

Franco Conti  
Paolo Acquistapace  
Anna Savojni

# **Analisi matematica**

Teoria e applicazioni

**McGraw-Hill**

# Indice

---



<b>Presentazione</b>	<b>VII</b>
<b>Introduzione</b>	<b>IX</b>
<b>1 Serie e successioni numeriche</b>	<b>1</b>
1.1 Motivazioni e preliminari	1
1.2 Serie a termini positivi	4
1.3 Serie a termini di segno variabile	33
1.4 Limite delle successioni	43
<b>2 Serie di potenze</b>	<b>59</b>
2.1 Serie di potenze a coefficienti reali	59
2.2 Serie di potenze a coefficienti complessi	69
2.3 Moltiplicazione di serie	76
<b>3 I concetti fondamentali del calcolo infinitesimale</b>	<b>85</b>
3.1 Definizione e prime proprietà dell'integrale	86
3.2 Definizione e prime proprietà della derivata	102
3.3 Il teorema fondamentale del calcolo	123
3.4 Un'importante applicazione fisica: il lavoro	132
<b>4 Calcolo differenziale</b>	<b>139</b>
4.1 La continuità e i limiti	139
4.2 Proprietà di alcune funzioni elementari	151
4.3 Proprietà delle funzioni continue	159
4.4 Regole di derivazione	164
4.5 Studio del grafico di una funzione	172
4.6 Polinomi e serie di Taylor	196
<b>5 Calcolo differenziale per funzioni di più variabili</b>	<b>213</b>
<b>6 Calcolo integrale</b>	<b>243</b>
6.1 Funzioni integrabili	243
6.2 Regole di integrazione	249
6.3 Curve rettificabili	259
6.4 Integrali impropri e altre estensioni	276

6.5	Complementi	287
<b>7</b>	<b>Equazioni differenziali</b>	<b>293</b>
7.1	Equazioni del primo ordine	294
7.2	Equazioni differenziali lineari	316
<b>8</b>	<b>Sistemi di equazioni differenziali</b>	<b>335</b>
8.1	Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti	339
8.2	Sistemi non lineari	350
8.3	Alcune applicazioni delle equazioni differenziali	357
<b>9</b>	<b>Funzioni implicite</b>	<b>369</b>
<b>10</b>	<b>Calcolo integrale per funzioni di più variabili</b>	<b>391</b>
10.1	Integrali multipli	391
10.2	Forme differenziali	410
<b>11</b>	<b>Serie di Fourier</b>	<b>435</b>
11.1	Funzioni periodiche	435
11.2	Convergenza uniforme	452
<b>A</b>	<b>Appendice</b>	<b>459</b>
	<b>Risoluzione degli esercizi</b>	<b>481</b>
	<b>Indice analitico</b>	<b>525</b>
	<b>Dati biografici dei matematici e degli altri scienziati citati</b>	<b>532</b>

# Serie e successioni numeriche

---

In questo capitolo vengono introdotte due nozioni di importanza basilare nel calcolo infinitesimale: quella di serie e quella di successione. Si tratta di due concetti che si sono presentati in momenti storicamente diversi nello sviluppo del pensiero matematico pur essendo, come vedremo, strettamente correlati fra loro. Le serie appaiono in tempi antichi, essendo utilizzate già da Archimede nel calcolo dell'area del segmento di parabola, e il loro studio riceve un fortissimo impulso nel Seicento, soprattutto a opera di Newton che le pone a fondamento del calcolo infinitesimale; invece l'uso consapevole della nozione di successione è piuttosto recente ed è legato al progredire delle conoscenze sui numeri reali.

In molte situazioni viene spontaneo esprimere una certa quantità come il risultato della somma di infiniti numeri; tale processo dà luogo alla nozione di *somma infinita* o *serie*. Si verificherà che, sotto determinate ipotesi, le serie possiedono molte, se non tutte, le proprietà delle somme finite. Dette serie si diranno *convergenti* e dalla definizione di serie convergente emergerà, in modo naturale, il concetto di limite, una delle nozioni più importanti dell'analisi matematica. Si studieranno così (Paragrafo 1.4) le proprietà delle successioni e saranno esposti i teoremi fondamentali sui limiti.

## 1.1 Motivazioni e preliminari

Circa due secoli prima di Euclide, Zenone di Elea propose all'attenzione di filosofi e geometri alcuni sottili paradossi destinati a diventare famosi e a rimanere ben presenti, attraverso i secoli, nell'evoluzione del pensiero, stimolando analisi sempre più raffinate del concetto di infinito e suscitando la formulazione di nuove dicotomie paradossali ancora più sottili.<sup>(1)</sup>

Il più semplice dei paradossi di Zenone si può formulare, in termini moderni, più o meno così: per arrivare al traguardo dei 1000 metri un atleta deve prima averne percorso la metà, ma prima di arrivare alla metà deve essere giunto a  $1/4$  e così via, *all'infinito*. Dunque la corsa non potrà nemmeno iniziare.

Certamente Zenone stesso era convinto che l'atleta sarebbe invece tranquillamente partito, arrivando anche in breve tempo al traguardo ... qual è, dunque, l'errore? La conclusione è, infatti, paradossale, ma non è ben chiaro da cosa il paradosso tragga

---

<sup>(1)</sup>Si veda, per esempio, N. Falletta, *Il libro dei paradossi*, Longanesi, 1989.

origine; forse dalla tacita assunzione che in un tempo finito non si possa “fare che un numero finito di cose”. La traduzione matematica di tale assunto è l’affermazione che infiniti numeri positivi non possano avere “somma” finita.

Proprio il paradosso di Zenone ci convince che questo enunciato è falso: la lunghezza di un chilometro resta tale dopo che se ne sia effettuata una ideale suddivisione in mezzo chilometro, più un quarto di chilometro, più un ottavo di chilometro (Figura 1.1), dunque:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \quad (1.1)$$

ove i puntini stanno a indicare che nella (1.1) compaiono *tutte* le potenze di  $1/2$ : essa è, pertanto, una *somma infinita*.

Figura 1.1



La Figura 1.2 mostra una diversa illustrazione geometrica della formula (1.1).

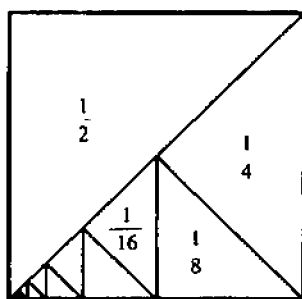


Figura 1.2 La superficie del quadrato di lato 1 viene “ricoperta” da infiniti triangoli rettangolari isosceli di area  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

La formula (1.1) sembra, dunque, ragionevole; occorre però dare una definizione precisa di somma infinita giacché, come si avrà modo di verificare, trattando con ingiustificata disinvoltura formule come la (1.1) si possono ottenere risultati paradossali (ed è questo un caso fortunato perché ci si accorge subito di aver commesso errori) oppure semplicemente sbagliati. Ecco qualche esempio.

Poniamo

$$S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \dots;$$

moltiplicando per 3 si ottiene

$$3S = 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots = 3 + S.$$

Sembra, quindi, di poter concludere che  $S = \frac{3}{2}$  (si vedrà tra breve che il risultato è corretto). D'altra parte, con la stessa tecnica, posto

$$T = 1 + 3 + 9 + 27 + 81 + \dots$$

si ottiene

$$3T = 3 + 9 + 27 + 81 + \dots = T - 1,$$

vale a dire  $T = -\frac{1}{2}$ , risultato ben poco convincente. Ancora, posto

$$W = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$$

si ha

$$W > \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = W;$$

nuovamente il risultato è alquanto sconcertante (si veda anche l'Esercizio 1.2.37).

La nozione di somma infinita è tanto importante quanto sottaciuta; essa è, per esempio, alla base del significato che ordinariamente si attribuisce alla rappresentazione decimale dei numeri.

Il numero razionale  $\frac{2}{3}$  può scriversi, come si verifica facendo la divisione, mediante il decimale periodico  $0,\bar{6} = 0,666\dots$ , che a sua volta è espresso dalla somma infinita

$$\frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \frac{6}{1000} + \dots$$

Vediamo allora come dare un senso a questa somma infinita e, più in generale, alla somma degli infiniti termini di una *progressione geometrica infinita* di ragione  $x$ :

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

con  $0 \leq x < 1$ . Identificheremo tale somma con il minimo numero  $S$  che è maggiore di ciascuna somma parziale

$$s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}.$$

Verificheremo ora che tale numero  $S$  esiste e che si ha  $S = \frac{1}{1-x}$  (si tratta dell'estremo superiore della successione  $s_n$ , ma in questo contesto è possibile ignorare questo fatto).

È ovvio, intanto, che il numero  $\frac{1}{1-x}$  è maggiore di ogni  $s_n$ ; se vi fosse, poi, un numero strettamente più piccolo con tale proprietà si potrà scrivere questo numero nella forma  $\frac{1-\varepsilon}{1-x}$ , ove  $\varepsilon$  è un certo numero positivo. Si avrebbe allora

$$\frac{1-x^n}{1-x} < \frac{1-\varepsilon}{1-x} \quad \text{per ogni } n,$$

vale a dire

$$x^n > \varepsilon \quad \text{per ogni } n. \quad (1.2)$$

Questa diseguaglianza non può essere vera per ogni intero  $n$ . Infatti, se si pone  $x = \frac{1}{1+h}$ , ove  $h$  è un opportuno numero positivo, ricordando che  $(1+h)^n > nh$  (diseguaglianza di Bernoulli), si ottiene

$$x^n = \frac{1}{(1+h)^n} < \frac{1}{nh}$$

e dunque da (1.2) si ricava  $\varepsilon < \frac{1}{nh}$  per ogni intero  $n$ , il che è in contraddizione con una fondamentale proprietà dei numeri reali: la proprietà di Archimede (vedi Appendice). Utilizzando la definizione proposta si può allora scrivere

$$\frac{1}{1-x} = S = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots \quad \text{se } 0 < x < 1. \quad (1.3)$$

Nel caso in cui  $x = \frac{6}{10}$  si ritrova il risultato familiare  $0,\bar{6} = \frac{2}{3}$  (si veda anche l'Esercizio 1.2.27). Si osservi che il numero  $S$  è caratterizzato dalle proprietà seguenti:

(C<sub>1</sub>)  $s_n \leq S$  per ogni  $n$ ,

(C<sub>2</sub>) per ogni numero  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_0$  tale che  $S - \varepsilon < s_{n_0}$ .

Infatti, dire che  $S$  è il minimo numero per il quale  $s_n \leq S$  per ogni  $n$  significa che ogni altro numero minore, cioè del tipo  $S - \varepsilon$  con  $\varepsilon$  numero positivo qualunque, non gode di tale proprietà; dunque vi è almeno un indice  $n_0$  per il quale  $S - \varepsilon < s_{n_0}$ .

Viceversa se un numero  $S$  soddisfa le condizioni (C<sub>1</sub>) e (C<sub>2</sub>) esso è ovviamente il minimo numero per il quale vale la (C<sub>1</sub>).

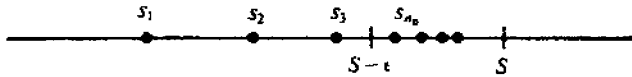


Figura 1.3

Si noti tuttavia che la definizione di somma infinita adottata nei casi precedenti non sta a significare che per ottenere il valore  $S$  della somma si debbano effettivamente addizionare infiniti termini; in tal caso ci si sarebbe discostati dal paradosso introduttivo *solo a livello verbale*. Vi è, in effetti, un fatto nuovo: la possibilità di esprimere in termini finiti, mediante le condizioni (C<sub>1</sub>) e (C<sub>2</sub>) (che, come visto nel caso precedente, si possono verificare in pochi passaggi), una quantità che scaturisce da un processo infinito.

## 1.2 Serie a termini positivi

In questo paragrafo si verificherà come gli esempi esposti in precedenza conducano a una naturale definizione di somma infinita o *serie*, nel caso in cui tutti gli addendi siano

positivi. Saranno studiate le proprietà delle serie a termini positivi e si incontreranno, oltre alla serie geometrica già descritta, altre serie specifiche molto importanti: la serie armonica e la serie esponenziale. Prima di dare la definizione formale di serie vengono messe a fuoco alcune facili proprietà delle sommatorie (finite) e viene richiamata la nozione di successione.

## SOMMATORIE

Convieni introdurre un simbolismo più conciso per descrivere la somma di "molti" numeri. Infatti, scritte come la seguente

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n - 1) + n \quad (1.4)$$

hanno un senso compiuto in quanto i termini omissi, descritti dai punti "...", hanno una ragionevole interpretazione univoca. Tutti converranno nel ritenere che per  $n = 5$  la (1.4) indichi  $1 + 2 + 3 + 4 + 5$  e che per  $n = 11$  sia  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$ . Ma cosa dire di espressioni come  $1 + 5 + 12 + \dots + 31 + 41, 2?$  Cosa significano in questi casi i punti "..."?

Talvolta in matematica un problema piuttosto complesso diviene più semplice se si usa un simbolismo appropriato per la sua descrizione e se viene adottata una formulazione "astratta", anche se, per la verità, pochi problemi si risolvono *solo* ricorrendo alla loro impostazione astratta.

Si lavorerà con somme del tipo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad (1.5)$$

ove ciascun  $a_k$  è un numero definito in modo univoco da una opportuna "legge" e dall'intero  $k$  che può assumere tutti i valori interi compresi fra 1 e  $n$ .

Ciascun  $a_k$  viene detto *termine* di indice  $k$  della somma.

Esempi di somme come la (1.5) dovrebbero essere a tutti familiari ( $n$  è un intero fissato):

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}, \quad (1.6)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{n}{n+1}, \quad (1.7)$$

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}. \quad (1.8)$$

La legge di formazione del "generico" termine  $a_k$  è rispettivamente:

- la potenza  $k$ -esima di 2;
- il quoziente fra  $k$  e  $k + 1$ ;
- l'inverso del fattoriale di  $k$ .

Si noterà che nel primo esempio  $k$  assume i valori compresi fra 0 e  $n$ , mentre nel secondo e nel terzo i valori di  $k$  risultano compresi fra 1 e  $n$ .

Per indicare in modo conciso somme del tipo (1.5) si usa il simbolo di *sommatoria* (introdotto da Joseph Fourier attorno al 1820)

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad (1.9)$$



in generale  $\sum_{k=m}^n a_k$  indicherà la somma di quegli  $a_k$  che hanno indice  $k$  compreso fra  $m$  e  $n$  (estremi inclusi). Naturalmente il valore della sommatoria è indipendente dalla lettera usata come indice (*indice muto*): così gli esempi (1.6), (1.7) e (1.8) si scriveranno

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k, \quad \sum_{i=1}^n \frac{i}{i+1}, \quad \sum_{j=1}^n \frac{1}{j!}.$$

Talvolta il simbolo di sommatoria è usato specificando l'insieme degli indici dei termini da sommare, altre volte descrivendo le specifiche dei termini; per esempio:

$$\sum_{1 \leq k \leq n} a_k; \quad \sum_{\substack{p \leq n \\ p \text{ primo}}} \frac{1}{p}; \quad \sum_{\substack{1 \leq k \leq 1000 \\ k \text{ dispari}}} \frac{1}{k^2}.$$

Il primo esempio è del tutto simile alla forma (1.9), ma il secondo non lo è. Se si volesse porre questo secondo esempio in tale forma si dovrebbe usare la scrittura, piuttosto complicata,

$$\sum_{k=1}^{\pi(n)} \frac{1}{p_k},$$

ove  $p_k$  denota il  $k$ -esimo numero primo e  $\pi(n)$  è il numero dei primi  $\leq n$ . Alcune semplici proprietà delle sommatorie sono le seguenti

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c &= cn; \\ \sum_{k=1}^n ca_k &= c \sum_{k=1}^n a_k; \\ \sum_{k=1}^n (a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k; \\ \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) &= a_{n+1} - a_1; \\ \sum_{k=1}^n a_k &= \sum_{k=1}^n a_{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} = \sum_{k=-p+1}^{n-p} a_{k+p}, \quad p \text{ intero} \\ \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=n}^m a_k &= \sum_{k=1}^m a_k + a_n, \quad \text{se } m \geq n. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Tutte queste proprietà sono di dimostrazione pressoché ovvia. Si noti che l'ultima di esse è falsa senza la condizione  $m \geq n$ .



**ESEMPI 1.1 (a) Somma dei termini di una progressione aritmetica.** Si indichi con  $s_n$  la somma dei primi  $n$  numeri naturali

$$s_n = 1 + 2 + \dots + n = \sum_{j=1}^n j;$$

dalla penultima delle formule (1.10) si ha

$$s_n = n + (n-1) + \dots + 1 = \sum_{j=1}^n (n-j+1).$$

Sommando queste relazioni si ottiene

$$2s_n = \sum_{j=1}^n (n+1) = n(n+1),$$

da cui

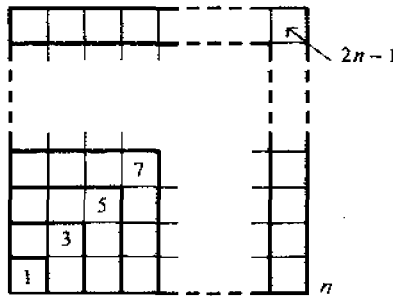
$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1.11)$$

Con la stessa tecnica si ricava l'analoga formula per una generica progressione aritmetica

$$(\alpha + \beta) + (\alpha + 2\beta) + \dots + (\alpha + n\beta) = \sum_{j=1}^n (\alpha + j\beta) = \frac{1}{2}n[2\alpha + (n+1)\beta]. \quad (1.12)$$

Per esempio, per calcolare la somma  $s_n$  dei primi  $n$  numeri dispari

$$s_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = \sum_{j=1}^n (2j-1),$$



**Figura 1.4** La somma dei primi  $n$  numeri dispari è  $n^2$ .

si ha dalla formula precedente (con  $\alpha = -1$ ,  $\beta = 2$ )

$$s_n = n(n+1) - n = n^2.$$

La Figura 1.4 suggerisce una interpretazione geometrica di questo risultato.

(b) *Somma dei quadrati dei primi  $n$  interi.* La formula (1.11) si può dimostrare anche con il seguente artificio: si ha

$$\begin{array}{r} (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \\ n^2 - (n-1)^2 = 2(n-1) + 1 \\ \dots\dots\dots \\ 2^2 - 1^2 = 2 \cdot 1 + 1 \end{array}$$

Sommando fra loro queste equazioni e semplificando si trova

$$(n+1)^2 - 1^2 = 2(1 + 2 + \dots + n) + n,$$

da cui segue la (1.11).

L'artificio ora descritto si può usare in molte altre situazioni, per esempio consente di trovare agevolmente la somma dei primi  $n$  quadrati:

$$s_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \sum_{j=1}^n j^2.$$

Usufruento della formula  $(z+1)^3 - z^3 = 3z^2 + 3z + 1$  e procedendo come sopra si ha

$$\begin{array}{r} (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 \\ n^3 - (n-1)^3 = 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1 \\ \dots\dots\dots \\ 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \end{array}$$

Sommando si ricava

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3 \sum_{j=1}^n j^2 + 3 \sum_{j=1}^n j + n.$$

Sapendo che  $\sum_{j=1}^n j = \frac{1}{2}n(n+1)$  si deduce facilmente

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n j^2 &= \frac{1}{3}(n^3 + 3n^2 + 2n) - \frac{1}{2}n(n+1) = \\ &= \frac{1}{6}n(2n^2 + 3n + 1), \end{aligned}$$

cioè

$$s_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1). \quad (1.13)$$

Alcune tra le considerazioni precedenti possono essere giustamente criticate in quanto contengono tacitamente locuzioni del tipo "e così via", "proseguendo così" non formalizzabili in modo soddisfacente. Tali procedure si possono tuttavia rendere del tutto rigorose usufruendo del principio di induzione, esposto nell'Appendice.

Nella pratica matematica corrente, d'altra parte, anziché ricorrere ogni volta al principio di induzione si usano sovente simili espressioni più intuitive e meno ingombranti.

**ESERCIZI**

**1.2.1** Scrivere in forma compatta le seguenti somme:

$$(a) \quad \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \frac{5}{6};$$

$$(b) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7};$$

$$(c) \quad 1 + \frac{1}{2 - \frac{3}{2}} + \frac{1}{2 - \frac{5}{3}} + \frac{1}{2 - \frac{7}{4}}.$$

**1.2.2** Calcolare

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{n+1}{n^2} - \sum_{n=3}^9 \frac{n+1}{n^2}.$$

**1.2.3** Calcolare

$$\sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}).$$

**1.2.4** Verificare l'uguaglianza

$$\sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k} = \frac{\sqrt{n+1}}{n} - 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)\sqrt{k}}.$$

**1.2.5** Sviluppare le seguenti sommatorie:

$$(a) \quad \sum_{j=1}^n 2^{j+2}; \quad (b) \quad \sum_{j=1}^n (j+1)^2; \quad (c) \quad \sum_{j=1}^n 4(j^2 - j).$$

**1.2.6** Ridurre a un'unica sommatoria l'espressione

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{(-x)^j}{j} - \sum_{j=1}^{2n} \frac{x^j}{j}.$$

**1.2.7** Con la tecnica usata nell'Esempio 1.1 oppure con il principio di induzione provare la formula seguente (*teorema di Nicomaco*)

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

**1.2.8** Verificare, sapendo che  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  e  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} = 2^n$ , le seguenti identità

$$(a) \quad \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} = 2^n - 2; \quad (b) \quad \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k = n \cdot 2^{n-1}.$$

## SUCCESSIONI

Nel linguaggio ordinario i termini “serie” e “successione” sono sinonimi e si usano per descrivere una distribuzione ordinata nello spazio o nel tempo di oggetti o di eventi. In matematica, invece, tali termini hanno un preciso e differente significato tecnico. Iniziamo illustrando la nozione di successione.

Si chiama *successione* una funzione definita sugli interi positivi. Di norma, per descrivere i valori di una successione in corrispondenza a ogni naturale

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

si usano i simboli

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots;$$

ciascuno di essi viene detto *termine* della successione. Il simbolo  $a_1$  costituisce il primo termine della successione,  $a_2$  il secondo termine e così via. Ogni termine  $a_n$  ha un successore  $a_{n+1}$  e dunque non vi è un “ultimo” termine.

Chiameremo successione sia la “legge” che associa a ogni naturale  $n$  il numero  $a_n$  sia l'insieme dei termini  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . Così, per indicare una successione, si userà uno dei simboli

$$\left\{ a_1, a_2, \dots, a_n, \dots \right\}; \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

$$\left\{ a_n \right\}; \quad a_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Gli esempi più comuni di successioni si costruiscono tramite una formula che fornisce il termine  $n$ -esimo. Per esempio, la formula  $a_n = \frac{1}{n^2}$  definisce una successione i cui primi termini sono

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \frac{1}{25}, \dots$$

Talvolta per costruire le successioni sono necessarie più espressioni analitiche, per esempio

$$a_{2n-1} = \frac{1}{n}, \quad a_{2n} = n^2, \quad n = 1, 2, \dots$$

definisce la successione

$$1, 4, \frac{1}{3}, 16, \frac{1}{5}, 36, \dots$$

Ma non è affatto necessario che esistano formule per definire i termini di una successione. Per esempio

$$3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6, 5, 3, 5, \dots$$

è la successione formata dalle cifre della scrittura decimale di  $\pi$ ; essa è ben definita pur non esistendo alcuna “formula” per ottenere  $a_n$  dato l'intero  $n$  (che non usi la successione  $a_n$  stessa, beninteso).

Un altro modo per definire una successione consiste nell'assegnare regole per costruire i termini successivi partendo da determinati termini iniziali; per esempio la formula

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{per } n > 1,$$

consente di costruire il valore di  $F_n$  per ogni naturale  $n$ . Una regola di questo tipo si dice *formula di ricorrenza*. Tale formula, nel caso particolare ora descritto, definisce una famosa successione i cui termini sono detti *numeri di Fibonacci*:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Si noti che una successione non è necessariamente numerica; per esempio descrivendo le proprietà dei numeri reali (vedi Appendice) si incontrano successioni di intervalli  $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ . Tuttavia, ove non diversamente specificato, per successione si intenderà, per ora, una successione di numeri.

Una successione può non avere le proprietà tipiche di un insieme *finito* di numeri  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Per esempio un insieme finito di numeri è sempre dotato di elemento minimo e di elemento massimo; invece le successioni

$$0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \dots, 1 - \frac{1}{n}, \dots$$

$$1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \dots, 2n - 1, \frac{1}{2n}, \dots$$

non hanno elemento massimo (per motivi diversi) e la seconda non ha neppure elemento minimo. Tuttavia la prima delle due è costituita da numeri compresi fra 0 e 1, mentre la seconda contiene numeri arbitrariamente grandi. Per descrivere questa situazione si introduce la seguente

**DEFINIZIONE 1.2** Una successione  $\{a_n\}$  si dice *limitata superiormente* se vi è un numero  $M$  tale che  $a_n \leq M$  per ogni  $n$ ; si dice *limitata inferiormente* se vi è un numero  $m$  tale che  $m \leq a_n$  per ogni  $n$ . La successione si dice, poi, *limitata* se è sia limitata superiormente sia limitata inferiormente: ciò avviene, chiaramente, se e solo se vi è un numero  $K$  tale che  $|a_n| \leq K$  per ogni  $n$ .

Bastano pochi esempi per una piena comprensione di questa facile nozione, ma si faccia attenzione a non confondere l'aggettivo "limitato" con la locuzione "ha limite"; nonostante la somiglianza delle due espressioni verbali, si tratta di concetti molto diversi (la nozione di limite sarà illustrata più avanti).



**ESEMPIO 1.3** La successione  $\{\frac{1}{n}\}$  è limitata (si ha  $0 < \frac{1}{n} \leq 1$  per  $n = 1, 2, \dots$ ); la successione  $\{n + \frac{1}{n}\}$  è limitata inferiormente (si ha  $0 < n + \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$ ) ma non è limitata superiormente; la successione  $\left\{(-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1}\right\}$  è limitata (si ha  $|(-1)^n \frac{n^2}{n^2 + 1}| < 1$ ); la successione  $\left\{(-1)^n \frac{n^2}{n + 1}\right\}$  non è limitata né inferiormente né superiormente (perché?); la successione  $\{\ln \frac{1}{n}\}$  è limitata superiormente ma non inferiormente (ma *provare* questa affermazione non è affatto facile).



