0|}{(r-|x-x_0|)^{n-1}} u(x_0)$$

che equivale alla tesi. □

Lemma 8 (disuguaglianza di Harnack). Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto, e sia $K \subset \Omega$ un compatto connesso. Esiste un numero $A \in]0,1[$ tale che, per ogni funzione $u \in C(\overline{\Omega})$, armonica in Ω e non negativa in Ω, si ha

$$A\,u(x) \leq u(x') \leq \frac{1}{A}\,u(x) \quad \forall x, x' \in K.$$

dim Conseguenza relativamente facile, ma non banale, del lemma 7. □

Lemma 10 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un aperto connesso. Sia $\{u_n\}$ una successione di funzioni armoniche in Ω, tale che $u_{n+1} \geq u_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Se esiste $x_0 \in \Omega$ tale che $\{u_n(x_0)\}$ converge (a un limite finito), allora $\{u_n\}$ converge uniformemente in ogni compatto contenuto in Ω, e la funzione limite è armonica in Ω.

dim È conseguenza immediata della disuguaglianza di Harnack (lemma 9). L'armonicità del limite segue dal fatto che, per convergenza uniforme, la proprietà della media soddisfatta dalle u_n si estende alla funzione limite. □