Nello studio delle successioni l'interesse è volto ai valori "grandi" dell'indice  $n$ ; è comodo, allora, avere un modo sintetico per indicare quelle proprietà che sono vere a partire da un certo indice in poi o, come si dice, *definitivamente*.

L'uso dell'avverbio "definitivamente" è molto comodo, ma occorre prestare attenzione a non equivocare sul suo significato. Affermare che una data proprietà  $\mathcal{P}_n$ , dipendente da un naturale  $n$ , è vera definitivamente significa asserire uno dei seguenti fatti equivalenti:

- (A) esiste un intero  $n_0$  tale che la proprietà  $\mathcal{P}_n$  è vera per ogni  $n > n_0$ ;  
 (B) i numeri naturali che non verificano  $\mathcal{P}_n$  sono in numero finito.

L'equivalenza delle affermazioni (A) e (B) si comprende subito osservando che l'insieme degli interi che non verificano  $\mathcal{P}_n$ , essendo finito, ha certamente un massimo  $n_0$ .

Per esempio la proprietà " $n > 1000$ " è vera definitivamente, come lo è " $n > 5\,000\,000$ ", ma la proprietà " $n$  è pari" non è vera definitivamente.

La semplice osservazione seguente sarà preziosa in seguito: se una proprietà  $\mathcal{P}_1$  è vera definitivamente e un'altra  $\mathcal{P}_2$  è vera definitivamente allora definitivamente sono vere sia  $\mathcal{P}_1$  che  $\mathcal{P}_2$ . Infatti, l'insieme degli interi che non verificano  $\mathcal{P}_1$  oppure non verificano  $\mathcal{P}_2$  è finito (oppure: se  $\mathcal{P}_1$  è vera per  $n > n_1$ , e  $\mathcal{P}_2$  è vera per  $n > n_2$  allora per  $n > \max(n_1, n_2)$  sono vere entrambe).

Per esempio, se  $\varepsilon$  è un numero positivo si ha

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{definitivamente,}$$

e anche

$$\frac{100}{n^2} < \varepsilon \quad \text{definitivamente.}$$

Dunque, risulta definitivamente sia  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , sia  $\frac{100}{n^2} < \varepsilon$ .

Se, in concreto,  $\varepsilon = 0,01$  la prima diseuguaglianza è vera per  $n > 100$  e la seconda per  $n > 10$ ; entrambe sono vere per  $n > 100$ .

Ovviamente questa osservazione si può estendere a un numero finito di proprietà, ma diviene falsa quando se ne vogliono considerare infinite. Infatti  $\frac{1}{n} < \frac{1}{10}$ ,  $\frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ , ...,  $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^k}$ , ...,  $k = 1, 2, \dots$  sono tutte proprietà vere definitivamente (nell'indice  $n$ ) ma nessun intero  $n$  le verifica tutte.

## ESERCIZI

**1.2.9** Verificare che la successione  $a_n = (-\frac{1}{2})^n$  è limitata e dotata di minimo e di massimo.

**1.2.10** Costruire una successione di numeri positivi che sia limitata e dotata di minimo ma non di massimo.

**1.2.11** Dire se le seguenti successioni sono limitate ( $n$  intero  $\geq 1$ ):

- |   |   |  |
|---|---|--|
| (a) $\frac{n!}{n^n}$ ;                    | (b) $\frac{n+300}{n}$ ;                   | (c) $-2\sqrt{n}$ ;                                     |
| (d) $\frac{\text{sen } n}{n}$ ;           | (e) $(-1)^n n$ ;                          | (f) $n^2 \left(\text{sen } \frac{\pi}{2} n\right)^2$ ; |
| (g) $\frac{2n+1}{n-1}$ ;                  | (h) $\frac{2n^2+1}{n-1}$ ;                | (i) $\sqrt{n^2+1} - n$ ;                               |
| (l) $(-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ; | (m) $(-1)^n \left(\frac{3}{2}\right)^n$ . |  |

**1.2.12** Scrivere due successioni non costanti che siano la prima definitivamente minore di  $-1$  e la seconda definitivamente maggiore di  $2$ .

**1.2.13** Verificare che le disequaglianze seguenti sono definitivamente soddisfatte:

$$(a) \quad \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{n-2}{n}; \quad (b) \quad \sqrt[3]{n-2n^2} < -10; \quad (c) \quad 10n - n^3 < -10.$$

**1.2.14** Verificare che per ogni numero positivo  $\varepsilon$  sono verificate definitivamente le seguenti disequazioni:

$$(a) \quad 1 - \varepsilon < \frac{n}{n+1} < 1; \quad (b) \quad \frac{n^2+1}{n} > \varepsilon.$$

**1.2.15** Utilizzando la disequaglianza

$$(1+d)^n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}d^2, \quad d > 0$$

si verifichi che per ogni numero positivo  $\varepsilon$  definitivamente si ha

$$1 \leq \sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon.$$

**1.2.16** Per ciascuna delle successioni seguenti

$$(-1)^n; \quad \frac{1}{n}; \quad \frac{(-1)^n}{n^2}; \quad \frac{n-100}{n}; \quad 2^n$$

si dica quali di queste proprietà sono verificate definitivamente:

- (a) i termini sono positivi;
- (b) i termini sono minori di un dato  $\varepsilon > 0$ ;
- (c) i termini sono in valore assoluto minori di  $\varepsilon > 0$ ;
- (d) i termini sono maggiori di  $\varepsilon > 0$ .

**1.2.17** Calcolare il termine generale delle successioni definite da:

- (a)  $a_0 = k, \quad a_{n+1} = a_n^2$ ;
- (b)  $a_0 = k, \quad a_{n+1} = h \cdot a_n^2$ .

**1.2.18** Si dica se sono limitate le seguenti successioni definite per ricorrenza:

- (a)  $a_1 = 1, \quad a_n = 2^{a_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots$
- (b)  $a_1 = \frac{3}{4}, \quad a_n = \sqrt[n]{a_{n-1}}, \quad n = 2, 3, \dots$
- (c)  $a_0 = 0, \quad a_n = \frac{1}{2 - a_{n-1}}, \quad n = 1, 2, \dots$
- (d)  $a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_n = a_{n-1}^4 - a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots$
- (e)  $a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}, \quad n = 3, 4, \dots$

**1.2.19** Verificare che per  $a \in (0,1)$ , tutti i termini della successione

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n - x_n^3, \quad n = 2, 3, \dots$$

appartengono a  $(0,1)$ .



1.2.20 Verificare che la successione

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = 1 - x_n + x_n^2, \quad n = 2, 3, \dots$$

è costante se è  $a = 1$ , crescente se è  $a \neq 1$ .

1.2.21 Data la successione

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = a_n^2 - 2, \quad n = 1, 2, \dots$$

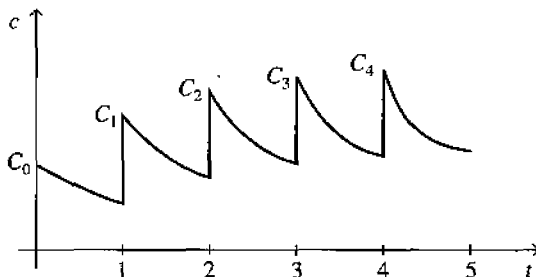
si verifichi che se  $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$  la successione è definitivamente uguale a 2, se  $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$  essa è definitivamente uguale a  $-1$ , mentre se  $\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  essa è periodica di periodo 2.

1.2.22 A un concorso fu posto il seguente quesito: data la "successione" 1, 16, 81, 256, ... scriverne il quinto termine. Molti candidati risposero 625, che era il risultato ufficiale, ma un candidato, individuata la contorta legge di formazione  $5(2n^3 - 7n^2 + 10n) - 24$ , rispose 601. Chi aveva ragione?

1.2.23 La concentrazione nel sangue di un farmaco assunto in un'unica dose decresce di solito nel tempo perché il corpo lo elimina. Quindi per poter mantenere la concentrazione occorre assumerne ripetutamente altre dosi. Un modello plausibile che descrive la concentrazione immediatamente prima dell'assunzione della  $(n+1)$ -esima dose può essere:

$$R_n = c_0 e^{-kt_0} + c_0 e^{-2kt_0} + \dots + c_0 e^{-nkt_0}$$

dove  $c_0$  è la concentrazione che si ha con un sola dose,  $k$  è la costante di eliminazione e  $t_0$  è l'intervallo di tempo tra due assunzioni consecutive. (Si veda la figura qui sotto.)



(a) Scrivere in forma compatta  $R_n$  e calcolare il suo limite per  $n \rightarrow \infty$ .

(b) Calcolare  $R_1$  e  $R_{10}$  per  $c_0 = 1 \text{ mg/ml}$ ,  $k = 0.1 \text{ h}^{-1}$ ,  $t_0 = 10 \text{ h}$ .

(c) Se si somministra un farmaco che produce, per ogni dose, la concentrazione di  $0.1 \text{ mg/ml}$  ed è efficace solo se la concentrazione non è inferiore a  $0.03 \text{ mg/ml}$ , supponendo  $k = 0.2 \text{ h}^{-1}$ , qual è il tempo massimo che si può far trascorrere tra due somministrazioni per mantenere la sua azione?

**CONVERGENZA DELLE SERIE A TERMINI POSITIVI**

Riprendiamo ora lo studio delle somme infinite, delle quali è stato visto qualche esempio nel primo paragrafo.

Accanto a una successione di numeri reali

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

si può considerare la successione delle *somme parziali*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{j=1}^n a_j. \end{aligned}$$

Per esempio data la successione

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{n^2}, \dots$$

si costruisce la successione delle somme parziali

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{4} \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} \\ &\dots\dots\dots \\ s_n &= 1 + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n^2} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

In modo più formale si può pensare che la successione  $\{s_n\}$  delle somme parziali sia definita per ricorrenza dalle formule

$$s_1 = a_1, \quad s_n = s_{n-1} + a_n, \quad n = 2, 3, \dots$$

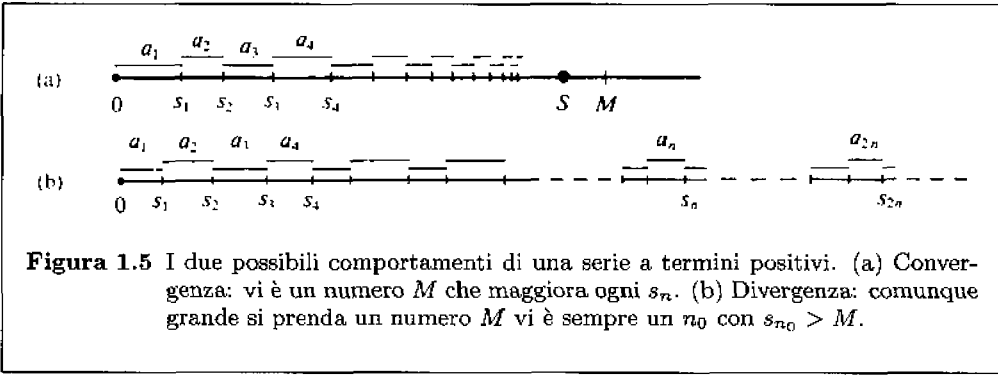
Il simbolo

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots,$$

che viene scritto anche

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

si dice *serie* di termini  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ . A questo simbolo è possibile, in certi casi, associare un numero che verrà detto *somma della serie*. Supponiamo, per cominciare, che i numeri  $a_n$  siano tutti positivi (o nulli). Si possono presentare due casi: o la successione  $\{s_n\}$  è limitata (superiormente) o non lo è. Nella Figura 1.5 vengono illustrati i due possibili comportamenti di  $\{s_n\}$ .



**Figura 1.5** I due possibili comportamenti di una serie a termini positivi. (a) Convergenza: vi è un numero  $M$  che maggiora ogni  $s_n$ . (b) Divergenza: comunque grande si prenda un numero  $M$  vi è sempre un  $n_0$  con  $s_{n_0} > M$ .

**DEFINIZIONE 1.4** Si supponga che i termini  $a_j$  della serie  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  siano tutti *positivi* (o nulli). Se la successione delle somme parziali  $\{s_n\}$  è limitata si dirà che la serie  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  è *convergente* e verrà chiamata *somma* di tale serie il minimo numero  $S$  che è maggiore di ogni  $s_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Si scrive anche (con lieve abuso di linguaggio, consolidato dalla tradizione)

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} a_j.$$

Se invece la successione delle somme parziali  $\{s_n\}$  non è limitata (superiormente) allora si dirà che la serie  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  è *divergente* e si pone per convenzione

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \infty.$$

**OSSERVAZIONE 1.5** (a) La definizione di somma  $S$  di una serie convergente è modellata sull'esempio

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

visto nel Paragrafo 1.1. In questo caso è stato dimostrato che esiste un minimo numero  $S$  maggiore di ogni  $s_n$ . Ma, in generale, se la successione  $s_n$  è limitata, l'esistenza del numero  $S$  minimo dei maggioranti di  $\{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$  è garantita dall'assioma di completezza dei numeri reali:  $S$  non è altro che l'estremo superiore di  $\{s_1, s_2, \dots, s_n, \dots\}$  (si veda l'Appendice).

Si osservi che, se ci si restringe ai numeri razionali, tale proprietà non è più vera; per esempio per la serie  $\sum \frac{1}{n!}$ , le cui somme parziali sono numeri razionali, *non esiste* un razionale che sia il minimo dei maggioranti delle somme parziali  $s_n$  (Esempio 1.9(c)).

(b) La somma  $S$  di una serie convergente a termini positivi è caratterizzata dalle due proprietà:

(C<sub>1</sub>)  $s_n \leq S$  per ogni  $n$ ,

(C<sub>2</sub>) per ogni numero  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_0$  tale che  $S - \varepsilon < s_{n_0}$ .

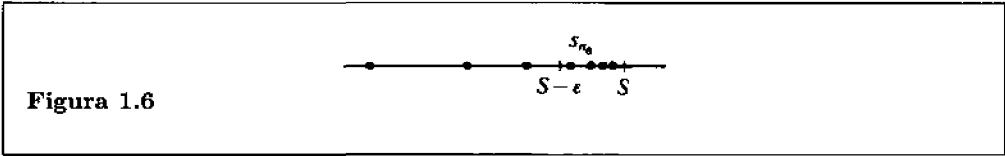


Figura 1.6

Questa affermazione si dimostra esattamente nella stessa maniera utilizzata nel Paragrafo 1.1 per la serie  $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$ . In altre parole, una serie a termini positivi è convergente e ha somma  $S$  se e solo se vi è un numero  $S$  per il quale valgono  $(C_1)$  e  $(C_2)$ . Si noti che essendo  $a_j \geq 0$  si ha

$$s_n \leq s_{n+1} \quad \text{per ogni } n,$$

e dunque se, dato  $\varepsilon > 0$ , si ha  $S - \varepsilon > s_{n_0}$  per un certo indice  $n_0$ , allora si ha  $S - \varepsilon < s_n$  per ogni indice  $n \geq n_0$ , cioè tale diseuguaglianza è definitivamente vera.

In altri termini, nel contesto in cui ci si trova, la condizione  $(C_2)$  può essere così riformulata:

$(C_2)$  per ogni numero  $\varepsilon > 0$  definitivamente si ha  $S - \varepsilon < s_n$ .

Le somme parziali  $s_n$  di una serie convergente costituiscono, dunque, una approssimazione della somma  $S$  e tale approssimazione è via via migliore man mano che l'indice  $n$  cresce; pur di prendere  $n$  grande a sufficienza l'errore che si commette sostituendo  $s_n$  alla somma  $S$  è minore di qualunque prefissato "scarto", rappresentato dal numero arbitrario  $\varepsilon$ , il che corrisponde perfettamente all'idea intuitiva di "somma infinita".

(c) Una serie divergente (a termini positivi) è invece caratterizzata dalla proprietà:

(D) per ogni numero  $K$  esiste un indice  $n_0$  per cui  $s_{n_0} > K$ .

Infatti, se la serie è divergente la successione delle somme parziali  $\{s_n\}$  non è limitata superiormente, quindi comunque grande si prenda un numero  $K$  non potrà risultare  $s_n \leq K$  per ogni  $n$ ; pertanto esiste un indice  $n_0$  (che dipenderà da  $K$ ) tale che  $s_{n_0} > K$ .

Con considerazioni analoghe a quelle svolte in (b) si può esprimere la condizione (D) nella forma equivalente

(D) per ogni numero  $K$  definitivamente si ha  $s_n > K$ .

(d) Se una serie è convergente e si assume, per esempio,  $\varepsilon = \frac{1}{10^k}$ , dalle proprietà  $(C_1)$ ,  $(C_2)$  risulta che per ogni somma  $s_n$  con indice  $n$  maggiore di un certo  $n_0$  si ha

$$S - s_n < \frac{1}{10^k},$$

vale a dire  $s_n$  è una approssimazione della somma  $S$  con errore minore di  $10^{-k}$  (si sarebbe tentati di dire che  $s_n$  fornisce  $S$  con le prime  $k$  cifre decimali esatte; ma questo non è propriamente vero, perché?). Naturalmente  $n_0$  dipende da  $\varepsilon$  e dunque da  $k$ ; maggiore è  $k$ , ossia maggiore è la precisione richiesta, maggiore sarà  $n_0$  e pertanto occorrerà sommare più termini per ottenere tale approssimazione.

**ESEMPI 1.6 Serie telescopiche.** Si consideri la serie (detta *serie di Mengoli*)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j(j+1)}. \quad (1.14)$$

È facile calcolare esplicitamente le sue somme parziali in quanto

$$\frac{1}{j(j+1)} = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1}$$

e dunque

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Dalla Definizione 1.4 risulta allora che la serie è convergente con somma 1; infatti ponendo  $S = 1$  la condizione  $(C_1)$  è ovviamente soddisfatta, e anche la condizione  $(C_2)$  lo è, in quanto per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1} > 1 - \varepsilon \quad \text{se} \quad n \geq n_0 > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Le serie che, come la (1.14), presentano la proprietà in base alla quale ogni termine  $a_n$  può essere espresso come differenza del tipo  $a_n = b_n - b_{n+1}$  si dicono *serie telescopiche* (dalla forma dei cannocchiali usati, soprattutto in passato, in marina e caratterizzati da un corpo costituito da più cilindri coassiali rientranti).

La figura seguente mostra una suggestiva interpretazione geometrica della (1.14): nel punto di ascissa  $x = j$  la differenza  $a_j$  tra le ordinate delle due iperboli di equazioni

$$y = \frac{1}{x}, \quad y = \frac{1}{x+1}$$

è esattamente

$$a_j = \frac{1}{j} - \frac{1}{j+1} = \frac{1}{j(j+1)}.$$

Proiettando i segmenti di lunghezza  $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots$  sull'asse delle ordinate si ottiene un segmento di lunghezza unitaria.

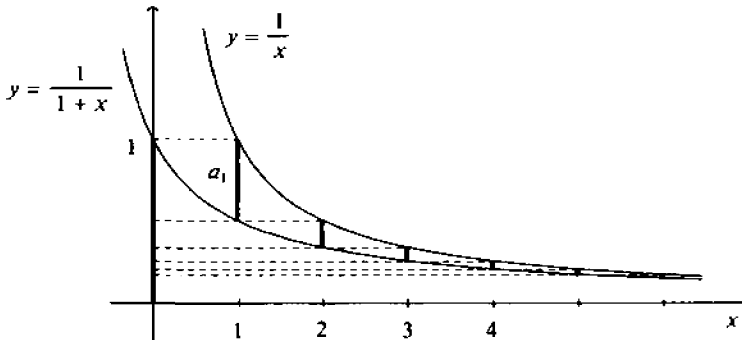


Figura 1.7

**Serie geometrica.** Come già visto nel Paragrafo 1.1, la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^j$$

è convergente, se  $0 < x < 1$ , e ha somma

$$S = \frac{1}{1-x} = \sum_{j=0}^{\infty} x^j, \quad 0 < x < 1, \quad (1.15)$$

(si noti che il primo termine della serie ha indice  $j = 0$ ).

Se, invece,  $x \geq 1$  ovviamente si ha  $s_n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \geq n + 1$ , dunque la condizione (D) è soddisfatta e la serie diverge.

La serie geometrica può essere utilizzata come punto di partenza per la determinazione della somma di molte altre serie; per esempio sostituendo  $x^2$  a  $x$  si ottiene

$$1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} x^{2j} = \frac{1}{1-x^2}, \quad \text{se } |x| < 1, \quad (1.16)$$

mentre sostituendo  $2x^2$  a  $x$  si ha

$$1 + 2x^2 + 4x^4 + \dots + 2^n x^{2n} + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} 2^j x^{2j} = \frac{1}{1-2x^2}, \quad \text{se } |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tutte queste serie hanno forma  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  e vengono dette *serie di potenze*; di esse ci si occuperà estesamente nel prossimo capitolo.

La serie geometrica ha importanti applicazioni in ogni campo della matematica sia pura sia applicata. Vengono ora discusse brevemente due di tali applicazioni; altre sono descritte negli Esercizi 1.2.32, 1.2.37.

Un quadrato di lato unitario è suddiviso in 9 quadrati uguali e il quadrato centrale viene colorato. I rimanenti 8 quadrati sono similmente divisi e viene colorato il quadrato centrale di ciascuno di essi (Figura 1.8). Il procedimento viene iterato infinite volte. Si vuole calcolare l'area complessiva della superficie colorata. Indicando con  $A_n$  l'area colorata al passo  $n$ -esimo, si avrà:

$$A_1 = \frac{1}{3^2}, \quad A_2 = \frac{1}{9} + 8 \cdot \frac{1}{9^2}, \quad A_3 = \frac{1}{9} + \frac{8}{81} + 64 \cdot \frac{1}{27^2},$$

$$A_n = \sum_{k=1}^n \frac{8^{k-1}}{9^k}.$$

Ne segue che l'area complessiva della superficie colorata è espressa da una serie geometrica:

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8^{k-1}}{9^k} = \frac{1}{9} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^k = \frac{1}{9} \frac{1}{1-8/9} = 1.$$

Si noti che, benché l'area complessiva della superficie colorata sia uguale all'area del quadrato iniziale, *non tutti i punti* vengono colorati; anzi l'insieme dei punti che non vengono colorati possiede caratteristiche alquanto sorprendenti. Esso viene detto *insieme di Cantor*.

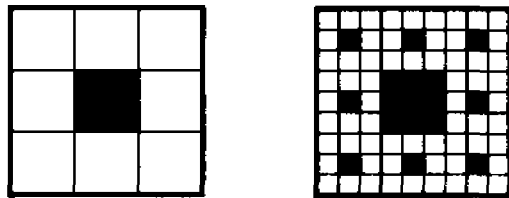


Figura 1.8

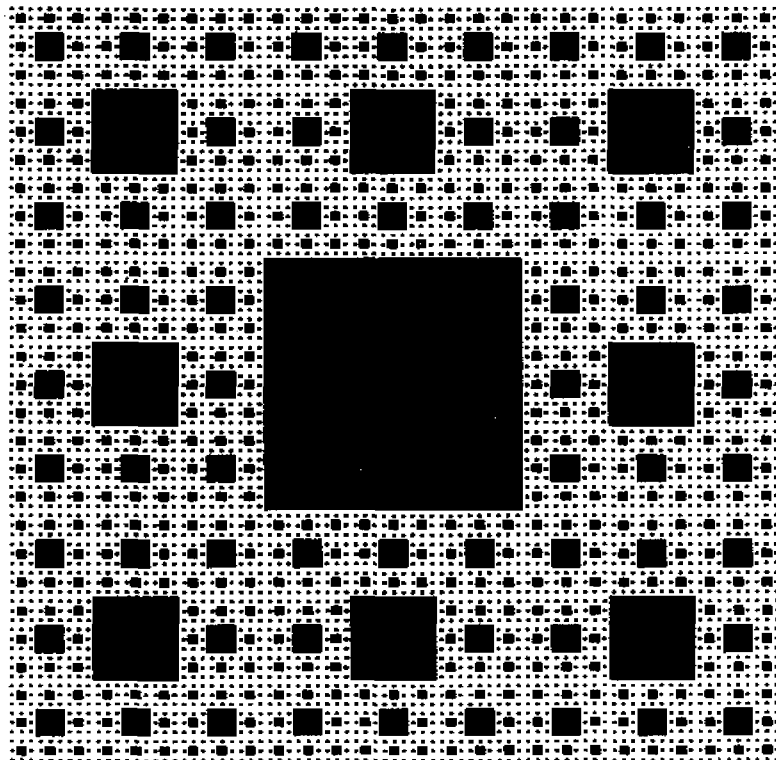


Figura 1.9

Descriviamo ora una applicazione meccanica della serie geometrica. Una pallina cade da una altezza  $h$  su di un piano orizzontale e rimbalza fino a raggiungere una altezza  $qh$ , ove il numero  $q$  è compreso fra 0 e 1 ed è indipendente da  $h$ . Idealmente la pallina effettuerà infiniti rimbalzi raggiungendo ogni volta una quota minore pari al prodotto di  $q$  per la quota precedente. È naturale chiedersi se la pallina cesserà di rimbalzare in un tempo finito oppure no.

La Figura 1.10 mostra il moto della pallina quando la velocità iniziale è diretta orizzontalmente. È chiaro che per studiare il problema basterà considerare unicamente le componenti verticali; si supporrà nulla la componente verticale della velocità iniziale.

Dalla legge oraria del moto uniformemente accelerato  $s = \frac{1}{2}gt^2$ , ove  $g$  è l'accelerazione di gravità, si ricava il tempo che intercorre fra l'istante in cui la pallina viene rilasciata

e il primo rimbalzo:

$$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

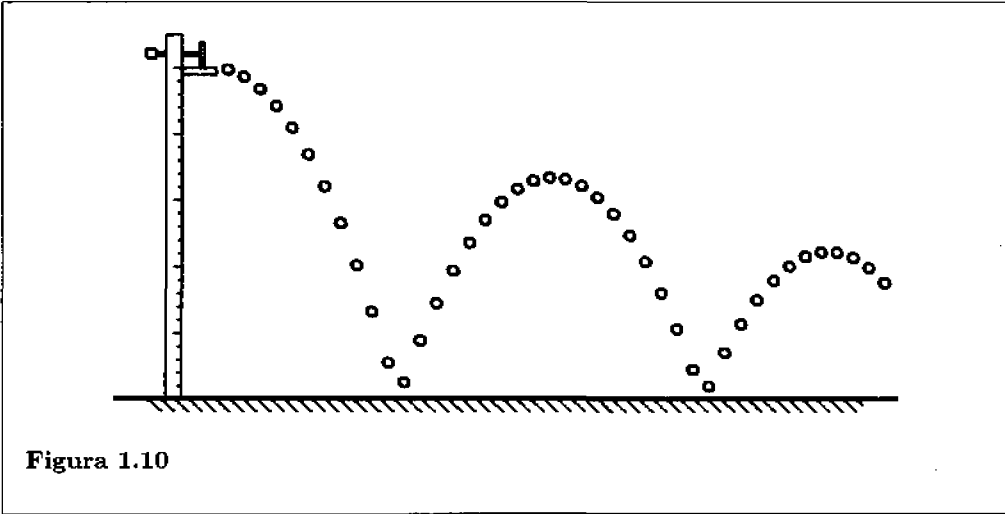


Figura 1.10

Tenendo conto che dopo il primo rimbalzo la pallina raggiunge l'altezza  $qh$ , dopo il secondo l'altezza  $q^2h$ , ... si avrà che il tempo  $t_1$  tra il primo e il secondo rimbalzo è

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{2qh}{g}} = 2t_0\sqrt{q};$$

analogamente

$$t_2 = 2t_0(\sqrt{q})^2, \dots, t_n = 2t_0(\sqrt{q})^n,$$

ove  $t_n$  denota il tempo che trascorre tra l' $n$ -esimo e l' $(n+1)$ -esimo rimbalzo. Il tempo totale è, dunque, espresso da una serie geometrica di ragione  $\sqrt{q} < 1$  che, quindi, converge:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=0}^{\infty} t_n = t_0 + 2t_0 \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{q})^n = t_0 \left[ 1 + 2\sqrt{q} \frac{1}{1-\sqrt{q}} \right] = \\ &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}. \end{aligned}$$

La pallina dunque, pur effettuando infiniti rimbalzi, cessa di rimbalzare dopo un tempo finito. Nel caso di una pallina di ping-pong che rimbalzi su una tavola di legno duro, un valore ragionevole di  $q$  è 0,75. Ponendo  $h = 1$  metro si ricava  $T \simeq 6,3$  secondi, di poco inferiore al valore sperimentale che chiunque è in grado di ottenere (la discrepanza è dovuta alla resistenza dell'aria).



## CRITERI DI CONVERGENZA

Negli esempi precedenti si è potuto determinare il comportamento di una serie calcolando esplicitamente le somme parziali  $s_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ ; il più delle volte, tuttavia, non è facile esibire una formula esplicita per  $s_n$ . È molto importante, perciò, poter disporre di criteri che consentano di individuare il comportamento di una serie  $\sum a_j$  sulla base dello studio dei soli suoi termini  $a_j$ .

Un semplice ma efficace criterio di convergenza è il seguente.

**PROPOSIZIONE 1.7** (*Criterio del confronto*) Siano  $\sum a_j$ ,  $\sum b_j$  serie a termini positivi e sia

$$a_j \leq b_j, \quad \text{per ogni } j. \quad (1.17)$$

Se la serie  $\sum b_j$  è convergente anche la serie  $\sum a_j$  è convergente e la sua somma è non superiore alla somma di  $\sum b_j$ ; se invece  $\sum a_j$  è divergente allora anche la serie  $\sum b_j$  è divergente.

**DIMOSTRAZIONE** Se  $s_n$  sono le somme parziali di  $\sum a_j$  e  $w_n$  sono le somme parziali di  $\sum b_j$ , da (1.17) segue  $s_n \leq w_n$  e dunque se l'insieme delle  $w_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , è limitato anche l'insieme delle  $s_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  lo è; se, invece, l'insieme delle  $s_n$  non è limitato neppure quello delle  $w_n$  lo è.  $\square$

**OSSERVAZIONE 1.8** È facile constatare che il precedente criterio è ancora valido se le disuguaglianze (1.17) sono soddisfatte solo definitivamente, cioè per ogni  $j$  maggiore di un certo  $j_0$ ; anche in questo caso si dice che la serie  $\sum a_j$  è *maggiorata* o *dominata* dalla serie  $\sum b_j$ . Non sarà però vero, in generale, che la serie  $\sum a_j$  ha somma non superiore alla somma di  $\sum b_j$ .

Più in generale si noti che *il comportamento di una serie non viene alterato modificando un numero finito di suoi termini* (lo è però il valore  $S$  della somma, nel caso di serie convergenti).



**ESEMPIO 1.9** (a) Si consideri la serie  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$ ; si ha

$$\frac{1}{j^2} \leq \frac{2}{j(j+1)}, \quad j = 1, 2, \dots;$$

dal criterio del confronto e dall'Esempio 1.6 segue che tale serie è convergente. Infatti, dalla definizione di convergenza segue subito la *proprietà di omogeneità*: se  $\sum a_j$  è una serie convergente con somma  $S$  allora per ogni numero  $c \geq 0$  la serie  $\sum ca_j$  è convergente con somma  $cS$  (si veda anche la Proposizione 1.17). Per confronto con la serie di Mengoli (1.14) segue allora che la serie  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$  è convergente e ha somma minore di 2; nel Capitolo 11 verrà provato che la somma è  $\frac{\pi^2}{6}$ .

(b) **Serie armonica.** La serie dei reciproci degli interi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

prende il nome di serie armonica in quanto ogni termine  $a_j = \frac{1}{j}$  è la *media armonica* dei due termini adiacenti  $\frac{1}{j-1}$  e  $\frac{1}{j+1}$ . La *serie armonica è divergente*. Si costruisca infatti la serie  $\sum b_j$  ponendo

$$b_1 = 1, \quad b_2 = \frac{1}{2}, \quad b_3 = b_4 = \frac{1}{4}, \quad b_5 = b_6 = b_7 = b_8 = \frac{1}{8},$$

e in generale  $b_j = \frac{1}{2^k}$  per  $2^{k-1} < j \leq 2^k$ . Si ha allora

$$b_j = \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{j}, \quad \text{se } 2^{k-1} < j \leq 2^k,$$

dunque  $b_j \leq \frac{1}{j}$  per ogni  $j \geq 1$ ; d'altra parte è chiaro che le somme parziali di  $\sum b_j$  non sono limitate, in quanto nell'espressione

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \dots + \frac{1}{2^k}\right)}_{2^{k-1} \text{ volte}}$$

ogni parentesi vale  $\frac{1}{2}$ .

Si osservi che, indicate con  $H_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) le somme parziali della serie armonica,  $H_n$ , pur divenendo all'aumentare di  $n$  maggiore di qualunque prefissato numero, cresce alquanto lentamente. Per esempio si ha

$$H_{1000} \simeq 7,48, \quad H_{1\,000\,000} \simeq 14,39;$$

per superare 100 occorre sommare la bellezza di circa  $10^{43}$  termini!

(c) **Serie esponenziale.** Ricordiamo che per ogni intero positivo  $n$  si definisce il fattoriale di  $n$  come

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1,$$

o, più formalmente, tramite la formula ricorsiva

$$1! = 1, \quad n! = n \cdot (n-1)!.$$

Si pone poi, per convenzione,  $0! = 1$ .

La serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \tag{1.18}$$

è dominata dalla serie geometrica di ragione  $\frac{1}{2}$ , in quanto risulta

$$j! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (j-1)j > 2^{j-1} \quad \text{se } j \geq 3,$$

e quindi

$$\frac{1}{j!} < \frac{1}{2^{j-1}}, \quad \text{se } j \geq 3. \quad (1.19)$$

(Si osservi che risulta anzi

$$j! > 2^j \quad \text{per } j \geq 4). \quad (1.20)$$

Dunque la serie (1.18), che si dice *serie esponenziale*, è convergente. La sua somma è un numero maggiore di 2 e minore di 3, come si ricava facilmente da (1.19):

$$2 < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{j!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{j-1}} < 3.$$

Tale somma viene indicata con il simbolo  $e$ ; essa è la base dei *logaritmi naturali* o *neperiani* e svolge un ruolo fondamentale nel calcolo. Il numero  $e$  è un numero irrazionale (come si vedrà tra breve) e trascendente (cioè non è radice di alcuna equazione algebrica a coefficienti interi).

La somma parziale  $s_n = \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!}$  fornisce un valore approssimato di  $e$ ; per esempio

calcolando  $s_{10} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{10!}$  si ha

$$s_{10} \simeq 2,718281801.$$

Ci si chiede con quale precisione questo numero approssima  $e$ ; indicando l'errore con  $E_{10} = e - s_{10}$ , usufruendo della disuguaglianza (1.20), si ottiene

$$\begin{aligned} E_{10} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} - \sum_{j=0}^{10} \frac{1}{j!} = \sum_{j=11}^{\infty} \frac{1}{j!} < \sum_{j=11}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \\ &= \frac{1}{2^{11}} \left[ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right] = \frac{1}{2^{11}} \cdot \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024} < \frac{1}{10^3}. \end{aligned}$$

Quindi  $s_{10}$  approssima  $e$  con errore minore di  $1/1000$ . Con un calcolo lievemente più elaborato (si veda l'Esercizio 1.2.33) si verifica, però, che l'approssimazione è molto migliore in quanto risulta

$$E_n = e - s_n < \frac{1}{n \cdot n!}. \quad (1.21)$$

La serie esponenziale è, dunque, "rapidamente" convergente e fornisce un algoritmo molto efficiente per la determinazione del numero  $e$ .

Il valore di  $e$ , approssimato alla ventesima cifra decimale, è

$$e \simeq 2,71828182845904523536;$$

una buona approssimazione (con quattro cifre decimali) è data dalla frazione  $\frac{878}{323}$  che ha il pregio di essere facilmente memorizzabile.

La stima (1.21) consente di dimostrare facilmente la *irrazionalità* di  $e$ . Infatti se  $e$  fosse razionale, posto  $e = \frac{p}{q}$  con  $p, q$  interi primi fra loro, si avrebbe

$$0 < \frac{p}{q} - s_q = \frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{q!} < \frac{1}{q \cdot q!};$$

ma, moltiplicando per  $q!$  si otterrebbe

$$0 < q! \left( \frac{p}{q} - s_q \right) < \frac{1}{q},$$

il che è assurdo in quanto  $q! \left( \frac{p}{q} - s_q \right)$  è certamente intero.



Il confronto con la serie geometrica consente di dimostrare facilmente i seguenti due utili criteri di convergenza.

**PROPOSIZIONE 1.10** (*Criterio del rapporto o di D'Alembert*) Sia  $\sum a_n$  una serie a termini positivi; se esiste un numero  $q$  con  $0 < q < 1$  tale che

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q \quad \text{definitivamente,} \tag{1.22}$$

allora la serie  $\sum a_n$  è convergente.

**DIMOSTRAZIONE** A patto di eliminare dalla serie un numero finito di termini (il che, come si sa, non altera il carattere della serie) si può ritenere che la disuguaglianza  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$  sia verificata per ogni indice  $n$ . Si ha, allora,  $a_2 \leq a_1 q$ ,  $a_3 \leq a_2 q \leq a_1 q^2, \dots$ ,  $a_{n+1} \leq a_n q \leq a_1 q^n$ . Ne segue che la serie  $\sum a_n$  è maggiorata dalla serie geometrica  $a_1 \sum q^n$ , che è convergente essendo  $q < 1$ . □

**PROPOSIZIONE 1.11** (*Criterio della radice*) Sia  $\sum a_n$  una serie a termini positivi; se esiste un numero  $q < 1$  tale che

$$\sqrt[n]{a_n} \leq q \quad \text{definitivamente,} \tag{1.23}$$

allora la serie  $\sum a_n$  è convergente.

**DIMOSTRAZIONE** Per  $n$  maggiore di un certo indice  $\bar{n}$  si ha  $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ , quindi  $a_n \leq q^n$  per  $n \geq \bar{n}$ . Pertanto la serie in esame è maggiorata, definitivamente, dalla serie geometrica di ragione  $q < 1$  e quindi (Osservazione 1.8) converge. □

Vale la pena di osservare che le condizioni (1.22), (1.23) non possono in alcun modo essere sostituite da

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \quad \sqrt[n]{a_n} < 1.$$

Per esempio la serie armonica  $\sum \frac{1}{n}$  soddisfa tali condizioni, ma come ben sappiamo diverge.

Si noti, inoltre, che i predetti criteri stabiliscono *condizioni sufficienti* per la convergenza della serie  $\sum a_n$  ma non sono affatto necessari. In altri termini una serie può essere convergente senza che alcuna delle condizioni (1.22) e (1.23) sia soddisfatta.

Una *condizione necessaria* (ma non sufficiente) per la convergenza è, invece, espressa dalla seguente

**PROPOSIZIONE 1.12** Se la serie a termini positivi  $\sum a_j$  è convergente allora per ogni numero  $\varepsilon > 0$  risulta

$$a_j < \varepsilon \quad \text{definitivamente.} \quad (1.24)$$

**DIMOSTRAZIONE** Detta  $S$  la somma della serie, basta osservare che, essendo  $s_{j-1} \leq s_j \leq S$ , si ha,

$$a_j = s_j - s_{j-1} \leq S - s_{j-1}. \quad \square$$

La condizione (1.24) si esprime anche dicendo che la successione  $\{a_j\}$  è *infinitesima*; più in generale si chiamano infinitesime quelle successioni  $\{a_j\}$  che verificano la seguente proprietà:

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ risulta } |a_j| < \varepsilon \text{ definitivamente.} \quad (1.25)$$

Si dice anche che le successioni infinitesime  $a_j$  hanno *limite 0* o che *tendono a 0* per  $j$  tendente all'infinito. Nel seguito saranno studiati in modo sistematico questi concetti.

Si presti attenzione a non equivocare sul significato della Proposizione 1.12: essa non afferma che se  $a_j$  è infinitesima allora  $\sum a_j$  è convergente; l'esempio della serie armonica mostra anche in questo caso che detta implicazione è falsa. Tuttavia la proposizione fornisce un *criterio di divergenza*: se  $a_j$  non è infinitesima allora  $\sum a_j$  certamente non converge.

Vi sono, poi, alcuni casi nei quali dimostrare direttamente che una certa successione  $a_j$  è infinitesima è più difficile che verificare la convergenza della serie  $\sum a_j$ . In queste circostanze la proposizione precedente può essere utilizzata per il calcolo dei limiti (si veda per esempio l'Esercizio 1.4.10).



**ESEMPLI 1.13 (a)** Si consideri  $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ , ove  $x$  è un fissato numero con  $0 < x < 1$ . Si ha

$$\frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)x \leq \frac{x+1}{2} < 1$$

non appena  $n \geq \frac{2x}{1-x}$ ; dunque, per il criterio del rapporto, la serie è convergente.

(b) Per la serie (convergente)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  sia il criterio del rapporto sia il criterio della radice sono inefficaci. Infatti non esiste alcun numero  $q < 1$  tale che risulti

$$\frac{1/(n+1)^2}{1/n^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < q \quad \text{definitivamente,}$$

(si utilizzi l'Esercizio 1.2.14(a)); e neppure esiste  $q < 1$  per il quale si abbia

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n^{2/n}} < q \quad \text{definitivamente}$$

(Esercizio 1.2.15).

(c) Si consideri la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ove i termini  $a_n$  sono definiti dalla relazione ricorsiva

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n^2(1 - a_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

È facile accorgersi che l'intera successione  $a_n$  è costituita da numeri compresi fra 0 e 1; dunque la serie studiata è a termini positivi, ma è molto difficile trovare una espressione esplicita di  $a_n$  in funzione di  $n$ .

Il criterio del rapporto consente tuttavia di concludere che la serie  $\sum a_n$  è convergente; infatti

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = a_n(1 - a_n) \leq \frac{1}{4} < 1,$$

in quanto per ogni  $x$  reale, essendo  $(x - \frac{1}{2})^2 \geq 0$ , si ha  $x(1 - x) \leq 1/4$ .

## ESERCIZI

1.2.24 Scrivere i primi cinque termini delle successioni e delle serie individuate dalle seguenti relazioni:

$$(a) \quad a_n = \frac{n-1}{n^2+1}; \quad (b) \quad a_n = (-1)^n \cdot n.$$

1.2.25 Calcolare la somma delle seguenti serie geometriche:

$$(a) \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots \quad (b) \quad 2 - 0,2 + 0,02 - 0,002 + \dots$$

1.2.26 Scrivere sotto forma di frazione i numeri decimali indicati, dopo averli espressi mediante una serie geometrica:

$$(a) \quad 0,666\dots = \frac{6}{10} + \frac{6}{100} + \dots;$$

$$(b) \quad 0,999\dots = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \dots;$$

$$(c) \quad 2,3777\dots = 2,3 + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$$

**1.2.27** Usando la definizione di serie provare il seguente familiare risultato: sia  $x$  un numero decimale periodico misto, per esempio  $x = 6,34\overline{58} = 6,34585858\dots$ . Allora  $x$  è uguale alla frazione il cui numeratore è la differenza fra il numero ottenuto scrivendo, nell'ordine, le cifre della parte intera, dell'antiperiodo nonché del periodo, e quello formato dalle cifre della parte intera e dell'antiperiodo, mentre il denominatore è costituito da tanti 9 quante sono le cifre del periodo e da tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo (nell'esempio sopra visto  $x = \frac{63458-634}{9900}$ ).

**1.2.28** Dopo aver riconosciuto che per ogni  $x$  le serie seguenti sono riconducibili a serie geometriche, individuare i valori di  $x$  per cui convergono e scriverne la somma:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x+1}{x^2+1} \right)^{n+1}, \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n(x^2+4)}.$$

**1.2.29** Siano  $r$  ed  $s$  due semirette uscenti dal vertice  $O$  che formano un angolo di  $30^\circ$ . Detto  $A_0$  il punto di  $r$  che dista 1 da  $O$ , sia  $A_1$  il piede della perpendicolare condotta da  $A_0$  a  $s$ , sia poi  $A_2$  il piede della perpendicolare condotta da  $A_1$  a  $r$ . Si prosegua indefinitamente nel modo anzidetto (Figura 1.11). Si dia una definizione della lunghezza della spezzata infinita  $A_0A_1A_2\dots A_n\dots$  e si calcoli tale lunghezza.

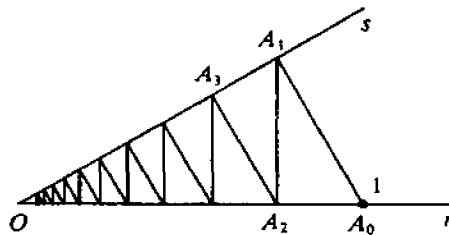


Figura 1.11

**1.2.30** Discutere la convergenza delle serie:

$$\begin{array}{lll}
 (a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}; & (b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n}; & (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}; \\
 (d) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}; & (e) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \frac{2^{n+1}}{3^n}; & (f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}; \\
 (g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^3+1)}}; & (h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^3}; & (i) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n!}; \\
 (l) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{3+(-1)^n}}\right); & (m) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{n^2}\right); & (n) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}.
 \end{array}$$

1.2.31 Provare che le seguenti serie telescopiche sono convergenti e calcolarne la somma:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1/2}{n^2(n+1)^2};$$

$$(c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

[Per (d) si osservi che  $a_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1})$ ].

1.2.32 Si costruisca la spezzata  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  ove  $OP_1 = 1, P_n P_{n+1} = \frac{1}{n+1}, n = 1, 2, \dots$  e gli angoli  $\widehat{OP_n P_{n+1}}$  sono tutti retti e orientati nello stesso verso.

(a) Si dica se la distanza del punto  $P_n$  dall'origine  $O$  si mantiene limitata al crescere di  $n$ .

(b) Si dica se l'angolo  $\widehat{P_1 O P_n}$  cresce indefinitamente o meno.

[Si tenga presente la diseuguaglianza  $\sin x < x$ , per  $x > 0$ ].

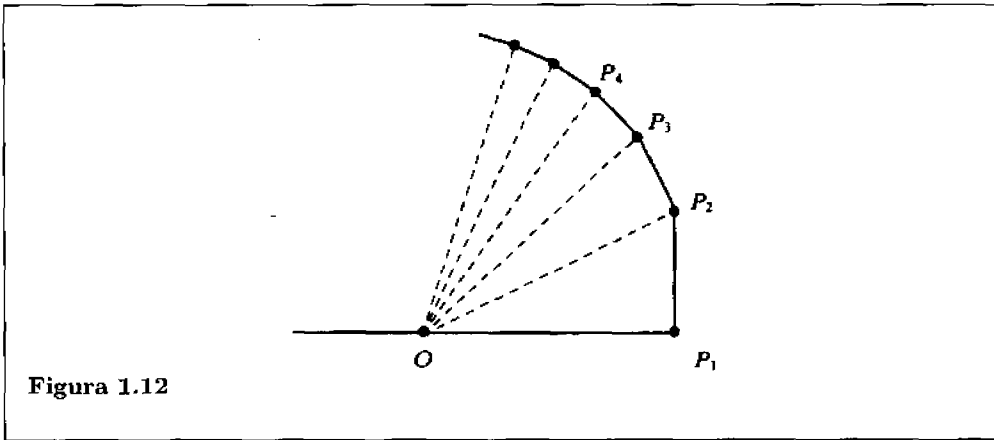


Figura 1.12

1.2.33 Provare che risulta

$$e < \sum_{j=0}^N \frac{1}{j!} + \frac{N+2}{N+1} \frac{1}{(N+1)!}$$

e dedurre la stima (1.21).

1.2.34 Sia  $x > 0$ ; dalla serie geometrica si ha

$$x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{x}{1-x}$$

e anche

$$1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \dots = \frac{1}{1-1/x} = \frac{x}{x-1}.$$



Sommando si ottiene la seguente formula (attribuita a Eulero)

$$\dots + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + 1 + x + x^2 + \dots = \frac{x}{x-1} + \frac{x}{1-x} = 0.$$

Dov'è l'errore?

**1.2.35** James Bernoulli (Opera, 1, 375) parte dalla serie

$$A = \frac{a}{c} + \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \dots$$

dalla quale ottiene

$$A - \frac{a}{c} = \frac{a}{2c} + \frac{a}{3c} + \frac{a}{4c} + \dots$$

Sottraendo ora la seconda relazione dalla prima egli ricava

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \left(\frac{a}{c} - \frac{a}{2c}\right) + \left(\frac{a}{2c} - \frac{a}{3c}\right) + \left(\frac{a}{3c} - \frac{a}{4c}\right) + \dots = \\ &= \frac{a}{1 \cdot 2 \cdot c} + \frac{a}{2 \cdot 3 \cdot c} + \frac{a}{3 \cdot 4 \cdot c} + \dots \end{aligned}$$

Tale risultato è corretto? Ed è corretta la deduzione di Bernoulli?

**1.2.36** Studiare la convergenza delle serie seguenti:

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-2n}{(\sqrt{2})^n}; & \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{(n-1)!}; & \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n; \\ \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}; & \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot 3^{-\sqrt{n}}; & \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{sen} n}{3^n}; \\ \text{(g)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{n}{2}}; & \text{(h)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot 2^{-\frac{n}{2}}. & \end{array}$$

**1.2.37** (*Curva di von Koch*) Partendo da un triangolo equilatero di lato unitario, si divide in tre parti uguali ciascun lato e sulla parte mediana si costruisca un "promontorio", sempre a forma di triangolo equilatero. Si ripeta la costruzione per ciascuno dei lati della nuova figura ottenuta (Figura 1.13).

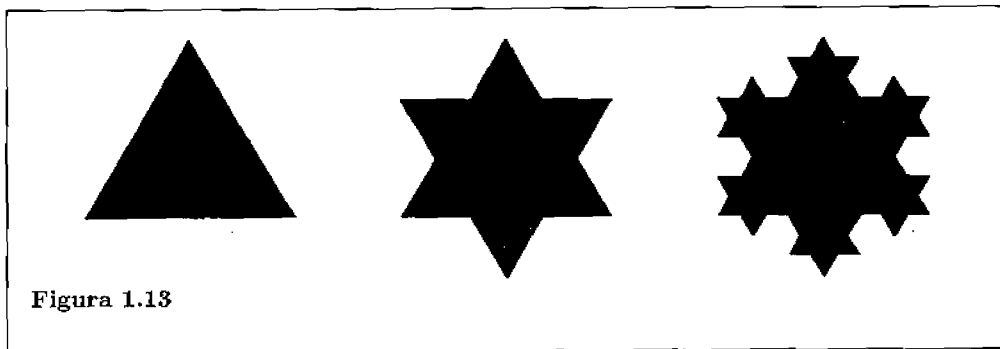


Figura 1.13

Iterando indefinitamente il procedimento si genera una curva chiusa, detta curva di von Koch. Si verifichi che la "lunghezza" di tale curva è infinita e si calcoli l'area della regione di piano da essa delimitata.

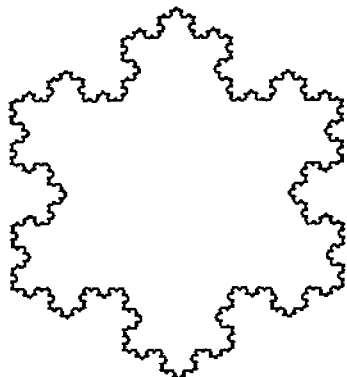


Figura 1.14

**1.2.38** Siano  $F_n$  i numeri di Fibonacci, definiti da  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Si dica se la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/F_n$  converge.

**1.2.39** Sia  $a_n$  una successione di numeri positivi tali che  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$  sia convergente e si abbia, per ogni  $n > 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Provare che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è convergente.

**1.2.40** Sia  $\sum a_n$  una serie convergente; si provi che anche la serie  $\sum a_n^2$  è convergente. Si può dire che se  $\sum a_n^2$  è convergente, allora converge anche  $\sum a_n$ ?

**1.2.41** Sapendo che la serie  $\sum a_n$  ( $a_n \geq 0$ ) è convergente, dire quali delle seguenti serie convergono necessariamente:

(a)  $\sum n\sqrt{a_n}$ ;

(b)  $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ .

**1.2.42** Illustrare con un esempio che la serie  $\sum \frac{a_n}{b_n}$  può essere divergente anche se  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  sono convergenti e nessun  $b_n$  è nullo.

- 1.2.43 Sia  $a_n$  una successione di numeri non negativi tali che  $\sum a_n$  diverga. Dimostrare che è convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1 + n^2 a_n}.$$

- 1.2.44 Sia  $a_n$  una successione di numeri positivi; si provi che la serie  $\sum a_n$  è convergente se e solo se lo è la serie  $\sum \frac{a_n}{1 + a_n}$ .

- 1.2.45 Discutere la convergenza delle serie

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}}; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-\sqrt{n}}.$$

- 1.2.46 Sia  $a_n$  una successione infinitesima tale che  $a_n \geq a_{n+1} \geq 0$ . Provare che se la serie  $\sum a_n$  è convergente allora anche la serie  $\sum n(a_n - a_{n+1})$  lo è, e le due serie hanno la stessa somma.

- 1.2.47 Provare che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ove i termini  $a_n$  sono definiti ricorsivamente dalle formule

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + a_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

è convergente. Provare, invece, che l'analoga serie i cui termini sono definiti da

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

è divergente.

- 1.2.48 Un baco, lento ma tenace, parte da una estremità di un nastro di gomma lungo un metro e avanza verso l'altra estremità alla velocità di 10 centimetri al minuto. A ogni minuto, però, uno spirito maligno allunga il nastro di 1 metro. Così, alla fine del primo minuto, il baco è a 10 cm dal punto di partenza e a 90 cm da quello di arrivo. Ma, poiché è passato un minuto, il nastro viene allungato di un metro; il baco mantiene la sua posizione relativa durante l'allungamento, a 10% dalla partenza e a 90% dall'arrivo e, quindi, all'inizio del secondo minuto si trova a 20 cm dalla partenza e a 190 cm dall'arrivo. Dopo 2 minuti si trova a 30 cm dalla partenza e a 170 cm dall'arrivo, ma il nastro viene allungato e le distanze diventano 45 e 255 cm. Riuscirà mai il baco a raggiungere la meta? (ovviamente si suppone che il nastro possa allungarsi all'infinito e che infinite siano sia la longevità del baco sia la perversità dello spirito maligno).
- 1.2.49 Su un tavolo orizzontale vi è una pila di  $n$  monete uguali; si assuma come unità di misura il loro raggio. Provare che è possibile disporre le monete nella pila in modo che esse siano in equilibrio e che la distanza  $d_n$  fra le verticali passanti per il centro della moneta più bassa e di quella più alta risulti

$$d_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1}.$$

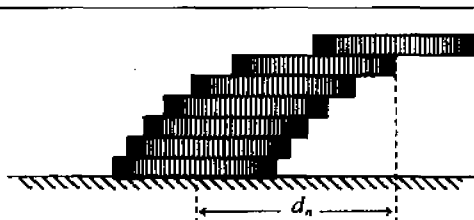


Figura 1.15

**1.2.50** Fu posto a Von Neumann questo problema: due ciclisti distanti tra loro 100 miglia si vogliono incontrare; partono contemporaneamente e si muovono entrambi a 10 miglia all'ora. Nel medesimo istante una mosca lascia la prima bicicletta e vola verso la seconda a 20 miglia all'ora. Lì giunta, riparte alla stessa velocità per ritornare alla prima. La mosca continuerà a volare dall'una all'altra bicicletta finché i due ciclisti si incontreranno. Quale sarà il suo percorso? Von Neumann rispose dopo una breve riflessione calcolando la somma di tutti i tratti percorsi dalla mosca, ma era possibile rispondere in modo più semplice. Dare le due risposte.

### 1.3 Serie a termini di segno variabile

In questo paragrafo la definizione di convergenza viene estesa al caso di serie con termini  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  non tutti dello stesso segno. Sarà studiato un caso particolarmente importante, quello delle serie con termini di segno alternativamente positivo e negativo. Ci si renderà conto che non tutte le proprietà delle somme finite si estendono alle serie convergenti con termini di segno qualunque; per esempio non è possibile, in generale, cambiare a piacimento l'ordine dei termini. Verrà introdotta, quindi, la nozione di convergenza assoluta e si vedrà che alle serie assolutamente convergenti si estende la proprietà commutativa delle somme finite; tali serie si prestano, dunque, ottimamente alla manipolazione algebrica.

Nel caso delle serie convergenti a termini positivi abbiamo visto che le somme parziali  $s_n$  sono approssimazioni di quel numero  $S$  definito somma della serie, e che pur di prendere  $n$  grande a sufficienza tali approssimazioni sono accurate quanto si vuole. Si possono riassumere le condizioni  $(C_1)$  e  $(C_2)$  di convergenza nel modo seguente (tenendo conto dell'Osservazione 1.5(b)).

$(C_{1,2})$  per ogni numero  $\varepsilon > 0$  definitivamente si ha  $S - \varepsilon < s_n \leq S$ .

Quando in una serie compaiono sia termini positivi, sia termini negativi, la limitatezza delle ridotte parziali non basterà da sola a garantire la possibilità di attribuire alla serie una somma: si pensi alla serie

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

le cui somme parziali sono alternativamente 1 e 0. Tuttavia, in certi casi, la nozione intuitiva di somma infinita si preserva. Si consideri, per esempio, una pallina che, partendo dall'origine, si muova lungo l'asse  $y$  con velocità unitaria; la pallina dopo

un secondo inverte la direzione del moto, la inverte nuovamente dopo  $1/2$  secondo, ancora dopo  $1/3$  di secondo e così via. La pallina continuerà a muoversi per un *tempo infinito* (la serie  $\sum \frac{1}{n}$  è divergente) e dunque percorrerà una distanza infinita; sembra tuttavia ragionevole poter individuare un punto  $P$  dell'asse  $y$  verso il quale la pallina si avvicina sempre di più (la Figura 1.16 riporta il grafico del moto orario) e chiamare l'ordinata di tale punto somma della serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (1.26)$$

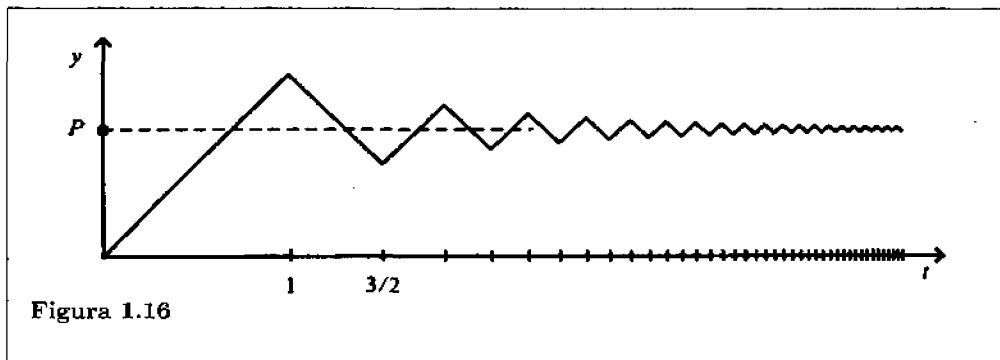


Figura 1.16

Nel caso di serie aventi sia termini positivi sia negativi l'approssimazione delle somme parziali alla somma (che *debiamo ancora definire*) può essere per difetto ma anche per eccesso; è, dunque, naturale sostituire la condizione  $(C_{1,2})$  con la seguente

**DEFINIZIONE 1.14** Data una serie  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$  si dirà che la serie è *convergente* e ha *somma*  $S$  se

(C) per ogni  $\varepsilon > 0$ , definitivamente si ha  $S - \varepsilon < s_n < S + \varepsilon$ .

Si noti che la condizione (C) si può porre nella forma equivalente

(C) per ogni  $\varepsilon > 0$  definitivamente si ha  $|S - s_n| < \varepsilon$ .

È facile ora verificare che la precedente definizione di somma di una serie convergente è ben posta, cioè la condizione (C) non può essere verificata, per una stessa serie, da due numeri diversi  $S$  e  $S'$ .

Se così fosse, infatti, per ogni numero  $\varepsilon > 0$  si troverebbe un indice  $\bar{n}$  per cui  $|S - s_n| < \varepsilon$  e anche  $|S' - s_n| < \varepsilon$ , da cui

$$|S - S'| \leq |S - s_n| + |s_n - S'| < 2\varepsilon;$$

poiché  $\varepsilon$  è arbitrario ne segue  $S - S' = 0$ .

La condizione (C) si può anche formulare nel modo seguente: *la successione  $s_n - S$  è infinitesima per  $n$  tendente all'infinito*, o anche: *la successione  $s_n$  ha limite  $S$  per  $n$  che tende all'infinito*; queste locuzioni esprimono con un suggestivo linguaggio "dinamico" ciò che la (C) esprime "staticamente" (si ricordi l'osservazione conclusiva del Paragrafo 1.1; queste considerazioni saranno sviluppate nel Paragrafo 1.4).

Come nel caso di una serie a termini positivi (Proposizione 1.12) la *successione dei termini*  $a_n$  di una serie convergente  $\sum a_n$  è *infinitesima*; infatti se  $S$  è la somma della serie si ha

$$|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \leq |s_n - S| + |S - s_{n-1}|$$

e, quindi, definitivamente  $|a_n| < 2\varepsilon$ . Come già sappiamo *non è vero il viceversa*, cioè il fatto che il termine  $n$ -esimo  $a_n$  sia infinitesimo (tenda a zero) non garantisce affatto la convergenza della serie  $\sum a_n$ .

Nel caso della serie a termini positivi sono possibili solo due tipi di comportamento: o la serie converge o altrimenti la successione delle somme parziali  $s_n$  è illimitata; in tal caso si diceva che la serie è divergente (positivamente) (Definizione 1.4).

Nel caso delle serie con termini di segno variabile non è più possibile una classificazione così semplice. Accanto alle serie che convergono, nel senso della definizione data or ora, vi sono serie che *divergono positivamente* e altre che *divergono negativamente*. Tali due comportamenti sono caratterizzati dalle condizioni:

(D<sup>+</sup>) per ogni numero  $K$  definitivamente si ha  $s_n > K$ ,

(D<sup>-</sup>) per ogni numero  $K$  definitivamente si ha  $s_n < K$ ,

ove  $s_n$  denota la somma parziale  $n$ -esima (Osservazione 1.5); nei due casi si scrive

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty.$$

Vi sono, però, serie, quali  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ , che non rientrano nelle categorie

ora descritte; esse vengono talvolta chiamate *serie indeterminate*, anche se non vi è concordanza su questa denominazione: la maggior parte della letteratura anglosassone chiama divergenti tutte le serie che non convergono. La questione è, comunque, di secondaria importanza in quanto la nozione fondamentale è quella di convergenza.

La definizione di convergenza 1.11 è utilizzabile nella pratica per decidere se una serie converge o meno solo quando  $S$  è noto o intuibile a priori. Tuttavia il più delle volte non è così (si pensi all'esempio della pallina): l'interesse delle serie sta proprio nel fatto che le loro somme parziali forniscono approssimazioni via via migliori di grandezze che non sono note a priori. È utile, quindi, avere criteri che consentano di decidere se una data serie è convergente o meno senza avere informazioni sulla sua somma  $S$ .

## SERIE A SEGNO ALTERNO

Per le serie che hanno i termini alternativamente di segno positivo e negativo, come la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \dots,$$

si può formulare un comodo criterio di convergenza. Conviene porre tali serie nella forma

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad (1.27)$$

ove gli  $a_n$  sono tutti positivi.

**PROPOSIZIONE 1.15** (*Criterio di Leibniz*) Se la successione di numeri positivi  $\{a_n\}$  è decrescente (cioè  $a_{n+1} \leq a_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) e infinitesima (ossia per ogni  $\varepsilon > 0$  definitivamente si ha  $a_n < \varepsilon$ ), allora la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$  è convergente.

**DIMOSTRAZIONE** Si consideri la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ , ove  $b_n = a_{2n-1} - a_{2n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , che si ottiene raggruppando a due a due i termini della serie data. Tale serie è a termini positivi (o nulli) e le sue somme parziali sono le somme parziali  $s_{2n}$  di indice pari di  $\sum (-1)^{n-1} a_n$ . Esse sono limitate, in quanto

$$\begin{aligned} s_{2n} &= a_1 - a_2 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} = \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1, \end{aligned} \quad (1.28)$$

e quindi la serie a termini positivi  $\sum b_n$ , avendo le somme parziali limitate, è certamente convergente. Sia  $S$  la sua somma; dato  $\varepsilon > 0$ , per la Definizione di convergenza 1.4 (e l'Osservazione 1.5) si ha

$$S - \varepsilon < s_{2n} < S \quad \text{definitivamente}; \quad (1.29)$$

d'altra parte  $a_n$  è infinitesima e quindi

$$a_{2n+1} < \varepsilon \quad \text{definitivamente}.$$

Dunque definitivamente in  $n$  risulta anche

$$s_{2n} < s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} < S + \varepsilon. \quad (1.30)$$

Dalle disequaglianze (1.29) e (1.30) segue che la Definizione 1.14 è soddisfatta e, quindi, che la serie  $\sum (-1)^{n-1} a_n$  converge.  $\square$

**OSSERVAZIONE 1.16** È interessante notare che, nelle ipotesi della precedente proposizione, si ha la doppia disequaglianza

$$s_{2n} \leq S \leq s_{2n+1} \quad \text{per ogni } n. \quad (1.31)$$

La prima di esse si ricava immediatamente da (1.29). Per dimostrare la seconda si noti che

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \leq s_{2n+1},$$

vale a dire le somme parziali di indice dispari decrescono al crescere di  $n$ . Se, dunque, fosse  $S > s_{2n+1}$  per un certo  $\bar{n}$  si avrebbe  $S > s_{2\bar{n}+1} \geq s_{2n+1}$  per ogni indice  $n \geq \bar{n}$ . Questo, tuttavia, contraddice, per un  $\varepsilon$  opportuno, la (1.30). La disequaglianza (1.31) consente di concludere che le somme parziali di indice pari forniscono un valore approssimato per difetto della somma, quelle di indice dispari un valore approssimato per eccesso e che l'errore di tali approssimazioni non è superiore al primo termine trascurato (infatti  $S - s_{2n} \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1}$ ,  $s_{2n+1} - S \leq s_{2n+1} - s_{2n+2} = a_{2n+2}$ ). Osserviamo, poi, che la Proposizione 1.15 continua a valere anche se la successione  $a_n$  è solo definitivamente decrescente, cioè la disequaglianza  $0 < a_{n+1} \leq a_n$  vale solo da un certo indice  $\bar{n}$  in poi. Infatti si può ripetere qui l'Osservazione 1.8: *il comportamento di una serie non viene alterato modificando un numero finito di suoi termini.*

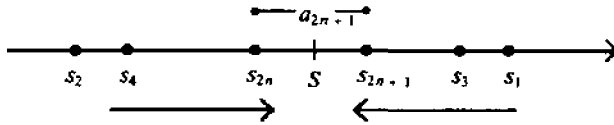


Figura 1.17

Alle somme infinite si estendono alcune proprietà (ma non tutte) delle somme ordinarie; in particolare è facile verificare la seguente

**PROPOSIZIONE 1.17** Se  $\sum a_j, \sum b_j$  sono serie convergenti di somme rispettivamente  $S$  e  $S'$  anche la serie  $\sum (a_j + b_j)$  è convergente e ha somma  $S + S'$ ; se, poi,  $c$  è un qualunque numero, la serie  $\sum (ca_j)$  è convergente e ha somma  $cS$ .

**DIMOSTRAZIONE** Proviamo, per esempio, la prima affermazione. Essendo  $\sum a_j = S, \sum b_j = S'$  per ogni fissato  $\varepsilon > 0$  si avrà

$$|S - s_n| < \varepsilon \quad \text{definitivamente,}$$

$$|S' - s'_n| < \varepsilon \quad \text{definitivamente,}$$

ove  $s_n$  e  $s'_n$  indicano le somme parziali delle due serie. Si noti che  $s_n + s'_n = \sum_{j=1}^n a_j +$

$\sum_{j=1}^n b_j = \sum_{j=1}^n (a_j + b_j)$  è esattamente la somma parziale  $n$ -esima della serie  $\sum (a_j + b_j)$ .

La tesi segue subito dalle disequaglianze precedenti e dalla disequaglianza triangolare:

$$|(S + S') - (s_n + s'_n)| \leq |S - s_n| + |S' - s'_n| < 2\varepsilon \quad \text{definitivamente.} \quad \square$$

Dunque le serie convergenti si possono sommare e sottrarre termine a termine. Non valgono invece, in generale, le proprietà associativa e commutativa. Si consideri, per esempio, la serie

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n};$$

per il criterio di Leibniz essa è convergente; sia  $S$  la sua somma (verificheremo in seguito che si ha  $S = \ln 2$ : tale è quindi l'ordinata del punto  $P$  della Figura 1.16). Moltiplicando per il fattore  $1/2$  si ha allora, in virtù della proposizione precedente,

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots = S,$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2}S;$$

sommando i termini incolonnati, si ottiene

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2}S.$$



Quest'ultima serie può, ovviamente, essere ottenuta riordinando i termini della serie iniziale e tuttavia il valore della sua somma risulta moltiplicato per il fattore  $3/2$ .

Riordinare, quindi, i termini di una serie può cambiare il valore della somma. La serie ora considerata  $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$  è convergente, ma la serie dei valori assoluti dei suoi termini  $\sum \frac{1}{n}$  è divergente. Solo le serie che hanno questo comportamento presentano lo sconcertante fenomeno sopra descritto.

## CONVERGENZA ASSOLUTA

**DEFINIZIONE 1.18** Una serie  $\sum a_n$  dice *assolutamente convergente* se la serie  $\sum |a_n|$  è convergente.

Come ben mostra l'esempio  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ , una serie può essere convergente senza essere assolutamente convergente. È però vero il viceversa:

**TEOREMA 1.19** Se  $\sum |a_n|$  converge allora anche  $\sum a_n$  converge e si ha

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (1.32)$$

**DIMOSTRAZIONE** Si ponga

$$a_n^+ = \frac{1}{2}(a_n + |a_n|), \quad n = 1, 2, \dots$$

e si consideri la serie  $\sum a_n^+$ . Il suo termine  $n$ -esimo è 0 oppure  $|a_n|$ , a seconda che sia  $a_n < 0$  o  $a_n \geq 0$ . Si può, allora, scrivere  $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$ ; dunque la serie  $\sum a_n^+$  è maggiorata da  $\sum |a_n|$ , convergente per ipotesi. Pertanto essa converge e quindi, in base alla Proposizione 1.17, anche la serie  $\sum a_n$  converge essendo  $a_n = 2a_n^+ - |a_n|$ .

Si osservi che, indicando con  $S$  la somma della serie  $\sum a_n$  e con  $s_n$  la sua somma parziale  $n$ -esima, dato  $\varepsilon > 0$  si ha definitivamente

$$s_n - \varepsilon \leq S \leq s_n + \varepsilon,$$

da cui

$$|S| \leq |s_n| + \varepsilon = \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^n |a_k| + \varepsilon \leq \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| + \varepsilon;$$

l'arbitrarietà di  $\varepsilon$  dà la (1.32). □

Il teorema ora dimostrato costituisce, in pratica, l'unico criterio generale di convergenza per serie con termini di segno variabile.

**ESEMPI 1.20 (a)** La serie geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  è assolutamente convergente per  $-1 < x < 1$ . È facile estendere agli  $x$  con  $-1 < x < 0$  la formula (1.15) che ne fornisce la somma (si veda l'Esercizio 1.3.11).

(b) La serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n}{n^2}$$

è convergente. Infatti, da  $\frac{|\text{sen } n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$  si ricava che la serie data è assolutamente convergente, per il criterio del confronto.

(c) La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{n}}$  è assolutamente convergente per  $1 < x < 3$ , come si vede facilmente applicando il criterio del rapporto. Quando  $|x-2| = 1$  tale criterio risulta inefficace, tuttavia, se  $x = 3$  la serie diviene  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$  e, dunque, è divergente (per confronto con la serie armonica); quando, invece,  $x = 1$  si ha la serie  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  la quale converge per il criterio di Leibniz.



Le serie che convergono, ma non assolutamente, si dicono anche *condizionatamente convergenti* o *semplicemente convergenti*. Il problema di valutare se una serie assegnata  $\sum a_n$  è condizionatamente o assolutamente convergente è strettamente legato al comportamento delle due serie, a termini positivi o nulli,  $\sum a_n^+$  e  $\sum a_n^-$  che si ottengono da essa sostituendo, per la prima, 0 a tutti i termini negativi e sostituendo, per la seconda, tutti i termini positivi con 0 e cambiando di segno ai rimanenti. In simboli

$$\begin{aligned} a_n^+ &= \frac{1}{2}(a_n + |a_n|), & a_n^- &= \frac{1}{2}(|a_n| - a_n), \\ a_n &= a_n^+ - a_n^-, & |a_n| &= a_n^+ + a_n^-. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Per esempio per la serie

$$\sum a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

si avrà

$$\sum a_n^+ = 1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + \dots, \quad \sum a_n^- = 0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \dots$$

**PROPOSIZIONE 1.21 (a)** La serie  $\sum a_n$  è assolutamente convergente se, e solo se,  $\sum a_n^+$ ,  $\sum a_n^-$  sono entrambe convergenti.

(b) Se  $\sum a_n$  è condizionatamente convergente allora le serie  $\sum a_n^+$ ,  $\sum a_n^-$  divergono entrambe.

**DIMOSTRAZIONE** (a) Se la serie data converge assolutamente allora  $\sum a_n$ ,  $\sum |a_n|$  sono entrambe convergenti e, quindi, dalle prime due formule della (1.33) e dalla Proposizione 1.17 si ricava che  $\sum a_n^+$ ,  $\sum a_n^-$  sono convergenti. Allo stesso modo, usando la formula  $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ , si vede il viceversa.

(b) Supponiamo ora che  $\sum a_n$  sia condizionatamente convergente. Allora  $\sum a_n^+$  e  $\sum a_n^-$  non possono essere entrambe convergenti, perché in tal caso abbiamo appena verificato che la serie in esame convergerebbe assolutamente. Neppure può capitare che una sola di tali serie risulti convergente e l'altra divergente. Infatti dalla Proposizione 1.17 segue subito che se si ha  $c_n = a_n + b_n$  allora la convergenza di due tra le serie  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$ ,  $\sum c_n$  implica la convergenza della terza (nel nostro caso risulta  $a_n^+ = a_n + a_n^-$ ). La convergenza condizionata di  $\sum a_n$  implica, quindi, necessariamente la divergenza di entrambe le serie (a termini non negativi)  $\sum a_n^+$ ,  $\sum a_n^-$ .  $\square$

In una serie assolutamente convergente, nella quale come si è visto convergono entrambe le "parti" costituite dai termini positivi e da quelli negativi, la convergenza è per sua natura piuttosto "stabile"; invece in una serie condizionatamente convergente  $\sum a_n$ , in cui le due parti divergono, la convergenza è dovuta solo al fatto che i termini positivi e negativi sono distribuiti in modo da bilanciarsi al crescere dell'indice  $n$ . Ovviamente questa è una situazione molto precaria, come ha mostrato l'esempio di pagina 37: alterare l'ordine dei termini di una serie condizionatamente convergente può distruggere la compensazione fra i termini di segno opposto o comunque "spostarne l'equilibrio".

I due teoremi che seguono illustrano tale situazione. Il primo di essi è fondamentale per poter sfruttare appieno la nozione di serie e di esso faremo largamente uso; il secondo, invece, non sarà utilizzato nel seguito (benché non ne manchino applicazioni "avanzate"), di tale teorema non riportiamo la dimostrazione.

Occorrerà, anzitutto, dare una definizione precisa di riordinamento dei termini di una serie. Nel caso di una somma finita, per esempio, è chiaro cosa significhi sommare i termini in ordine inverso, nel caso di una serie non lo è in quanto non esiste un "ultimo" termine.

Date due serie  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$  si dice che  $\sum b_n$  è un *riordinamento* della serie  $\sum a_n$  se a ogni termine della prima corrisponde uno e un solo termine della seconda o, volendo essere più formali, se esiste una applicazione biunivoca  $g$  dell'insieme dei numeri naturali in sé in modo che  $b_n = a_{g(n)}$ .

Per esempio la serie

$$x + x^2 + x^4 + x^3 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^{16} + x^{15} + \dots$$

è un riordinamento della serie geometrica

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

(per ogni  $n > 0$  i termini  $x^j$  con  $2^n < j \leq 2^{n+1}$  sono scritti in ordine inverso).

Dalla definizione data segue che se  $\sum b_n$  è un riordinamento di  $\sum a_n$  allora anche quest'ultima è un riordinamento di  $\sum b_n$ .

**TEOREMA 1.22 (Dirichlet)** Se la serie  $\sum a_n$  è assolutamente convergente e  $\sum b_n$  è un suo riordinamento, allora anche quest'ultima serie è assolutamente convergente e le due serie hanno la stessa somma, cioè:

$$\sum a_n = \sum b_n.$$

**DIMOSTRAZIONE** Si consideri dapprima il caso in cui la serie  $\sum a_n$  ha termini tutti non negativi (quindi anche  $\sum b_n$ ). Se  $S$  è la somma di  $\sum a_n$ , è chiaro che ogni somma parziale di  $\sum b_n$  è maggiorata dal numero  $S$  in quanto i suoi termini (che sono in numero finito) sono certamente contenuti in una somma parziale di  $\sum a_n$  (forse con indice molto grande). Dunque la serie  $\sum b_n$ , avendo tutte le somme parziali maggiorate da  $S$ , è convergente e ha per somma un numero  $S'$  tale che

$$S' = \sum b_n \leq S.$$

D'altra parte, poiché  $\sum a_n$  è un riordinamento di  $\sum b_n$  il ragionamento si può ripetere trovando

$$S = \sum a_n \leq S'.$$

Questo prova il teorema nel caso delle serie a termini non negativi.

Nel caso di serie a termini di segno variabile dalla dimostrazione precedente si ricava che se  $\sum a_n$  è assolutamente convergente allora anche  $\sum b_n$  lo è. A questo punto basta utilizzare la Proposizione 1.21 e scomporre le serie nelle due parti contenenti i termini positivi e i termini negativi:

$$\sum a_n = \sum a_n^+ - \sum a_n^-, \quad \sum b_n = \sum b_n^+ - \sum b_n^-.$$

Siccome, ovviamente,  $\sum b_n^+$  è un riordinamento delle serie a termini non negativi  $\sum a_n^+$ , si ha  $\sum b_n^+ = \sum a_n^+$ ; analogamente si trova  $\sum b_n^- = \sum a_n^-$  e quindi la tesi.  $\square$

**TEOREMA 1.23 (Riemann)** Se  $\sum a_n$  è una serie condizionatamente convergente allora per ogni numero  $L$  esiste un riordinamento  $\sum b_n$  della serie data che è convergente con somma  $L$ . Esistono anche riordinamenti di  $\sum a_n$  che sono divergenti positivamente, altri che sono divergenti negativamente, altri ancora che sono indeterminanti.

## ESERCIZI

**1.3.1** Provare che le seguenti serie sono convergenti:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}; & \text{(b)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt[3]{3} - 1); \\ \text{(c)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n^2}; & \text{(d)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n - 101}. \end{aligned}$$

**1.3.2** Determinare quali delle seguenti serie convergono:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}; \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}; \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2^{\frac{1}{n+1}}.$$

**1.3.3** Determinare quali delle seguenti serie convergono e quali convergono assolutamente:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{1+n} - \sqrt{n}}{n}; \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n}{2n^2 - n}; \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \sqrt{n}}.$$

1.3.4 Dire per quali valori di  $x$  le seguenti serie convergono e per quali  $x$  convergono assolutamente:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}; \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} x^n \operatorname{sen} \frac{1}{n}; \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n; \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\operatorname{sen} x)^n}{n}.$$

1.3.5 Dire per quali valori di  $x$  è convergente la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (x^2 + x - 1)^n$  e calcolarne la somma.

1.3.6 Studiare la convergenza delle serie seguenti, alle quali non si applica il criterio di Leibniz:

$$(a) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^5} + \dots, \text{ dove } a_{2k-1} = \frac{1}{2^{k-1}} \text{ e } a_{2k} = -\frac{1}{3^{2k-1}}.$$

$$(b) 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \dots, \text{ dove } a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1} \text{ e } a_{2k} = -\frac{1}{3^k}.$$

1.3.7 Sapendo che per  $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$  si ha  $|\operatorname{sen} \alpha| \leq |\alpha|$ , dimostrare che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \operatorname{sen} \left( \frac{x}{3^n} \right)$  converge assolutamente per ogni valore di  $x$ .

1.3.8 Dire se la serie che si ottiene sottraendo termine a termine le due serie (divergenti)  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ ,  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{2n}$  converge.

Cosa cambia se si sostituisce la seconda serie con  $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n}$ ?

1.3.9 Sia  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  una serie assolutamente convergente. Si provi che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}.$$

1.3.10 Dire se la serie  $\sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-1/n}$  converge.

1.3.11 Usufruento delle Proposizioni 1.21 e 1.17 provare che anche per  $-1 < x < 0$  la somma della serie geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  è  $1/(1-x)$ .

1.3.12 Sia  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$  una serie convergente con somma  $S$ ; la serie

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

si dice *resto  $n$ -esimo* della serie data.

(a) Provare che per ogni  $n$  il resto  $n$ -esimo è una serie convergente e che, detta  $R_n$  la sua somma, si ha  $R_n = S - s_n$ , ove  $s_n$  è la somma parziale  $n$ -esima.

(b) Provare che la successione  $R_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  è infinitesima.

(c) Supposto che esista un numero  $M$  con  $0 < M < 1$  tale che  $|a_{k+1}| \leq M|a_k|$ ,  $k = 1, 2, \dots$  si provi che si ha

$$|R_n| \leq \frac{M}{1-M} |a_n|.$$

**1.3.13** Si provi che la serie  $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sqrt{j}}{3^{2j}}$  è convergente e se ne determini la somma con un errore inferiore a  $10^{-3}$ .

[Si utilizzi la parte (c) dell'esercizio precedente].

**1.3.14** Provare che la seguente serie è convergente e calcolarne la somma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}.$$

**1.3.15** Sapendo che  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$  si calcoli la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^3 - 2k}.$$

**1.3.16** Si dimostri che se la serie  $\sum a_n$  è convergente allora le serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (0 \leq x \leq 1), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n a_n}$$

sono convergenti.

**1.3.17** (*Teorema di Goldbach*) Sia  $P$  l'insieme di tutte le potenze perfette dei naturali: 4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, 36, ... Si provi che la serie

$$\sum_{n \in P} \frac{1}{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{26} + \frac{1}{31} + \frac{1}{35} + \dots$$

è convergente e ha somma 1.

[Si scriva la serie nella forma  $\sum_{n \in P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$  e si verifichi che essa è uguale alla serie formata da *tutti* i termini del tipo  $\frac{1}{m^j}$  con  $m, j \geq 2$ ; tale serie ha somma

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m(m-1)} = 1].$$

## 1.4 Limite delle successioni

In questo paragrafo verrà esposta in modo sistematico una nozione che, pur essendo implicita nella discussione sulla convergenza delle serie, è finora rimasta un po' in ombra: quella di limite di una successione.

Si studieranno le proprietà dei limiti e si impareranno alcune regole che ne facilitano il calcolo, senza dover ogni volta ricorrere alla definizione. Verrà anche messa in luce una caratteristica fondamentale delle successioni convergenti di numeri reali: la cosiddetta proprietà di Cauchy.

Verrà ritrovato, poi, il numero  $\epsilon$  come limite di una successione notevole e, infine, sarà studiata l'importante nozione di equivalenza asintotica, applicata in questo caso alle serie numeriche.

Già sappiamo che una successione di numeri costituisce una legge che a ogni naturale  $n$  associa un numero  $a(n)$  che si usa denotare con  $a_n$ . I valori assunti da una successione si possono scrivere nell'ordine  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ , e il numero  $a_n$  si dice  $n$ -esimo *elemento* o *termine* della successione. Una successione è dunque una particolare funzione, definita sull'insieme dei numeri naturali. Di essa si può disegnare il grafico nel piano cartesiano "marcando" in ordinata i valori  $a_n$  assunti in corrispondenza ai valori interi  $n = 1, 2, \dots$  dell'ascissa. La Figura 1.18 mostra, per esempio, il grafico della successione

$$a_n = (n - 6)^2(6 - n/3) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.34)$$

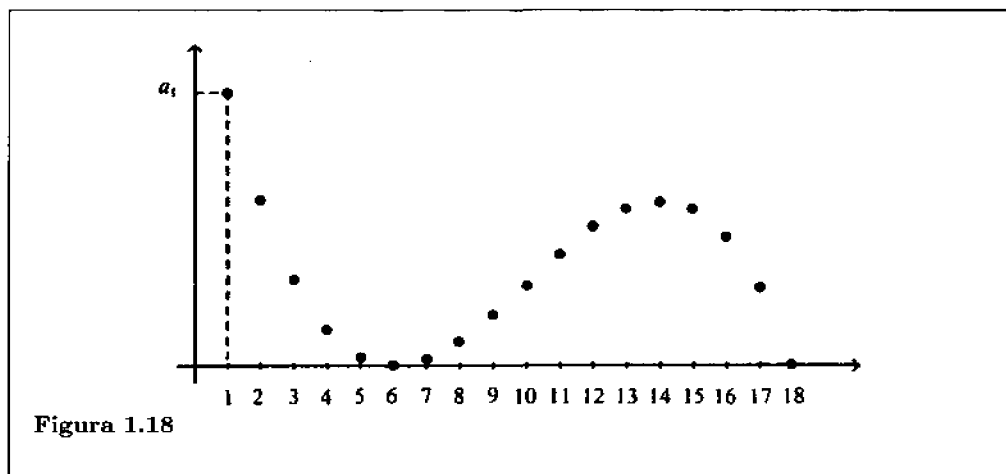


Figura 1.18

Si parla egualmente di successione anche quando i termini  $a_n$  non sono definiti per alcuni indici iniziali, come per esempio

$$a_n = \sqrt{n^2 - 25},$$

la quale è definita, nell'ambito dei numeri reali, solo per  $n \geq 5$ . L'interesse principale è volto ai valori "grandi" dell'indice  $n$ ; si vuole cioè studiare il comportamento dei termini della successione  $a_n$  al crescere di  $n$ . In questo contesto trae origine la fondamentale nozione di limite che sarà oggetto del prossimo paragrafo.

## DEFINIZIONE DI LIMITE

Data una serie  $\sum b_n$  è possibile costruire la successione  $\{s_n\}$  delle sue somme parziali; viceversa, data una successione  $\{a_n\}$  si può costruire una serie  $\sum b_n$  le cui somme

parziali sono  $a_n$ ; basta porre infatti

$$b_1 = a_1, \quad b_n = a_n - a_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (1.35)$$

per avere

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_1 + (a_2 - a_1) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = a_n.$$

È chiaro, allora, che le proprietà delle serie si possono tradurre in corrispondenti proprietà delle successioni. La seguente definizione è, dunque, motivata dalla analoga Definizione 1.14.

**DEFINIZIONE 1.24** Una successione  $a_n$  si dice *convergente* a un numero  $L$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un numero naturale  $n_0$  tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{per ogni } n \geq n_0. \quad (1.36)$$

cioè se  $|a_n - L| < \varepsilon$  definitivamente. Il numero  $L$  si dice *limite* della successione  $a_n$  e si scrive

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \quad \text{oppure} \quad a_n \rightarrow L \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Se in particolare  $L = 0$  la successione  $a_n$  viene detta *infinitesima* (si veda anche la Proposizione 1.12). Si dice poi che  $a_n$  *diverge positivamente* se per ogni numero positivo  $M$  esiste un numero naturale  $n_0$  tale che

$$a_n > M \quad \text{per ogni } n \geq n_0; \quad (1.37)$$

in tal caso si scrive

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty \quad \text{oppure} \quad a_n \rightarrow +\infty \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

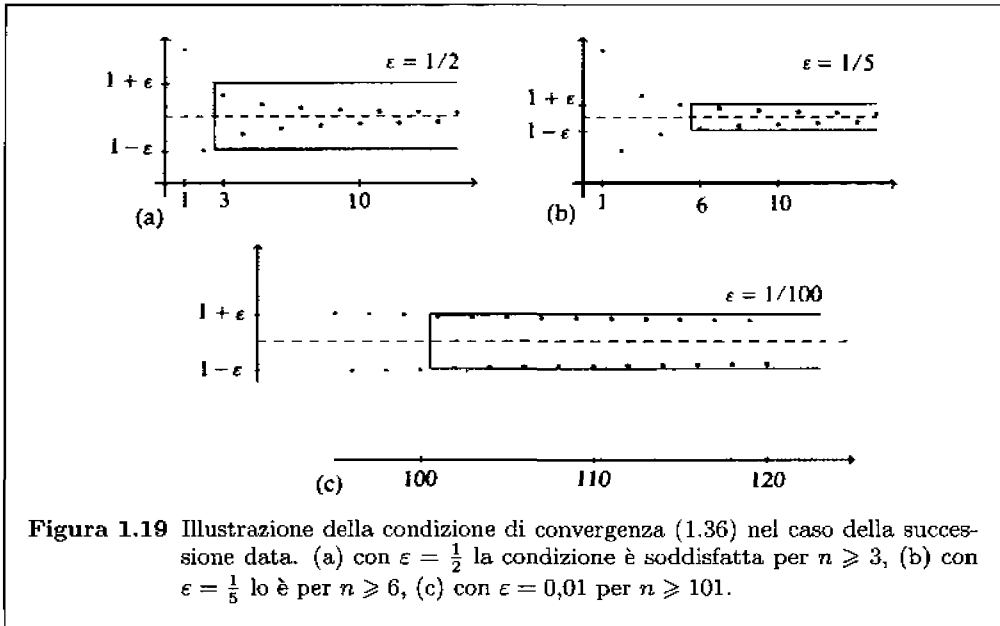
Una definizione analoga sussiste per successioni divergenti negativamente.

**OSSERVAZIONE 1.25 (a)** Si noti che nella condizione (1.36) che assicura la convergenza hanno importanza i valori di  $\varepsilon$  vicini a 0, che impongono ai termini  $a_n$  di indice maggiore di  $n_0$  di dare una buona approssimazione di  $L$ ; minore sarà  $\varepsilon$  maggiore sarà, in generale, il corrispondente indice  $n_0$ . Invece nella condizione (1.37) hanno importanza i valori grandi di  $M$ , che stimano la crescita dei termini della successione al crescere di  $n$ .

**(b)** Una successione  $a_n$  converge al limite  $L$  se e solo se la serie  $\sum b_n$  con i termini definiti dalla (1.35) converge e ha per somma  $L$ ; analogamente  $a_n$  diverge positivamente oppure negativamente se e solo se tale serie è divergente, positivamente oppure negativamente. In particolare il limite di una successione, se esiste, è unico (si veda pag. 35).

La condizione (1.36) si può agevolmente interpretare sul grafico della successione: dato  $\varepsilon > 0$  si consideri la striscia delimitata dalle rette di equazione  $y = L - \varepsilon$ ,  $y = L + \varepsilon$ ; i punti che rappresentano i termini della successione devono essere, da un certo indice in poi, tutti contenuti in questa striscia e questo deve avvenire *per ogni*  $\varepsilon > 0$ . La Figura 1.19 mostra ciò che accade con la successione  $a_n = 1 - \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ .





**Figura 1.19** Illustrazione della condizione di convergenza (1.36) nel caso della successione data. (a) con  $\epsilon = \frac{1}{2}$  la condizione è soddisfatta per  $n \geq 3$ , (b) con  $\epsilon = \frac{1}{5}$  lo è per  $n \geq 6$ , (c) con  $\epsilon = 0,01$  per  $n \geq 101$ .

**ESEMPI 1.26** (a) La successione  $a_n = \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2n - 1}$  ha limite 1; infatti

$$1 - \frac{n^2 + 1}{n^2 + 2n - 1} = \frac{2(n - 1)}{n^2 + 2n - 1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \epsilon$$

non appena  $n > \frac{2}{\epsilon}$ .

Si noti che non abbiamo determinato il più piccolo indice  $n_0$  tale che la disuguaglianza (1.36) risulti soddisfatta per ogni  $n \geq n_0$ : trovare tale minimo indice può essere inutilmente laborioso e non è affatto indispensabile.

(b) La successione

$$1, \frac{1}{10^{10}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{10^{10}}, \frac{1}{3}, \frac{1}{10^{10}}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{10^{10}}, \dots$$

non è convergente a zero, benché tutti i termini siano definitivamente “molto piccoli”. La condizione (1.36) si applica con  $L = 0$  per  $\epsilon > 10^{10}$ , ma quando  $\epsilon < 10^{-10}$  non è vero che i termini della successione siano definitivamente minori di  $\epsilon$ .

(c) La successione  $\sqrt[n]{a}$ , ove  $a$  è un fissato numero reale positivo, ha limite 1. Infatti, supposto per esempio  $a > 1$ , poniamo  $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$  e verifichiamo che  $b_n$  è infinitesima. Dalla disuguaglianza di Bernoulli, si ricava

$$a = (1 + b_n)^n > 1 + nb_n,$$

da cui

$$a < b_n < \frac{a - 1}{n} < \epsilon$$

non appena  $n > \frac{a - 1}{\epsilon}$ .

In modo analogo, ponendo  $c_n = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} - 1$ , si tratta il caso  $a < 1$ .

(d) Si supponga di avere una approssimazione  $b$  per eccesso del numero irrazionale  $\sqrt{2}$ . Si vede subito che il numero

$$c = \frac{1}{2} \left( b + \frac{2}{b} \right)$$

è una approssimazione di  $\sqrt{2}$  migliore della precedente. Infatti

$$c - \sqrt{2} = \frac{1}{2} \left( b + \frac{2}{b} - 2\sqrt{2} \right) = \frac{1}{2b} (b^2 + 2 - 2b\sqrt{2}) = \frac{1}{2b} (b - \sqrt{2})^2,$$

da cui si deduce, essendo  $b > b - \sqrt{2}$ ,

$$0 < c - \sqrt{2} < \frac{1}{2} (b - \sqrt{2}). \tag{1.38}$$

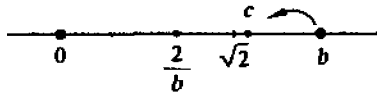


Figura 1.20

Questa osservazione suggerisce di costruire la seguente successione per approssimare  $\sqrt{2}$ :

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{2}{a_n} \right), \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.39}$$

In effetti avremo, applicando successivamente la (1.38):

$$0 < a_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2} (a_n - \sqrt{2}) < \frac{1}{2^2} (a_{n-1} - \sqrt{2}) < \dots < \frac{1}{2^n} (a_1 - \sqrt{2}) < \frac{1}{2^n},$$

da cui

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{2}.$$

I primi termini della successione sono

$$a_1 = 2, \quad a_2 = \frac{3}{2} = 1,5, \quad a_3 = \frac{17}{12} = 1,41\bar{6}, \quad a_4 = \frac{577}{408} \simeq 1,414215.$$

Si noti che già il quarto termine della successione fornisce  $\sqrt{2}$  con 5 cifre decimali esatte; la convergenza sembra dunque molto più rapida di quanto suggerito dalla (1.38).

Il metodo descritto si estende facilmente, sostituendo a 2 un qualunque numero positivo  $p$ , e fornisce un algoritmo piuttosto efficiente per il calcolo della radice quadrata, noto come *algoritmo di Erone*.

Se si vuole dimostrare che una successione converge occorre avere un'idea di quale può esserne il limite; in caso contrario la Definizione 1.24 non è applicabile. Tuttavia non sempre il limite di una successione è noto o congetturabile a priori, come negli esempi ora visti. Anzi, il più delle volte, si cercano, tramite le successioni, approssimazioni via via sempre migliori di grandezze sconosciute a priori: soluzioni di equazioni, massimi e minimi di funzioni . . . Il teorema seguente costituisce una importante caratterizzazione delle successioni convergenti; esso non coinvolge il valore del limite.

**DEFINIZIONE 1.27** Una successione  $\{a_n\}$  si dice *successione di Cauchy* (o *successione fondamentale*) se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un numero positivo  $n_0$  (dipendente da  $\varepsilon$ ) tale che

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ per ogni } n, m \geq n_0.$$

**TEOREMA 1.28** (*Criterio di convergenza di Cauchy*) Una successione è convergente se e solo se è una successione di Cauchy.

Se la successione ha un limite  $L$  allora, per definizione, fissato comunque  $\varepsilon > 0$  vi è un intero  $n_0$  tale che  $|a_n - L| < \varepsilon$  per  $n \geq n_0$ . Dunque se  $n, m \geq n_0$  dalla diseuguaglianza triangolare si ha

$$|a_n - a_m| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < 2\varepsilon.$$

Poiché  $2\varepsilon$  è un arbitrario numero positivo ne segue che  $\{a_n\}$  è di Cauchy.

La implicazione inversa, vale a dire il fatto che una successione di Cauchy di numeri reali ammette limite, è di straordinaria importanza; sostanzialmente essa equivale alla *proprietà di completezza* dei numeri reali, anzi può essa stessa venir assunta come "assioma di completezza" in una definizione assiomatica dei numeri reali. Si rinvia su questo punto alla breve discussione che si trova nella Appendice.

Poiché una serie  $\sum a_n$  converge e ha somma  $S$  se e solo se la successione  $\{s_n\}$  delle sue somme parziali ha limite  $S$ , dal teorema precedente si ricava subito una condizione necessaria e sufficiente per la convergenza delle serie.

**PROPOSIZIONE 1.29** Una serie  $\sum a_n$  è convergente se e solo se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste  $n_0$  tale che

$$\left| \sum_{k=n}^{n+m} a_k \right| = |a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon$$

per ogni  $n \geq n_0$  e ogni  $m = 1, 2, \dots$

## TEOREMI FONDAMENTALI SUI LIMITI

Studiamo ora qualche proprietà delle successioni convergenti.

**PROPOSIZIONE 1.30** Se una successione è convergente allora è limitata (Definizione 1.2). Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  allora

$$\inf_n a_n \leq L \leq \sup_n a_n.$$

**DIMOSTRAZIONE** Sia  $L = \lim a_n$ . Fissato  $\varepsilon = 1$  vi è un  $n_0$  tale che  $|a_n - L| < 1$  per  $n > n_0$ . Dunque

$$|a_n| \leq |a_n - L| + |L| < 1 + |L| \quad \text{per ogni } n > n_0.$$

mentre se poniamo  $M = \max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_0}\}$  si ha evidentemente

$$|a_n| \leq M \quad \text{per } n = 1, 2, \dots, n_0.$$

Per ogni naturale  $n$  si ha allora  $|a_n| \leq \max\{1 + |L|, M\}$  e quindi la successione è limitata. Se poi fosse  $I = \inf a_n > L$ , posto  $\varepsilon = I - L$ , in base alla definizione di limite si avrebbe

$$a_n < L + \varepsilon = L + (I - L) = I \quad \text{definitivamente}$$

mentre invece si ha  $I \leq a_n$  per ogni indice  $n$ .  $\square$

Invitiamo nuovamente a prestare attenzione alla paronomasia fra “limitato” e “ha limite”: una successione può essere limitata ma non avere affatto limite (si pensi al drastico esempio  $a_n = (-1)^n$ ).

Una importante classe di successioni è quella delle *successioni monotone*, cioè delle successioni crescenti o decrescenti. Una successione si dice *crescente se*

$$a_n \leq a_{n+1} \quad \text{per ogni } n,$$

mentre si dice *strettamente crescente* se vale la diseuguaglianza stretta  $a_n < a_{n+1}$ . In modo analogo si definiscono le successioni *decrescenti* e *strettamente decrescenti*. Tutte queste successioni, nelle quali nel passare da un indice al successivo il comportamento qualitativo dei termini è sempre lo stesso, si dicono successioni monotone.

**PROPOSIZIONE 1.31** Ogni successione monotona limitata è convergente, ogni successione monotona non limitata (superiormente o inferiormente) è divergente (positivamente o negativamente).

**DIMOSTRAZIONE** Supponiamo che  $\{a_n\}$  sia non decrescente e limitata. La serie  $\sum b_n$ , ove i termini sono definiti dalla (1.35) è a termini non negativi; inoltre, siccome la successione delle sue somme parziali (che coincide con  $a_n$ ) è limitata, essa converge e quindi (Osservazione 1.25(b)) converge anche  $\{a_n\}$ . Gli altri casi si provano in modo assolutamente analogo.  $\square$

È chiaro che la conclusione del teorema precedente sussiste nella sola ipotesi che la successione  $\{a_n\}$  sia solo definitivamente monotona. Vediamo ora come si comporta l'operazione di passaggio al limite nei confronti della relazione d'ordine dei numeri reali.

**PROPOSIZIONE 1.32 (dei carabinieri)** Se

$$a_n \leq b_n \leq c_n \quad \text{definitivamente}$$

e le successioni  $a_n$  e  $c_n$  tendono allo stesso limite  $L$ , allora si ha anche

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = L.$$

**DIMOSTRAZIONE** Per ipotesi, dato  $\varepsilon > 0$ , definitivamente sono soddisfatte le disuguaglianze

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon, \quad L - \varepsilon < c_n < L + \varepsilon,$$

da cui

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon \quad \text{definitivamente;}$$

cioè definitivamente si ha  $|b_n - L| < \varepsilon$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE 1.33** (*della permanenza del segno*) Se  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L > 0$  allora definitivamente si ha  $a_n > 0$ .

**DIMOSTRAZIONE** Prendendo  $\varepsilon = \frac{L}{2}$  definitivamente si ha

$$0 < \frac{\varepsilon}{2} = L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon,$$

e quindi la tesi.  $\square$

Si ottengono poi facilmente le seguenti regole di calcolo sui limiti.

**PROPOSIZIONE 1.34** Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  due successioni convergenti rispettivamente a  $L$  e a  $M$ . Allora

(a) le successioni  $\{a_n + b_n\}$  e  $\{a_n \cdot b_n\}$  sono convergenti e hanno come limite rispettivamente  $L + M$  e  $L \cdot M$ ;

(b) se  $a_n \neq 0$  per ogni  $n$  e  $L \neq 0$ , allora la successione  $\{\frac{1}{a_n}\}$  converge al limite  $\frac{1}{L}$ ;

(c) se  $a_n \geq 0$  per ogni  $n$ , allora la successione  $\{\sqrt{a_n}\}$  converge a  $\sqrt{L}$ .

Questi enunciati sono conseguenza quasi immediata della definizione di limite e del fatto che le successioni convergenti sono limitate. Esempifichiamo la dimostrazione in un caso, lasciando gli altri per esercizio al lettore.

**DIMOSTRAZIONE** Proviamo per esempio (b). Fissiamo un numero positivo  $\varepsilon$  tale che  $\varepsilon < |L|/2$ ; allora per definizione di limite esiste  $n_0$  tale che

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{se } n > n_0,$$

e quindi definitivamente si avrà

$$|a_n| = |L - (L - a_n)| \geq |L| - |L - a_n| > |L| - \varepsilon > \frac{|L|}{2}.$$

Dunque

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{L} \right| = \frac{1}{|a_n||L|} |L - a_n| < \frac{2\varepsilon}{|L|^2} \quad \text{definitivamente,}$$

da cui segue la tesi.  $\square$

Risultati analoghi si hanno quando uno o entrambi i limiti sono infiniti (Esercizio 1.4.9). La proposizione che segue svolgerà un ruolo importante nella definizione di integrale.

**PROPOSIZIONE 1.35** Se  $a_n$  e  $b_n$  sono due successioni tali che *ogni* termine della prima sia non superiore ad *ogni* termine della seconda, e se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$$

allora le due successioni sono convergenti e hanno lo stesso limite.

**DIMOSTRAZIONE** Dato  $\varepsilon > 0$ , per ipotesi esiste  $n_0$  tale che  $b_n - a_n < \varepsilon$  per  $n > n_0$ . Siano  $n, m$  due indici maggiori di  $n_0$ : si ha  $a_m \leq b_n$ ,  $a_n \leq b_m$  e quindi

$$-\varepsilon \leq a_m - b_m \leq a_m - a_n \leq b_n - a_n < \varepsilon,$$

cioè  $|a_m - a_n| < \varepsilon$ ; dunque la successione  $a_n$  è di Cauchy e quindi converge. Allo stesso modo si vede che  $b_n$  converge; per la precedente proposizione si ha poi  $\lim b_n - \lim a_n = \lim(b_n - a_n) = 0$ .  $\square$

La nozione di limite e le regole di calcolo precedenti consentono una formulazione molto comoda nella pratica dei criteri del rapporto e della radice per la convergenza delle serie.

**PROPOSIZIONE 1.36** Sia  $\sum a_n$  una serie a termini positivi. Se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1,$$

oppure se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1,$$

allora la serie  $\sum a_n$  è convergente.

**DIMOSTRAZIONE** Se, per esempio, si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = L < 1$ , si prenda  $0 < \varepsilon < 1 - L$ . Definitivamente sarà

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \varepsilon < 1.$$

per cui la condizione (1.22) è soddisfatta con  $q = L + \varepsilon$ .  $\square$

Si noti che se si ha

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{oppure} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$$

la serie  $\sum a_n$  è positivamente divergente, in quanto la successione dei suoi termini non è infinitesima, ma che nulla si può concludere nel caso in cui i predetti limiti siano eguali a 1. Per esempio per entrambe le serie  $\sum 1/n$ ,  $\sum 1/n^2$  (l'una divergente, l'altra convergente) si ha  $\lim a_{n+1}/a_n = 1$ .

## UN LIMITE NOTEVOLE

Per concludere il paragrafo faremo vedere come il numero  $e$ , da noi definito come somma della serie esponenziale (Esempio 1.9(c)), si presenti naturalmente anche come limite di una successione notevole

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n :$$

Verifichiamo innanzi tutto che la successione  $a_n$  è crescente; dalla formula del binomio di Newton si ha

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right). \end{aligned} \quad (1.40)$$

È chiaro che ciascun addendo della somma a ultimo membro aumenta con  $n$ ; inoltre al crescere di  $n$  si aggiungono nuovi addendi positivi. Quindi  $a_n$  è crescente (una diversa dimostrazione, brillante ma un po' artificiosa, della crescita di  $a_n$  è proposta nell'Esercizio 1.4.19).

Dalla (1.40) segue poi

$$a_n < \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < e$$

dunque la successione  $a_n$ , essendo monotona e limitata, converge a un numero  $L \leq e$ . Per dimostrare che  $L = e$  si osservi che per  $n > m$  si ha

$$a_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} > \sum_{k=0}^m \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} \frac{1}{k!}.$$

Passando ora al limite per  $n \rightarrow \infty$ , tenuto conto che risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 1,$$

otteniamo, per ogni  $m$ ,

$$L \geq \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!}.$$

Facendo ora il limite per  $m \rightarrow \infty$  si ricava  $L \geq e$ ; in conclusione

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e. \quad (1.41)$$

## SERIE ASINTOTICAMENTE EQUIVALENTI

Si è già potuto constatare l'utilità del criterio del confronto nello studio della convergenza delle serie numeriche; una grande varietà di situazioni può essere ricondotta ad alcune particolare "serie campione" il cui comportamento è noto.

Da un punto di vista intuitivo il criterio del confronto si può esprimere dicendo che se i termini di una data serie  $\sum a_n$  si comportano, al crescere di  $n$ , "non peggio" dei termini di una serie convergente  $\sum b_n$ , allora anche la prima serie converge. Estenderemo ora questa considerazione cercando di sostituire a "non peggio di" la locuzione "in modo sostanzialmente uguale a".

Occorre naturalmente una definizione precisa.

**DEFINIZIONE 1.37** Siano  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$  due serie a termini positivi; se avviene che  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/a_n = 1$  si dirà che i termini delle due serie sono *asintoticamente equivalenti* (o uguali) e si scriverà  $a_n \sim b_n$ .

Si noti che se  $a_n \sim b_n$  nel senso della precedente definizione, allora al crescere di  $n$  le successioni  $a_n$  e  $b_n$  "hanno lo stesso comportamento" in un senso molto debole. Per esempio, se  $a_n = n$  e  $b_n = n + 10^9$ , la differenza fra i termini corrispondenti è di un miliardo, tuttavia  $a_n \sim b_n$ .

Si ha, per esempio,

$$\frac{n^2 + \cos n}{2n^3 \sqrt{n}} \sim \frac{1}{2} n^{-3/2}, \quad \frac{10^n - n}{10^{n+1}} \sim \frac{1}{10}.$$

Si osservi che la relazione  $\sim$  è simmetrica, riflessiva e transitiva: è dunque una *relazione di equivalenza*. Si noti anche che  $a_n \sim b_n$  se e solo se  $\frac{1}{a_n} \sim \frac{1}{b_n}$ .

Consideriamo ora la serie  $\sum \frac{n+4}{4n^2+5}$ ; per  $n$  molto grande il termine generale è approssimativamente uguale a  $\frac{n}{4n^2} = \frac{1}{4n}$  e, poiché la serie  $\sum \frac{1}{4n}$  è divergente, è ragionevole attendersi che anche la serie data lo sia.

In effetti si ha  $\frac{n+4}{4n^2+5} \sim \frac{1}{4n}$  e vale il seguente

**TEOREMA 1.38** Se  $a_n \sim b_n$  allora le due serie  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$ , sono o entrambe convergenti o entrambe divergenti.

**DIMOSTRAZIONE** Siano  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  le serie date (a termini positivi); per ipotesi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1;$$

pertanto, assumendo  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  nella definizione di limite (Definizione 1.24) si ha

$$\frac{1}{2} b_n < a_n < \frac{3}{2} b_n \quad \text{definitivamente,}$$

e dal criterio del confronto (Proposizione 1.7) segue la tesi.  $\square$



**ESEMPI 1.39** La serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-5/2}$  è convergente (Esercizio 1.3.12, pag. 42) mentre le serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} 1/10$  divergono. Dagli esempi precedenti e dal teorema enunciato si deduce allora che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \cos n}{2n^4 \sqrt{n}} \quad \text{converge,}$$

mentre le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{4n^2+5}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n - n}{10^{n+1}},$$

divergono.

**OSSERVAZIONE 1.40** Gli esempi mostrano che il precedente teorema è di applicazione più facile e più naturale del criterio del confronto. Si consideri tuttavia la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3+(-1)^n}} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

In questo caso si ha  $a_n \leq \frac{1}{n^2}$  e, dunque, la serie data converge in quanto è dominata dalla serie convergente  $\sum \frac{1}{n^2}$ ; tuttavia non si ha  $a_n \sim \frac{1}{n^2}$ . Questo esempio mostra che il teorema precedente, pur essendo di applicazione più immediata *non sostituisce* il criterio del confronto.

Vedremo in seguito come queste considerazioni sulla equivalenza asintotica si possano formulare in situazioni molto più generali.

## ESERCIZI

**1.4.1** Verificare, utilizzando la definizione, che

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n-1} &= 1; & \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n} &= \infty; \\ \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n^2}{n} &= -\infty; & \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**1.4.2** Calcolare i limiti seguenti:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{n^2-1}; & \quad \text{(b)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}); \\ \text{(c)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-6n^4}{1+n^2+n^4}; & \quad \text{(d)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n}. \end{aligned}$$

**1.4.3** Dire se le successioni dell'Esercizio 1.2.11 sono monotone.

**1.4.4** Dire se le successioni dell'Esercizio 1.2.18 sono monotone.

**1.4.5** Provare che se  $a_n$  è limitata e  $b_n$  è infinitesima, allora  $a_n b_n$  è infinitesima.

**1.4.6** Provare che se  $a_n$  e  $b_n$  sono due successioni convergenti tali che definitivamente  $a_n < b_n$  allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ . Mostrare con un esempio che nell'ultima maggiorazione può valere il segno di eguaglianza.

**1.4.7** Calcolare (se esiste) il limite delle successioni seguenti:

$$(a) \frac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}}; \quad (b) \frac{1}{n^3} \sum_{j=1}^n j^2; \quad (c) \frac{3^n + n^2}{2^n + n^3}; \quad (d) \frac{(-1)^n + 2}{(-1)^{n+1} - 2}.$$

**1.4.8** Provare che la successione definita da

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

è convergente e ha limite 2.

**1.4.9**  $a_n$  e  $b_n$  sono due successioni assegnate. Si provi che

- (a) se  $a_n \rightarrow +\infty$  e  $b_n$  è limitata inferiormente, allora  $a_n + b_n \rightarrow \infty$ ;
- (b) se  $a_n \rightarrow -\infty$  e  $b_n$  è limitata superiormente, allora  $a_n + b_n \rightarrow -\infty$ ;
- (c) se  $a_n \rightarrow +\infty$  e  $a_n \neq 0$  allora  $\frac{1}{a_n} \rightarrow 0$ ;
- (d) se  $a_n \rightarrow 0$  e  $a_n > 0$  allora  $\frac{1}{a_n} \rightarrow +\infty$ ;
- (e) se  $a_n \rightarrow +\infty$  e  $b_n \rightarrow L$  allora  $a_n b_n \rightarrow +\infty$  se  $L > 0$ ,  $a_n b_n \rightarrow -\infty$  se  $L < 0$ ;
- (f) se  $a_n \rightarrow -\infty$  e  $b_n \rightarrow L$  allora  $a_n b_n \rightarrow -\infty$  se  $L > 0$ ,  $a_n b_n \rightarrow +\infty$  se  $L < 0$ .

**1.4.10** Si provi che se  $r$  è un qualunque numero positivo e  $|x| < 1$  allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r x^n = 0.$$

[Si dimostri che  $\sum n^r x^n$  è assolutamente convergente e si applichi la Proposizione 1.12].

**1.4.11** Calcolare i limiti delle seguenti successioni, ove  $p > 0$ :

$$(a) \frac{n!}{n^n}; \quad (b) \frac{p^n}{n}; \quad (c) \frac{p^n}{n!}.$$

**1.4.12** Estendendo la diseuguaglianza di Bernoulli (Esempio A.11, pagina 468):

$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2$ ,  $x > -1$ , e ponendo  $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$  si dimostri che  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  e dunque  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**1.4.13** Si verifichi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$$

utilizzando l'Esempio 1.26(c) e osservando che per  $n > M$  si ha

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[3]{1 \cdot 2 \dots M} \cdot \sqrt{(M+1)(M+2) \dots n}.$$

**1.4.14** Si studi, in dipendenza dei valori iniziali  $p, q$ , la successione definita per ricorrenza da

$$a_0 = p, \quad a_1 = q, \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

[Posto  $d = (p - q)/2$  si ha  $a_2 - a_1 = d$ ,  $a_3 - a_2 = -d/2, \dots, a_n - a_{n-1} = (-1)^n d/2^{n-2} \dots$ ]

Tale successione descrive, per esempio, la diffusione di una malattia legata a un cromosoma sessuale: se  $a_n$  è la percentuale, alla  $n$ -esima generazione, delle femmine di una data popolazione portatrici di una malattia legata al cromosoma X, si avrà che  $a_n$  è la percentuale di femmine ammalate e di maschi ammalati alla  $(n - 1)$ -esima generazione. Poiché però ogni maschio riceve il cromosoma X dalla propria madre, si avrà che la percentuale di maschi ammalati alla  $(n - 1)$ -esima generazione è uguale alla percentuale delle femmine ammalate alla  $(n - 2)$ -esima generazione, cioè ad  $a_{n-2}$ . In conclusione  $a_n = (a_{n-1} + a_{n-2})/2$ . Si studi il caso in cui  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 1$ , che corrisponde a una situazione del tipo "ratto delle Sabine".

**1.4.15** Studiare le seguenti successioni definite per ricorrenza, determinandone, se esiste, il limite al variare del parametro  $\alpha > 0$ :

$$(a) \ a_1 = \alpha, \ a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + a_n^2; \quad (b) \ a_1 = \alpha, \ a_{n+1} = a_n - a_n^3, \ \alpha \leq 1;$$

$$(c) \ a_1 = \alpha, \ a_{n+1} = 1 - a_n + a_n^2; \quad (d) \ a_1 = \alpha, \ a_{n+1} = \frac{1}{2 - a_n}, \ \alpha \leq 1.$$

**1.4.16** (*Metodo degli isoperimetri di Cartesio*) Sia  $P_n$  un poligono regolare di  $2^n$  lati avente perimetro 2. Siano  $r_n$  e  $R_n$  i raggi dei cerchi rispettivamente inscritto e circoscritto a  $P_n$ . Ovviamente si ha  $2\pi r_n < 2 < 2\pi R_n$ , da cui

$$r_n < \frac{1}{\pi} < R_n.$$

Usufruendo della figura 1.21 (ove  $A'B' = \frac{1}{2}AB$  e dunque se  $AB$  è il lato di un poligono di  $2^n$  lati,  $A'B'$  è il lato di un poligono di  $2^{n+1}$  lati con lo stesso perimetro), si provi che

$$r_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2}, \quad R_{n+1} = \sqrt{R_n r_{n+1}}, \quad n \geq 2.$$

Si deduca che le due successioni  $r_n, R_n$  convergono allo stesso limite  $\frac{1}{\pi}$ .

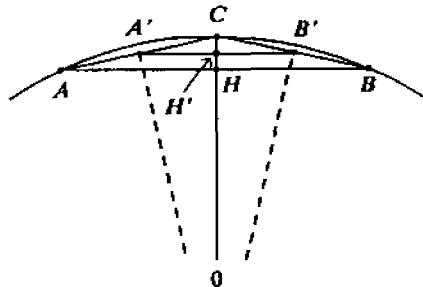


Figura 1.21

1.4.17 Dimostrare che

- (a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right) = \frac{1}{2};$   
 (b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0;$   
 (c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \right) = \infty;$

1.4.18 Discutere la convergenza delle successioni seguenti:

- (a)  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^p$  ( $p$  intero);      (b)  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}};$   
 (c)  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{4n};$       (d)  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2};$   
 (e)  $\left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^n;$       (f)  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+100}.$

1.4.19 Applicando la diseguaglianza fra media geometrica e media aritmetica (vedi Appendice) agli  $n+1$  numeri

$$1 + \frac{1}{n}, \quad 1 + \frac{1}{n}, \quad \dots, \quad 1 + \frac{1}{n}, \quad 1$$

ove  $1 + \frac{1}{n}$  compare  $n$  volte, si dimostri direttamente che la successione

$$a_n = \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

è crescente.

1.4.20 Verificare se le seguenti coppie di serie sono asintoticamente equivalenti

- (a)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n + 1}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$       (b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3 + 2n}{n + 4}$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} n^2;$   
 (c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n};$       (d)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 - n}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$   
 (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} (n - \sqrt{n^2 - 1})$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n};$       (f)  $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}.$

1.4.21 Studiare al variare di  $x$  la convergenza della successione e della serie di termine generale

$$a_n = \frac{x}{1 + n^2 x^2}.$$

1.4.22 Mediante confronto con serie asintoticamente equivalenti note, si discuta la convergenza delle serie:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sqrt[3]{n} - \sqrt{n}}; & \text{(b)} & \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right); \\ \text{(c)} & \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right); & \text{(d)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3\sqrt{n} - 4}{2n \sqrt[3]{n+1}}; \\ \text{(e)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\cos n^2 + \sqrt{n}); & \text{(f)} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}(3\sqrt{n+1})}. \end{array}$$

## Serie di potenze

---

Fra le più semplici funzioni elementari i *polinomi*

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$$

hanno un ruolo preminente, a causa delle notevoli loro proprietà algebriche. Nel capitolo precedente si è visto come, in certe condizioni, ben note proprietà delle somme finite si possano estendere alle serie; è dunque naturale cercare di capire cosa accade se si considerano polinomi di “grado infinito”, vale a dire espressioni del tipo

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Agli albori del calcolo infinitesimale la scoperta, dovuta a Mercator, a Newton e altri, che molte funzioni elementari note si potevano scrivere in modo semplice ed elegante come “polinomi di grado infinito” fu salutata come un grande trionfo. Tali espressioni si dicono *serie di potenze* e al loro studio è dedicato questo capitolo.

Nel primo paragrafo, dopo aver studiato la questione della convergenza delle serie di potenze, si considerano gli sviluppi in serie di potenze di alcune funzioni elementari. Nel secondo paragrafo si passa a studiare le serie a termini complessi; ci si renderà conto infatti che l’ambito dei numeri complessi è il più consono allo studio di queste serie. Nel terzo paragrafo viene poi presentata la nozione di prodotto di Cauchy di due serie, molto utile nella manipolazione delle serie di potenze.

### 2.1 Serie di potenze a coefficienti reali

Una *serie di potenze* in  $x$  è una serie della forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2.1)$$

ove  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  sono numeri assegnati che si dicono *coefficienti* della serie, mentre  $x$  è una variabile.

Più in generale una serie di potenze in  $x - c$  (o attorno a  $x = c$ , come sovente si dice) è una serie della forma<sup>(1)</sup>

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n = a_0 + a_1(x - c) + a_2(x - c)^2 + \dots + a_n(x - c)^n + \dots \quad (2.2)$$

Nel seguito saranno studiate prevalentemente serie di potenze del tipo (2.1).

Il comportamento di una serie di potenze rispetto alla convergenza, al variare di  $x$ , è particolarmente semplice. Si consideri per esempio la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!};$$

usando il criterio del rapporto si vede facilmente che questa serie converge assolutamente per ogni valore di  $x$ ; la sua somma è pertanto una funzione di  $x$  definita per ogni  $x$  reale.

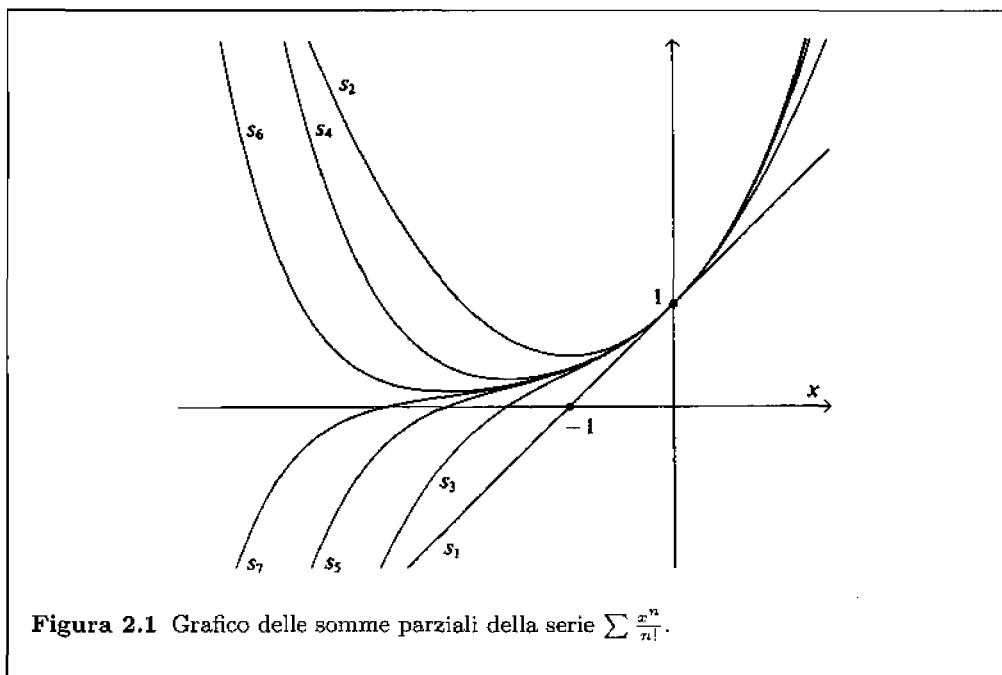
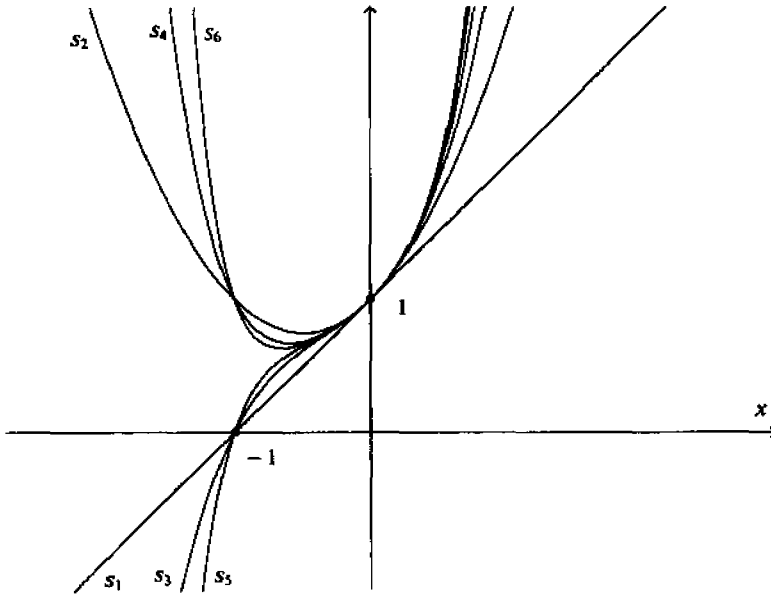


Figura 2.1 Grafico delle somme parziali della serie  $\sum \frac{x^n}{n!}$ .

Un altro esempio già incontrato di serie di potenze è la serie geometrica,  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , la quale converge assolutamente per  $|x| < 1$  e ha per somma la funzione  $\frac{1}{1-x}$ . Le Figure 2.1 e 2.2 illustrano, al variare di  $x$ , il comportamento delle somme parziali  $s_n(x)$  di tale serie.

<sup>(1)</sup>Si conviene che nelle scritture (2.1), (2.2) il primo termine è  $a_0$  per ogni valore di  $x$  (superando così il piccolo equivoco per cui  $x^n$ ,  $(x - c)^n$  non sono definiti, se  $n = 0$ , per  $x = 0$  o  $x = c$ ).



**Figura 2.2** Grafico delle somme parziali della serie geometrica  $\sum x^n$ .

Nel prossimo capitolo si comprenderà appieno il significato di queste “approssimazioni”  $s_n(x)$  alle somme delle rispettive serie.

Nei due esempi citati le serie convergono assolutamente in un intervallo simmetrico rispetto all’origine (illimitato nel primo caso); in pratica ciò avviene *per ogni serie di potenze* in  $x$ , indipendentemente dai valori assunti dai coefficienti. Dal criterio del confronto (Proposizione 1.7) segue infatti facilmente la seguente

**PROPOSIZIONE 2.1** Se la serie  $\sum a_n r^n$  (ove  $r \neq 0$ ) ha i termini limitati, in particolare dunque se tale serie converge, allora la serie di potenze  $\sum a_n x^n$  converge assolutamente per  $|x| < |r|$ .

Per esempio  $\sum \frac{n-1}{n+1} x^n$  ha i termini limitati per  $x = \pm 1$ . Dunque la serie converge assolutamente per  $|x| < 1$  (e non, si noti, per  $|x| \leq 1$ ).

**DIMOSTRAZIONE** Se risulta  $|a_n r^n| \leq K$ , allora

$$|a_n x^n| = \left| a_n \left( \frac{x}{r} \right)^n r^n \right| \leq K \left| \frac{x}{r} \right|^n,$$

e dunque, se  $|x| < |r|$ , la serie  $\sum a_n x^n$  converge per confronto con la serie geometrica di ragione  $|x/r| < 1$ .  $\square$

Questa proposizione ha una conseguenza di grande rilievo. Se una serie di potenze converge in  $x_1$  essa deve convergere assolutamente nell’intero intervallo tratteggiato nella Figura 2.3; se non converge in  $x_2$  allora la serie non converge in alcuna delle zone marcate in nero nella figura.



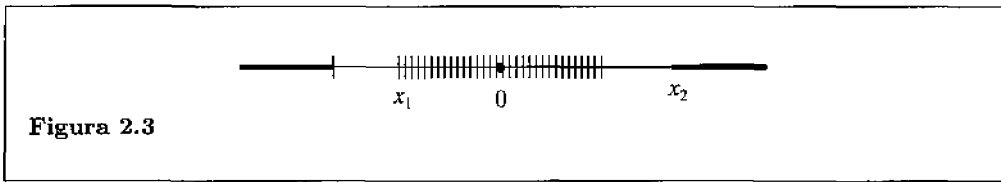


Figura 2.3

### RAGGIO DI CONVERGENZA

Si verificherà ora che la regione di convergenza di una serie di potenze è simmetrica rispetto al centro  $c$  (l'origine nel caso di serie di tipo (2.1)).

**TEOREMA 2.2** Data una serie di potenze  $\sum a_n x^n$  si verifica uno dei casi seguenti:

- 1) la serie converge solo per  $x = 0$ ;
- 2) la serie converge assolutamente per ogni  $x$ ;
- 3) esiste un numero  $R > 0$  tale che la serie converge assolutamente per  $|x| < R$ , mentre non converge per quegli  $x$  con  $|x| > R$ .

Il numero  $R$  si dice *raggio di convergenza*; nei casi 1) e 2) si pone  $R = 0$ ,  $R = +\infty$ , rispettivamente.

**DIMOSTRAZIONE** Si consideri l'insieme  $A$  dei numeri  $x$  per i quali la serie  $\sum a_n x^n$  converge. Se tale insieme si riduce al solo  $\{0\}$  si ha il caso 1), (la serie  $\sum n! x^n$  mostra che ciò può effettivamente avvenire).

Può poi capitare che l'insieme  $A$  coincida con l'intera retta reale, il che corrisponde al caso 2).

Si supponga ora che  $A$  contenga punti diversi da 0 ma che non sia l'intera retta. Vi è dunque  $x_0 \notin A$ ; in base alla proposizione precedente  $A$  non può contenere alcun punto  $x$  con  $|x| > |x_0|$ , dunque l'insieme  $A$  è limitato. Sia  $R$  l'estremo superiore di  $A$ . Si ha  $R > 0$ , perché  $A$  non si riduce al solo  $\{0\}$ . Si prenda un qualunque  $x$  con  $|x| < R$ : poiché vi sono elementi di  $A$  arbitrariamente vicini a  $R$  esiste un  $x_1$  con  $|x| < |x_1| \leq R$  tale che  $\sum a_n x_1^n$  converga; dunque (Proposizione 2.1) la serie di potenze converge assolutamente nel punto  $x$ .

In base alla definizione di estremo superiore l'insieme  $A$  non può contenere numeri maggiori di  $R$  e, quindi, neppure numeri minori di  $-R$ . Dunque se  $|x| > R$  la serie  $\sum a_n x^n$  non converge. Il teorema è completamente dimostrato.  $\square$

Va osservato che nel caso 3) nulla si può dire, in generale, sul comportamento della serie per  $x = \pm R$ ; la serie può convergere in entrambi i punti, in uno solo di essi o in nessuno dei due.

Per determinare il raggio di convergenza di una serie si possono utilizzare i criteri del rapporto o della radice, applicabili naturalmente alla serie dei valori assoluti.

**PROPOSIZIONE 2.3** Data la serie di potenze  $\sum a_n x^n$ , se esiste finito e diverso da zero il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l, \quad (2.3)$$

oppure esiste finito e diverso da zero il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l, \quad (2.4)$$

allora la serie ha raggio di convergenza  $R$  dato da

$$R = \frac{1}{l}. \quad (2.5)$$

**ESEMPI 2.4 (a)** Si consideri la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ; si ha

$$\frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = \frac{n}{n+1} |x|;$$

poiché questo rapporto tende a  $|x|$  per  $n \rightarrow \infty$ , il criterio del rapporto ci dice che la serie è assolutamente convergente quando  $|x| < 1$  e non converge quando  $|x| > 1$ . Pertanto il raggio di convergenza è 1.

Per  $x = 1$  la serie si riduce alla serie armonica che è divergente, per  $x = -1$  la serie è condizionatamente convergente (per il criterio di Leibniz).

(b) Anche la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$  ha raggio di convergenza 1, infatti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}| |x|^{n+1}}{|a_n| |x|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} |x| = |x|.$$

In questo caso tuttavia la serie non converge né per  $x = 1$  né per  $x = -1$ .

(c) Si consideri ora

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};$$

questa serie ha raggio di convergenza 1, e converge anche negli estremi  $x = \pm 1$ .

(d) L'esempio (b) consente di provare che le due serie

$$\sum a_n x^n, \quad \sum n a_n x^n$$

hanno lo stesso raggio di convergenza. Infatti detti  $R, R'$  tali raggi si ha ovviamente  $R' \leq R$ ; d'altra parte se  $|x| < R$  e  $c$  è un numero con  $|x| < c < R$  la serie  $\sum a_n c^n$  converge e dunque  $|a_n| c^n$  è limitato da una costante  $K$ . Pertanto

$$|n a_n x^n| = n |a_n| c^n \left| \frac{x}{c} \right|^n \leq K n \left| \frac{x}{c} \right|^n.$$

Da (b) si ha che  $\sum n \left| \frac{x}{c} \right|^n$  è convergente, quindi per il criterio del confronto anche  $\sum n a_n x^n$  converge, da cui  $R = R'$ .

(e) La serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!} = 2x + x^2 + x^6 + x^{24} + \dots$$

è una serie di potenze con infiniti coefficienti uguali a 0; in queste situazioni nessuno dei limiti (2.3), (2.4) esiste e per calcolare il raggio di convergenza conviene rifarsi direttamente ai criteri del rapporto e della radice:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{(n+1)!}}{x^{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^{n!n} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ +\infty & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

pertanto il raggio di convergenza è 1. La serie non converge né per  $x = 1$ , né per  $x = -1$ .



## FUNZIONE ESPONENZIALE

È già stato osservato che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

è assolutamente convergente per ogni  $x$ .

La sua somma è dunque una funzione  $E(x)$  definita per ogni  $x$  reale. Studiamo alcune proprietà di questa funzione.

Intanto risulta

$$E(0) = 1,$$

inoltre, ricordando la serie esponenziale (Esempio 1.9(c), pag. 23):

$$E(1) = e.$$

Per ogni  $x > 0$  ovviamente si ha  $E(x) > 1 + x$ ; inoltre  $E(-x) = \sum \frac{(-1)^n x^n}{n!}$  è una serie a segni alterni, pertanto la sua somma  $E(-x)$  è maggiore della somma parziale  $1 - x$  (Osservazione 1.16, pag. 36). In conclusione per ogni  $x \neq 0$  si ha

$$E(x) > 1 + x, \quad x \neq 0 \tag{2.6}$$

mentre, se  $0 < x < 1$ , per confronto con la serie geometrica  $\sum x^n$ , si ricava

$$E(x) < \frac{1}{1-x}, \quad 0 < x < 1. \tag{2.7}$$

La funzione  $E(x)$  verifica poi la seguente fondamentale identità (che sarà dimostrata nel Paragrafo 2.3, pag. 76)

$$E(x+y) = E(x)E(y), \quad \text{per ogni } x, y. \tag{2.8}$$

Risulta dunque  $E(2) = e^2$ ,  $E(3) = e^3$ , ... Da (2.8) si ricava anche  $E(x)E(-x) = E(x-x) = E(0) = 1$ , quindi

$$E(-x) = \frac{1}{E(x)}, \quad (2.9)$$

e, dopo qualche calcolo<sup>(2)</sup>,

$$E(p) = e^p, \quad \text{per ogni } p \text{ razionale.} \quad (2.10)$$

Volendo dare una definizione precisa del numero  $e^x$  con  $x$  reale, sarà allora ragionevole porre

$$e^x = E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \text{per ogni } x \text{ reale.} \quad (2.11)$$

Si noti che le relazioni (2.8), (2.9) non sono altro che le abituali regole della potenza:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad e^x \cdot e^{-x} = 1,$$

cosciché la definizione (2.11) è pienamente giustificata.

Un metodo alternativo per definire in modo rigoroso la potenza  $e^x$  a esponente reale è quello di porre

$$e^x = \sup\{e^p : p < x, \quad p \text{ razionale}\}.$$

Metteremo in seguito in evidenza una proprietà generale delle serie di potenze (la continuità) dalla quale segue in modo ovvio la equivalenza delle due definizioni.

Nei prossimi capitoli saranno studiate altre importanti proprietà della *funzione esponenziale*  $e^x$ , definita da (2.11); utilizzando (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9), con semplici argomentazioni è possibile intanto dedurre la seguente:

- PROPOSIZIONE 2.5** (a)  $e^x$  è una funzione positiva (cioè  $e^x > 0$  per ogni  $x$  reale);  
 (b)  $e^x$  è una funzione crescente (cioè se  $x < y$  allora  $e^x < e^y$ );  
 (c)  $e^x$  assume tutti i valori reali positivi;  
 (d)  $e^x$  è dotata di funzione inversa definita su tutta la semiretta positiva. □

## FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Le serie di potenze

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

<sup>(2)</sup>Per iterazione da (2.8) si ha  $E(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = E(x_1)E(x_2) \dots E(x_n)$  e dunque se  $p$  è un razionale positivo,  $p = n/m$ , si ha

$$[E(p)]^m = E(mp) = E(n) = e^n,$$

cioè  $E(p) = e^p$ . Da (2.9) si ha poi, sempre per  $p$  razionale positivo,  $E(-p) = e^{-p}$ .

hanno raggio di convergenza infinito, come si vede facilmente applicando il criterio del rapporto.

Denotiamo allora con  $C(x)$  e  $S(x)$  rispettivamente le loro somme; sarebbe possibile una analisi preliminare delle proprietà di queste funzioni analoga a quella effettuata nel precedente esempio. La omettiamo in quanto tra breve si vedrà che tali funzioni sono strettamente correlate con la funzione esponenziale; inoltre, con gli strumenti del calcolo infinitesimale che avremo a disposizione nel prossimo capitolo, si potrà con grande facilità provare che esse altro non sono che le abituali funzioni trigonometriche

$$C(x) = \cos x, \quad S(x) = \sin x.$$

Anticipiamo pertanto tale risultato (che è reso plausibile anche dall'Esempio 2.13(d), pag. 81, ove si prova la *formula di duplicazione*  $S(2x) = 2S(x)C(x)$ ). Si ottengono così le formule

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}; \quad (2.12)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad (2.13)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (2.14)$$

## FUNZIONE LOGARITMO

Si è visto che la funzione esponenziale è dotata di funzione inversa definita per ogni  $x > 0$ ; tale funzione si dice *logaritmo naturale* e si indica con  $\ln$  (ma talvolta anche con  $\lg$  o  $\log$ ).

La serie

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

ha ovviamente lo stesso raggio di convergenza  $R = 1$  della serie  $\sum x^n/n$  (Esempio 2.4(a)); si proverà in seguito che la sua somma è la funzione  $\ln(1+x)$ :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \text{se } |x| < 1; \quad (2.15)$$

tale serie prende quindi il nome di *serie logaritmica*.

Dalla serie (2.15) seguono alcune utili rappresentazioni. Per esempio sostituendo  $x$  con  $-x$  (supposto  $|x| < 1$ ) si ha

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots \quad (2.16)$$

e, sottraendo termine a termine la (2.16) dalla (2.15), si ricava

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2x \left( 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{5}x^4 + \dots + \frac{x^{2n}}{2n+1} + \dots \right), \quad |x| < 1. \quad (2.17)$$

Se poi nella (2.17) si pone  $x = \frac{1}{2m+1}$ , ove  $m$  è un intero dato, si ha

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{m+1}{m}$$

e dunque

$$\ln \frac{m+1}{m} = \frac{2}{2m+1} \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2m+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2m+1)^4} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{(2n+1)(2m+1)^{2n}} + \dots \right]. \quad (2.18)$$

La formula (2.18) può essere proficuamente utilizzata nel calcolo dei logaritmi naturali (si veda l'Esercizio 2.1.7); su di essa si basano sostanzialmente i metodi che hanno consentito, dall'inizio del Settecento, la costruzione di complicate tavole dei logaritmi.

**OSSERVAZIONE 2.6** Nella teoria delle serie di potenze è di grande importanza il seguente risultato che estende il *principio di identità dei polinomi*:

se due serie di potenze  $\sum a_n x^n$ ,  $\sum b_n x^n$  convergono entrambe in un intervallo che ha l'origine come punto interno e se in tale intervallo esse hanno come somma la stessa funzione allora esse sono identiche, cioè

$$a_n = b_n \quad \text{per ogni } n.$$

In altri termini la rappresentazione di una funzione tramite una serie di potenze (se esiste) è unica. Si vedrà in seguito la dimostrazione di questo fatto.

Le funzioni  $f(x)$  che sono somma di una serie di potenze si dicono *funzioni analitiche*; tali funzioni conservano alcune delle proprietà dei polinomi: per esempio possiedono solo zeri isolati (salvo eccezioni banali).

## ESERCIZI

**2.1.1** Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze:

(a)  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n;$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n;$

(c)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n2^n};$

(d)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{3}\right)^n.$

(e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n;$

(f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2};$

(g)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n;$

(h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1} x^n;$

(i)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{(n-1)(n+2)} x^{2n};$

(l)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!(n+3)!}{(2n)!} x^n.$

2.1.2 Dimostrare che se  $\sum b_n$  è una serie convergente, allora la serie di potenze

$$\sum b_n x^n$$

ha raggio di convergenza  $\geq 1$ .

2.1.3 Trovare il raggio di convergenza delle serie seguenti:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n; & \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}; \\ \text{(c)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+(-2)^n)x^n; & \text{(d)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^n}}{n^n}; \\ \text{(e)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n; & \text{(f)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n+1}(x+2)^n; \\ \text{(g)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n^3+1}{(n-1)(n+2)} x^{2n}; & \text{(h)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n-1)! \ln(1+1/n)}; \\ \text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt[n]{n}} x^n; & \text{(l)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n (x^2-1)^n. \end{array}$$

2.1.4 Individuare quale fra le seguenti serie ha il massimo raggio di convergenza e determinarlo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}\right) \frac{x^n}{2^n}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3 x^n}{(3n)!}; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^{n^2}.$$

2.1.5 Trovare una serie di potenze la cui somma, in un opportuno intervallo, sia  $\ln(1+x-2x^2)$ .

2.1.6 Ricordando il comportamento della serie  $\sum \frac{1}{n} x^n$ , desumerne quello delle seguenti serie riconducibili a serie di potenze:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(2x)^n}{\left(x + \frac{1}{x}\right)^n}; \quad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{2x\left(x + \frac{1}{x}\right)}\right)^n; \quad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1} 2^{-nx^2}.$$

2.1.7 (a) Utilizzando la serie (2.18) si ottiene

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} + \frac{1}{7 \cdot 9^3} + \dots + \frac{1}{(2n+1) \cdot 9^n} + \dots\right).$$

Provare che l'errore che si commette trascurando i termini dal decimo in poi non supera  $2/10^{10}$ .

(b) Ponendo  $m = 4$  nella serie (2.18) e utilizzando la formula  $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5$  determinare il modulo  $M = 1/\ln 10$  per il passaggio dai logaritmi naturali ai logaritmi decimali con un errore inferiore a  $10^{-9}$ .

(c) Dimostrare che, tramite la formula

$$\log_{10}(m+1) - \log_{10} m \cong \frac{2M}{2m+1}, \quad 10^3 \leq m \leq 10^4$$

si possono ottenere tutti i logaritmi decimali dei numeri fra 1000 e 10000 con un errore non superiore a  $\frac{1}{2 \cdot 10^6}$ . (In effetti questo era il metodo usato nel Settecento per costruire le tavole logaritmiche.)

**2.1.8** Si provi che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$  è assolutamente convergente per ogni  $x$  (la sua somma definisce la *funzione di Bessel*  $J_0(x)$ ). Si calcoli  $J_0(1)$  con un errore inferiore a  $10^{-3}$ .

**2.1.9** (a) Determinare il raggio di convergenza  $R$  della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n}.$$

(b) Posto  $R_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} (k+1)x^{2k}$  si verifichi che

$$(1-x^2)R_n(x) = nx^{2n} + \frac{x^{2n}}{1-x^2}, \quad |x| < R.$$

(c) Si calcoli per  $|x| < R$  la somma della serie data.

**2.1.10** Determinare il raggio di convergenza della serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , ove

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = a_n(1 - a_n).$$

**2.1.11** Discutere il comportamento della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{\sqrt{n}} x^n, \quad a > 0.$$

## 2.2 Serie di potenze a coefficienti complessi

La somiglianza fra i coefficienti di certe serie di potenze, come le (2.12), (2.13), (2.14) che rappresentano funzioni le quali apparentemente non hanno alcuna parentela fra loro, indusse Eulero a cercare una connessione formale fra tali serie in termini di potenze con esponente immaginario.

Se si sostituisce (in modo, per adesso, puramente *formale!*) nella (2.12) al numero reale  $x$  il numero immaginario  $iy$ , ricordando che

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i \dots$$

si ottiene

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + i \frac{y^5}{5!} - \dots,$$

e separando parte reale e parte immaginaria

$$e^{iy} = \left( 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \dots \right) + i \left( y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots \right). \quad (2.19)$$



Le espressioni entro parentesi nella (2.19) sono esattamente le serie (2.13) e (2.14), dunque

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y. \quad (2.20)$$

Sostituendo  $-y$  a  $y$  si ottiene poi

$$e^{-iy} = \cos y - i \operatorname{sen} y;$$

sommando e sottraendo termine a termine:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \quad (2.21)$$

Le (2.20) e (2.21) sono note come *formule di Eulero* e trovano molte applicazioni in analisi.

Forniamo ora una giustificazione a quanto abbiamo ricavato in modo euristico.

### CONVERGENZA DELLE SERIE DI NUMERI COMPLESSI

Data una successione  $\{c_n\}$  di numeri complessi si costruiscono, come nel caso reale, le somme parziali

$$s_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n,$$

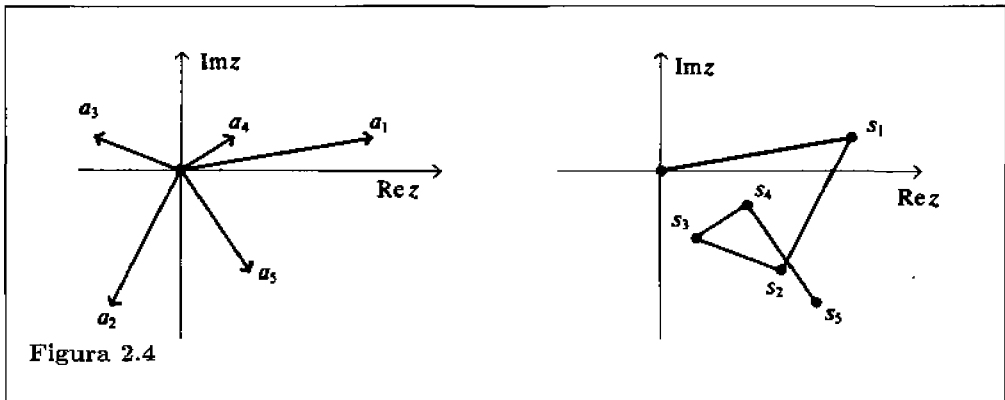
e la serie

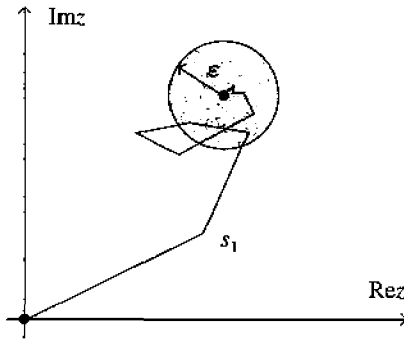
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots \quad (2.22)$$

La Figura 2.4 mostra geometricamente nel piano complesso il passaggio dalla successione  $c_n$  alla successione delle somme parziali  $s_n$ .

La Definizione 1.14 di convergenza è perfettamente adeguata anche nel caso di una serie a termini complessi, pur di sostituire il modulo al valore assoluto: una serie di numeri complessi  $\sum c_n$  si dice *convergente* alla *somma*  $S$  se

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ definitivamente si ha } |S - s_n| < \varepsilon.$$





**Figura 2.5** Interpretazione geometrica della convergenza di una serie di numeri complessi.

Formalmente dunque la definizione di convergenza di una serie è la stessa del caso reale; geometricamente la condizione implica che i punti che rappresentano la successione  $s_n$  nel piano complesso devono appartenere, da un certo indice  $n_0$  in poi, a un cerchio di centro  $S$  e raggio  $\varepsilon$ . Ovviamente, anche in questo caso,  $n_0$  dipende da  $\varepsilon$ .

**ESEMPI 2.7** Si consideri la serie a termini complessi

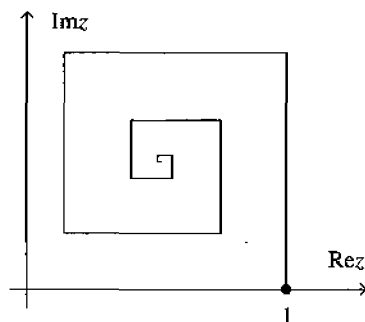
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n} = 1 + \frac{i}{2} - \frac{1}{4} - \frac{i}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

È facile vedere che a essa si estendono le considerazioni e le formule valide per le serie geometriche reali e che essa converge, avendo ragione  $\frac{1}{2}$  di modulo minore di 1. La sua somma è uguale a

$$S = \frac{1}{1 - i/2} = \frac{2}{2 - i} = \frac{2}{5}(2 + i).$$

Più in generale la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha i)^n = 1 + i\alpha - \alpha^2 - i\alpha^3 + \alpha^4 + \dots$  converge a  $S = \frac{1}{1 - \alpha i} = \frac{1 + \alpha i}{1 + \alpha^2}$ .

La Figura 2.6 mostra la successione delle ridotte parziali nel caso  $\alpha = 0,95$ .



**Figura 2.6**

Si supponga ora che la (2.22) sia una serie a termini complessi convergente alla somma  $S$  nel senso ora precisato, e siano

$$S = A + iB, \quad c_n = a_n + ib_n,$$

$$A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \quad B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n;$$

risulta allora

$$s_n = A_n + iB_n,$$

e poiché

$$|s_n - S| = |(A_n - A) + i(B_n - B)| = \sqrt{(A_n - A)^2 + (B_n - B)^2}$$

si vede che la convergenza di (2.22) è *equivalente* alla convergenza delle due serie a termini reali

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (2.23)$$

Se la serie dei moduli  $\sum |c_n|$  è convergente, allora la serie (2.22) si dice *assolutamente convergente*; in tal caso dalle disequaglianze

$$|a_n| \leq |c_n|, \quad |b_n| \leq |c_n|$$

si ricava che le serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$$

sono convergenti, dunque anche le (2.23) sono convergenti (Teorema 1.19, pag. 38) e quindi converge anche la serie (2.22). In conclusione: anche per le serie a termini complessi *la convergenza assoluta implica la convergenza*.

Si estende alle serie a termini complessi il Teorema di Dirichlet 1.22, pag. 40, sul riordinamento delle serie assolutamente convergenti, così come si estende (con la stessa dimostrazione) la Proposizione 1.17, pag. 37, sulla possibilità di sommare termine a termine le serie convergenti.



**ESEMPI 2.8 (a)** La serie

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

converge qualunque sia il numero complesso  $z$ ; infatti la serie dei moduli

$$1 + |z| + \frac{|z^2|}{2!} + \frac{|z^3|}{3!} + \dots + \frac{|z^n|}{n!} + \dots$$

è convergente.

b) Si vede facilmente che la serie

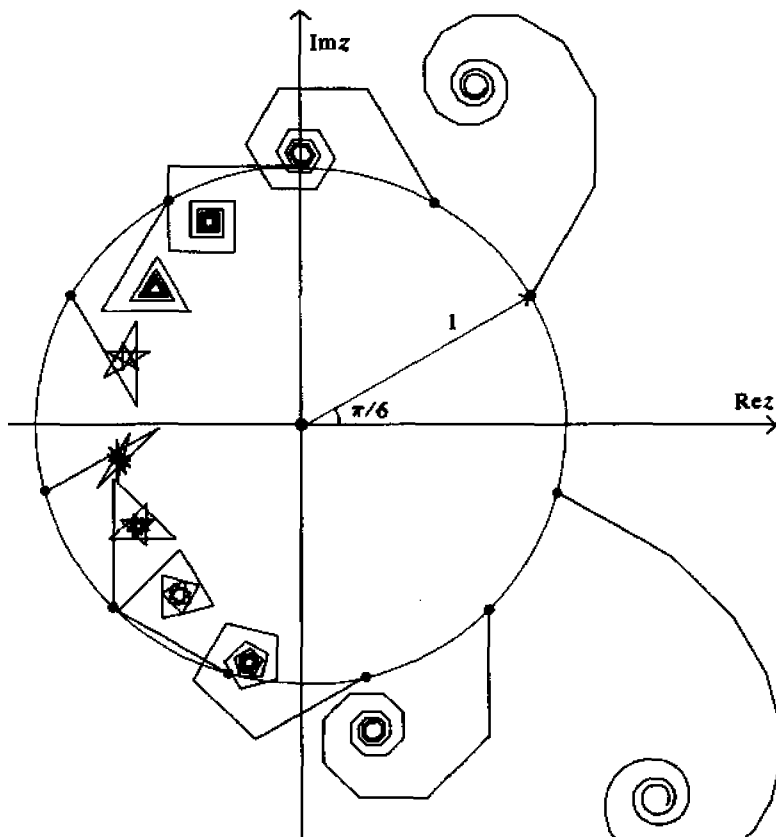
$$z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

converge assolutamente per ogni  $z$  con  $|z| < 1$ , mentre non converge per  $|z| > 1$ . Per  $|z| = 1$  e se  $z \neq 1$  la serie converge ma non assolutamente.

La figura 2.7 mostra l'andamento nel piano complesso delle somme parziali

$$s_n = z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n}$$

per diversi valori di  $z$  con  $|z| = 1$ ; le ridotte parziali  $s_n$  e  $s_{n+1}$  sono connesse fra loro con un segmento.



**Figura 2.7** Comportamento delle somme parziali della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} z^n/n$  con  $|z| = 1$ . Sono mostrati i casi  $z = \cos \vartheta + i \sin \vartheta$  con  $\vartheta = k\pi/6$ ,  $k = 1, 2, 3, 4, 5$  e  $\vartheta = \pi/12 + k\pi/6$ ,  $k = 6, 7, 8, 9, 10, 11$ .

## FUNZIONE ESPONENZIALE COMPLESSA

Torniamo ora al problema riguardante il significato che si deve attribuire alle formule (2.19), (2.20), (2.21). Le osservazioni precedenti consentono di risolvere facilmente la questione; infatti, in analogia al caso reale, poniamo *per definizione*

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}. \quad (2.24)$$

Già sappiamo che tale serie converge assolutamente qualunque sia il numero complesso  $z$  e dunque la formula (2.24) estende la *funzione esponenziale* a tutti i numeri complessi  $z$ .

Con gli stessi passaggi usati nel caso reale si verifica per la funzione (2.24) la usuale proprietà degli esponenti

$$e^z \cdot e^{z'} = e^{z+z'} \quad (2.25)$$

e dunque ha perfettamente senso continuare a chiamare tale funzione “esponenziale”.

È chiaro a questo punto il significato della quantità  $e^{iy}$  che compare nella formula (2.19). Poiché le serie a termini complessi si possono sommare termine a termine, i precedenti passaggi formali per ottenere le formule (2.20) e (2.21) sono del tutto giustificati.

Si osservi ancora che se  $z = x + iy$ , dalla (2.25) si ha  $e^z = e^x e^{iy}$  e quindi per (2.20)

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y) = e^{\operatorname{Re} z} (\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)). \quad (2.26)$$

Ponendo  $z = \pi i$  si ottiene  $e^{i\pi} = -1$ , vale a dire

$$e^{i\pi} + 1 = 0;$$

si noti che in questa relazione intervengono simboli e numeri fra i più importanti della matematica: 0, 1,  $i$ ,  $\pi$ ,  $e$ , +, =.

In generale si possono considerare serie di potenze del tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (2.27)$$

ove i  $c_n$  sono numeri complessi e  $z$  è una variabile complessa. È facile estendere il Teorema 2.2, pag. 62, alle serie a termini complessi: in particolare se la serie (2.27) converge per un certo  $z_0$  allora converge assolutamente per ogni  $z$  con  $|z| < |z_0|$ . Una serie di potenze che converge in qualche altro punto oltre a  $z = 0$  possiede un *cerchio di convergenza* (Figura 2.8(a)), cioè vi è un numero  $R > 0$  tale che la serie risulta assolutamente convergente per  $|z| < R$ , mentre non è convergente per  $|z| > R$ . Può anche capitare, come per la serie esponenziale, che la serie converga per ogni  $z$  complesso: in tal caso si pone  $R = +\infty$  e la serie viene detta *intera*.

**OSSERVAZIONE 2.9** I risultati ora esposti per la serie di potenze in campo complesso si estendono in modo ovvio, come d'altra parte per le serie reali, alle serie di potenze di centro  $z_0 \neq 0$ :

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

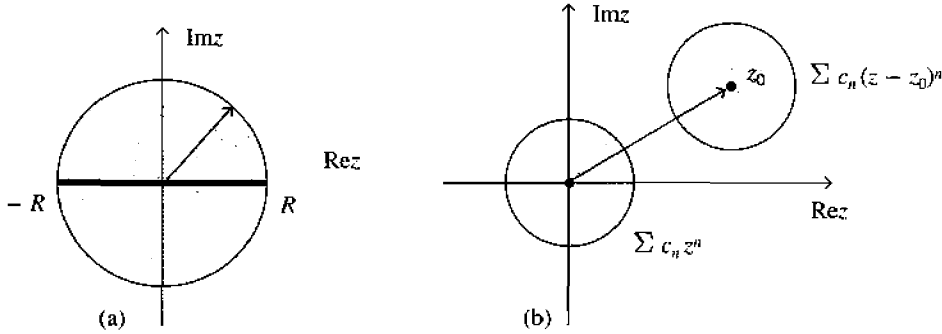


Figura 2.8 Cerchio di convergenza.

In particolare, tramite una semplice traslazione si vede che una tale serie converge assolutamente per tutti gli  $z$  tali che  $|z - z_0| < R$ , vale a dire in un cerchio di centro  $z_0$ , detto *cerchio di convergenza* (Figura 2.8(b)), mentre non converge per  $|z - z_0| > R$ . Il numero  $R$  viene detto anche in questo caso *raggio di convergenza*; ovviamente vi sono ancora i casi  $R = 0$ ,  $R = +\infty$ .

## ESERCIZI

2.2.1 Studiare la convergenza delle seguenti successioni:

$$(a) \quad c_n = \frac{(-1)^n + i}{n + 1}; \quad (b) \quad c_n = \frac{\text{sen } n! + i}{n(n + 1)}; \quad (c) \quad c_n = (a(1 + i))^n$$

dove  $a$  è un numero reale.

2.2.2 Studiare se le seguenti serie di numeri complessi sono convergenti:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}; \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3 + i)^n}; \quad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2 + i)^n}{2^n};$$

$$(d) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + i}; \quad (e) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(n^2 + 1)} i^n; \quad (f) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2 + 1} e^{in\frac{\pi}{2}};$$

$$(g) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2} e^{in\frac{\pi}{3}}; \quad (h) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left( \frac{i - 1}{\sqrt{2}} \right)^n; \quad (i) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2 + i}.$$

2.2.3 Determinare il cerchio di convergenza delle serie di potenze complesse:

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} z^n; \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - 3)^n}{n5^n}; \quad (c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1 + ni) z^n;$$

$$(d) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z + i)^{2n}}{2^n}; \quad (e) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z - i)^{3n}}{n!}; \quad (f) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n + 3^n)(z - i)^n.$$

**2.2.4** Calcolare le somme delle seguenti serie (ove definite):

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n; \quad (b) \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}.$$

**2.2.5** Trovare parte reale e coefficiente immaginario dei numeri

$$e^{1-i}; \quad e^{3+2i}; \quad e^{(1+i)^4}; \quad ie^{i|1+2i|}.$$

**2.2.6** Trovare il luogo dei punti del piano complesso in cui le funzioni

$$f(z) = e^z, \quad g(z) = e^{z^2}$$

assumono valori reali e il luogo dei punti in cui assumono valori immaginari puri.

**2.2.7** Individuare il luogo dei punti del piano complesso in cui le funzioni

$$g(z) = e^{z^2}, \quad h(z) = e^{z^3}$$

assumono modulo unitario.

**2.2.8** Trovare delle serie di potenze in  $z$  che abbiano come somma, in un cerchio di convergenza di cui si troverà il raggio, le funzioni

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 3}, \quad f_2(z) = \frac{1}{z^2 + z + 1}.$$

[Il denominatore di  $f_1$  ha due radici reali semplici e dunque la frazione si può ridurre alla somma di fratti semplici; per  $f_2$  si noti che  $(1 - z^3) = (1 - z)(z^2 + z + 1)$ ].

**2.2.9** Usando le formule di Eulero si provi che per ogni  $x$  reale

$$\begin{aligned} \cos 3x &= 4 \cos^3 x - 3 \cos x, \\ \sin 3x &= 3 \sin x - 4 \sin^3 x. \end{aligned}$$

**2.2.10** Siano  $\alpha, \beta$  numeri reali. Provare che per  $-1 < x < 1$  si ha

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos(\alpha + n\beta) &= \frac{\cos \alpha - x \cos(\alpha - \beta)}{1 - 2x \cos \beta + x^2}, \\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n \sin(\alpha + n\beta) &= \frac{\sin \alpha - x \sin(\alpha - \beta)}{1 - 2x \cos \beta + x^2}. \end{aligned}$$

[Considerare la serie  $\sum x^n e^{i(\alpha+n\beta)}$  che ha somma  $e^{i\alpha}/(1 - xe^{i\beta})$ ].

## 2.3 Moltiplicazione di serie

Sappiamo che le serie convergenti, numeriche o di potenze, si possono sommare o sottrarre termine a termine. Discutiamo ora la questione della moltiplicazione delle serie.

Date due serie convergenti (reali o complesse)

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n + \dots \quad (2.28)$$

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n = b_0 + b_1 + \dots + b_n + \dots \quad (2.29)$$

consideriamo tutti i possibili prodotti  $a_n b_k$ ; essi costituiscono la "matrice infinita":

$$\begin{array}{cccccc} a_0 b_0 & a_1 b_0 & a_2 b_0 & \dots & a_n b_0 & \dots \\ a_0 b_1 & a_1 b_1 & a_2 b_1 & \dots & a_n b_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 b_k & a_1 b_k & a_2 b_k & \dots & a_n b_k & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Tali prodotti si possono raggruppare in molti modi per costruire una singola serie; il caso importante delle serie di potenze ce ne indica uno che è privilegiato: dovendo moltiplicare  $\sum u_n x^n$ ,  $\sum v_n x^n$  sarà naturale raggruppare i termini con la stessa potenza di  $x$ , cioè

$$u_0 v_0 + (u_0 v_1 + u_1 v_0)x + (u_0 v_2 + u_1 v_1 + u_2 v_0)x^2 + \dots$$

Vale a dire, nel caso della serie (2.28), (2.29),

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) + \dots \quad (2.30)$$

Ciò corrisponde a riunire i termini che stanno sulle diagonali della matrice infinita:

$$\begin{array}{cccccc} a_0 b_0 & a_1 b_0 & a_2 b_0 & a_3 b_0 & \dots \\ & / & / & / & / \\ a_0 b_1 & a_1 b_1 & a_2 b_1 & a_3 b_1 & \dots \\ & / & / & / & / \\ a_0 b_2 & a_1 b_2 & a_2 b_2 & a_3 b_2 & \dots \\ & / & / & / & / \\ a_0 b_3 & a_1 b_3 & a_2 b_3 & a_3 b_3 & \dots \\ & / & / & / & / \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Osservando che la (2.30) si può scrivere sinteticamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k},$$

perveniamo alla definizione seguente.

**DEFINIZIONE 2.10** Date due serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad (2.31)$$



si dice che la serie  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ , ove

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}, \quad (2.32)$$

è il loro *prodotto di Cauchy*.

Ciò posto si potrebbe sperare di dimostrare che se  $\sum a_n, \sum b_n$  sono convergenti allora anche il loro prodotto di Cauchy  $\sum c_n$  lo è. Questa speranza viene tuttavia delusa dall'esempio che segue: posto  $a_n = b_n = (-1)^n u_n$ , ove  $u_n$  è una successione decrescente e infinitesima di numeri positivi, allora

$$\begin{aligned} c_n &= (-1)^n (u_0 u_n + u_1 u_{n-1} + \dots + u_n u_0) \\ |c_n| &= u_0 u_n + u_1 u_{n-1} + \dots + u_n u_0 \geq (n+1) u_n^2, \end{aligned}$$

dunque prendendo per esempio  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$  si ha che la serie prodotto  $\sum c_n$  non converge, perché  $c_n$  non è infinitesima, mentre  $\sum a_n, \sum b_n$  convergono.

Per ottenere la convergenza del prodotto occorrono dunque ipotesi più forti sulle due serie iniziali.

**TEOREMA 2.11 (Cauchy)** Se le serie  $\sum a_n, \sum b_n$  convergono assolutamente allora il loro prodotto di Cauchy  $\sum c_n$  è assolutamente convergente e ha per somma il prodotto  $AB$  delle somme.

**DIMOSTRAZIONE** Si consideri la serie definita da

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} d_k &= a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_1 + a_1 b_0 + a_0 b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + a_2 b_0 + \dots \\ &\quad \dots + a_0 b_n + a_1 b_n + \dots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \dots + a_n b_0 + \dots \end{aligned} \quad (2.33)$$

la cui legge di formazione è illustrata dallo schema seguente

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{a_0 b_0} & \boxed{a_1 b_0} & \boxed{a_2 b_0} & \dots & \boxed{a_n b_0} & \dots & \\ \boxed{a_0 b_1} & \boxed{a_1 b_1} & \boxed{a_2 b_1} & \dots & \boxed{a_n b_1} & \dots & \\ \boxed{a_0 b_2} & \boxed{a_1 b_2} & \boxed{a_2 b_2} & \dots & \boxed{a_n b_2} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \boxed{a_0 b_n} & \boxed{a_1 b_n} & \boxed{a_2 b_n} & \dots & \boxed{a_n b_n} & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

La serie  $\sum d_k$  converge assolutamente in quanto per ogni  $n$  si ha

$$\sum_{k=0}^n |d_k| \leq \sum_{k=0}^{(n+1)^2-1} |d_k| = \left( \sum_{k=0}^n |a_k| \right) \left( \sum_{k=0}^n |b_k| \right) \leq \left( \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \right)$$

e per ipotesi le serie  $\sum |a_k|, \sum |b_k|$  sono convergenti.

D'altra parte le somme parziali di indice  $(n + 1)^2 - 1$  della serie  $\sum d_k$  sono date da

$$\left( \sum_{k=0}^n a_k \right) \left( \sum_{k=0}^n b_k \right),$$

quantità che per  $n \rightarrow \infty$  tende al prodotto  $AB$ ; dunque tale serie (che già si sa essere convergente in quanto assolutamente convergente) ha per somma  $AB$ .

Dalla serie (2.33), riordinando i termini, si ottiene la serie

$$a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 + a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 + \dots + a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 + \dots$$

la quale per il Teorema di Dirichlet 1.22, pag. 40, converge assolutamente e ha somma  $AB$ . Ma raggruppando opportunamente i termini di questa serie (operazione che non modifica il comportamento di una serie né il valore della somma) otteniamo proprio il prodotto di Cauchy di  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$ , che è dunque una serie assolutamente convergente con somma  $AB$   $\square$

**OSSERVAZIONE 2.12** (a) Si noti che se le serie  $\sum a_n, \sum b_n$  hanno come termine iniziale  $a_1, b_1$  e non  $a_0, b_0$ , allora nella definizione di prodotto di Cauchy in luogo della (2.32) occorrerà prendere

$$c_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1 = \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k+1}.$$

(b) Vi sono molti risultati che estendono il Teorema 2.11, anche se a tutt'oggi non si conosce alcuna condizione necessaria e sufficiente per la convergenza della serie prodotto. Fra tali risultati citiamo i seguenti, ove come al solito  $\sum c_n$  indica il prodotto di Cauchy di  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  e  $C, A, B$  denotano rispettivamente le somme.

- 1) Se le tre serie  $\sum a_n, \sum b_n, \sum c_n$  convergono allora  $C = AB$ ;
- 2) (*Teorema di Mertens*) Se  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  sono convergenti e una di esse converge assolutamente allora  $\sum c_n$  converge e, per il punto 1), la sua somma è  $AB$ ;
- 3) (*Teorema di Hardy*) Se  $\sum a_n$  e  $\sum b_n$  convergono e le successioni  $\{na_n\}, \{nb_n\}$  sono limitate allora  $\sum c_n$  converge.



**ESEMPI 2.13** (a) Moltiplicando la serie geometrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$$

(che è assolutamente convergente per  $|x| < 1$ ) per se stessa si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \end{aligned} \tag{2.34}$$

(b) Si consideri la serie esponenziale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots;$$

essa converge assolutamente per ogni  $x$ . Si indichi con  $E(x)$  la sua somma; il prodotto  $E(x) \cdot E(y)$  può allora costruirsi con la regola di moltiplicazione delle serie. Il termine generale della serie prodotto ha la forma

$$\begin{aligned} 1 \cdot \frac{y^n}{n!} + \frac{x}{1!} \frac{y^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^2}{2!} \frac{y^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \cdot 1 = \\ = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!(n-k)!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Dunque la serie prodotto è nuovamente una serie esponenziale  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$  e quindi si ha

$$E(x) \cdot E(y) = E(x+y) \quad \text{per ogni } x, y. \quad (2.35)$$

(c) Si supponga che esista una serie di potenze  $\sum c_n x^n$  assolutamente convergente in un intorno di 0 che ha come somma la funzione  $\sqrt{1+x}$ . Si vogliono trovare i coefficienti  $c_n$ ; moltiplicando la serie per se stessa si ottiene

$$\begin{aligned} 1+x = \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right)^2 = c_0^2 + 2c_0 c_1 x + (2c_0 c_2 + c_1^2) x^2 + \\ + (2c_0 c_3 + 2c_1 c_2) x^3 + \dots + \sum_{k=0}^{\infty} c_k c_{n-k} x^n + \dots \end{aligned}$$

In base al principio di identità delle serie di potenze i coefficienti di  $x^0$  e di  $x$  nella serie prodotto sono uguali a 1 mentre tutti i rimanenti sono nulli. Si ottiene allora

$$\begin{aligned} c_0 = 1, & & c_1 = \frac{1}{2} \\ 2c_0 c_2 + c_1^2 = 0, & & \text{cioè } c_2 = -\frac{1}{8} \\ 2c_0 c_3 + 2c_1 c_2 = 0, & & \text{cioè } c_3 = \frac{1}{16} \\ 2c_0 c_4 + 2c_1 c_3 + c_2^2 = 0, & & \text{cioè } c_4 = -\frac{5}{128} \end{aligned}$$

e, in linea di principio, proseguendo in questo modo possono essere determinati tutti i coefficienti  $c_n$ . Si vedrà in seguito che tali numeri sono esprimibili come *coefficienti binomiali generalizzati*

$$c_n = \binom{1/2}{n},$$

ove il simbolo  $\binom{\alpha}{n}$  indica per qualunque reale  $\alpha$

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}. \quad (2.36)$$

Abbiamo dunque ricavato la seguente formula (la cui dimostrazione sarà completata nel prossimo capitolo):

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4 + \dots + \binom{1/2}{n}x^n + \dots \quad (2.37)$$

(d) Si considerino le serie

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

le quali convergono assolutamente per ogni  $x$ , e si denotino con  $C(x)$  e  $S(x)$ , rispettivamente le loro somme.

Calcoliamo il prodotto  $C(x)S(x)$ :

$$\begin{aligned} C(x)S(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} (-1)^{n-k} \frac{x^{2(n-k)+1}}{(2(n-k)+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!(2(n-k)+1)!}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Per determinare i coefficienti, osserviamo che risulta

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k)!(2(n-k)+1)!} &= \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \frac{(2n+1)!}{(2k)!(2(n-k)+1)!} = \\ &= \frac{1}{(2n+1)!} \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

D'altra parte, dalla formula del binomio di Newton:

$$2^{2n+1} = (1+1)^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \dots + \binom{2n+1}{2n+1},$$

$$0 = (1-1)^{2n+1} = \binom{2n+1}{0} - \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} - \dots - \binom{2n+1}{2n+1},$$

e sommando membro a membro

$$\begin{aligned} 2^{2n+1} &= 2 \left[ \binom{2n+1}{0} + \binom{2n+1}{2} + \dots + \binom{2n+1}{2n} \right] = \\ &= 2 \sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{2k}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dalle (2.38), (2.39), (2.40) si ricava quindi

$$C(x)S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x)^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

da cui la "formula di duplicazione"

$$S(2x) = 2C(x)S(x). \quad (2.41)$$

In modo analogo si possono ottenere le “relazioni trigonometriche”

$$C^2(x) + S^2(x) = 1, \quad (2.42)$$

$$S(x + y) = S(x)C(y) + S(y)C(x), \quad (2.43)$$

e altre dello stesso tipo.

Questi fatti, pur non costituendo una dimostrazione, suggeriscono che le funzioni  $S(x)$  e  $C(x)$  non siano altro che le funzioni *seno* e *coseno* della trigonometria elementare; questo risultato, come già detto, sarà provato nel prossimo capitolo utilizzando gli strumenti del calcolo differenziale.



## ESERCIZI

**2.3.1** Scrivere lo sviluppo in serie di potenze, ove possibile, delle funzioni

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \frac{x}{1-x}; & \text{(b)} \quad & \frac{3}{1+x}; \\ \text{(c)} \quad & \frac{2}{1+3x}; & \text{(d)} \quad & \frac{2x}{(x+1)(x-1)}. \end{aligned}$$

**2.3.2** Verificare che le serie seguenti hanno le somme indicate:

$$1/0! + 1/1! + 1/4! + 1/5! + 1/8! + 1/9! + \dots = (e + \operatorname{sen} 1 + \operatorname{cos} 1)/2;$$

$$1/2! + 1/3! + 1/6! + 1/7! + 1/10! + 1/11! + \dots = (e - \operatorname{sen} 1 - \operatorname{cos} 1)/2.$$

**2.3.3** Scrivere, ove possibile, lo sviluppo in serie di potenze delle funzioni

$$\text{(a)} \quad x \cdot \ln(1-x); \quad \text{(b)} \quad \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right);$$

$$\text{(c)} \quad \ln(1-x)^3; \quad \text{(d)} \quad \ln(1-x^2).$$

**2.3.4** Desumere dallo sviluppo in serie di  $e^x$  quello di

$$\text{(a)} \quad e^{2x}; \quad \text{(b)} \quad x \cdot e^x; \quad \text{(c)} \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \text{(d)} \quad \frac{e^x}{1-x}.$$

**2.3.5** Scrivere i primi tre termini dello sviluppo in serie di potenze delle seguenti funzioni, indicando l'intervallo di convergenza:

$$\text{(a)} \quad \operatorname{sen}^2 x; \quad \text{(b)} \quad e^x \cdot \ln(1-x); \quad \text{(c)} \quad \frac{\operatorname{cos} x}{1-x}.$$

**2.3.6** Eseguire il prodotto delle serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} (-a)^n$  precisando quali valori di  $a$  consentono questa operazione.

**2.3.7** Provare che per  $|x| < 1$  si ha

$$(a) \quad \frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \dots,$$

$$(b) \quad (\ln(1+x))^2 = x^2 - \left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{2}{3}x^3 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)\frac{2}{4}x^4 - \dots$$

**2.3.8** Dimostrare le formule (2.42), (2.43).

**2.3.9** Provare che se  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  è una serie assolutamente convergente per  $|x| < 1$  con somma  $A(x)$  allora

$$\frac{A(x)}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n, \quad \text{ove} \quad A_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n.$$

**2.3.10** Sia

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_n + \dots + a_n b_n + a_n b_{n-1} + \dots + a_n b_1 + a_n b_0.$$

Si dimostri che se  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$  convergono allora anche la serie  $\sum c_n$  converge e ha come somma il prodotto delle somme.

**2.3.11** Verificare che per  $|x| < 1$  si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}.$$

## I concetti fondamentali del calcolo infinitesimale

---

Qual è la velocità di una reazione chimica? In quanto tempo ci si attende che una popolazione di batteri cresca? Come si propaga il calore in una barra metallica? Quanta potenza occorre per far accelerare un'auto di Formula 1 da 0 a 200 km/h in 10 secondi? Qual è il massimo volume di una scatola costruibile con un foglio di cartone?

E ancora: come si ottiene una formula per il calcolo dell'area del cerchio o del volume della sfera? Quale deve essere la velocità di un razzo perché possa uscire dal campo gravitazionale terrestre? Qual è la massa dell'atmosfera? Se un corpo caldo si raffredda con velocità proporzionale alla differenza fra la sua temperatura e quella dell'ambiente, in quanto tempo raggiungerà una temperatura intermedia prefissata?

Questi, e molti altri problemi, si possono affrontare e risolvere tramite le tecniche del calcolo infinitesimale. I problemi del primo gruppo sono legati alla nozione di "tasso di variazione" di una grandezza, che è alla base del calcolo differenziale; quelli del secondo gruppo sono essenzialmente affini alla nozione di "somma infinita", che è stata oggetto di studio dei primi due capitoli e che è alla base del calcolo integrale. Mentre le linee principali del calcolo integrale sono state sostanzialmente sviluppate più di 2000 anni fa (per opera di matematici greci e in particolare di Archimede), per il calcolo differenziale occorre attendere il '700 per trovare una sistemazione attendibile della teoria (soprattutto grazie all'opera di Leibniz e Newton), e addirittura il '900 per una formulazione matematica di sicuro rigore.

La fortuna del calcolo infinitesimale è dovuta alla felice fusione di due aspetti ugualmente importanti. Da una parte, come si è detto, esso è uno strumento potente e maneggevole per la risoluzione di un gran numero di problemi applicativi in campi svariatissimi, offrendo la possibilità di calcolare le più disparate grandezze in modo esatto, quando possibile, o in forma approssimata, con il desiderato grado di precisione, negli altri casi. D'altro canto, dal punto di vista prettamente matematico, con il calcolo infinitesimale si compie un'importante unificazione teorica che rivela la stretta connessione fra le due nozioni chiave di integrale e di derivata, che traggono origine da questioni geometriche apparentemente slegate come il calcolo delle aree e la ricerca della tangenti a una curva.

Lo strumento principale di questa unificazione è il cosiddetto teorema fondamentale del calcolo, in virtù del quale le operazioni di integrazione e di derivazione si rivelano, in un senso opportuno, l'una inversa dell'altra.

In questo capitolo sono esposte le idee essenziali del calcolo integrale e differenziale. Si è cercato di evitare esagerati tecnicismi e quindi ci si limita per lo più a considerare funzioni analitiche, una classe di funzioni che tra i suoi meriti annovera anche quello di aver consentito, già nel '700, una comprensione pressoché completa dei "fatti" del calcolo infinitesimale. Molte delle proprietà che qui si incontreranno potranno essere facilmente estese a più vaste classi di funzioni, ma ciò sarà fatto nei due capitoli seguenti, dedicati appunto agli aspetti tecnici. Chiude il capitolo un breve paragrafo in cui si accenna all'applicazione del teorema fondamentale del calcolo ad alcune questioni di meccanica.

### 3.1 Definizione e prime proprietà dell'integrale

#### INTRODUZIONE

Come già detto la nozione di integrale scaturisce dalla necessità di rendere rigoroso il concetto intuitivo di area di una regione piana, anche se altri problemi, provenienti da scienze diverse, conducono alla stessa nozione. Data una porzione limitata di piano sembra chiaro, almeno euristicamente, che è possibile attribuire a essa un'"area", cioè un numero che esprime quante volte il quadrato unitario è contenuto in tale porzione. Il problema è: come determinare quel numero?

L'intuizione ci suggerisce alcuni requisiti minimi:

1. l'area è un numero positivo (o nullo),
2. l'area di un rettangolo è il prodotto della base e dell'altezza,
3. l'area di due figure congruenti è la stessa,
4. se una regione viene suddivisa in due parti l'area complessiva è la somma delle aree delle due parti.

Queste semplici richieste sono indispensabili, se si vuole che l'area sia un'estensione della nozione elementare, e hanno conseguenze molto interessanti.

Intanto l'area è una funzione monotona, cioè se  $A$  è contenuto in  $B$  allora l'area di  $A$  è minore o uguale all'area di  $B$ . In secondo luogo è possibile calcolare l'area di ogni regione che si scompone in rettangoli. Allora per trovare l'area di una regione  $A$  si potranno considerare due regioni  $R$  e  $R'$  scomponibili in rettangoli, l'una contenuta in  $A$ , la seconda contenente  $A$  (Figura 3.1). L'area di  $A$  sarà un numero compreso fra quelli che esprimono le aree di  $R$  e di  $R'$ . Se si riescono a trovare due successioni di regioni  $R_n$  e  $R'_n$ , scomponibili in rettangoli, con  $R_n$  contenuta in  $A$  e  $R'_n$  contenente  $A$ , tali che le aree di  $R_n$  e di  $R'_n$  abbiano lo stesso limite per  $n$  tendente all'infinito, sarà ragionevole assumere tale limite come area della regione  $A$ . È facile vedere che, al posto delle regioni scomponibili in rettangoli, si possono usare generici poligoni contenuti in  $A$  e contenenti  $A$  (Esercizio 3.1.3), ma questo fatto è, al momento, inessenziale.

Quello ora descritto è in sostanza il *metodo di esaustione*, usato anticamente per determinare l'area del cerchio e di altre figure particolari. La nozione di integrale scaturisce dalla formulazione precisa di queste idee intuitive.



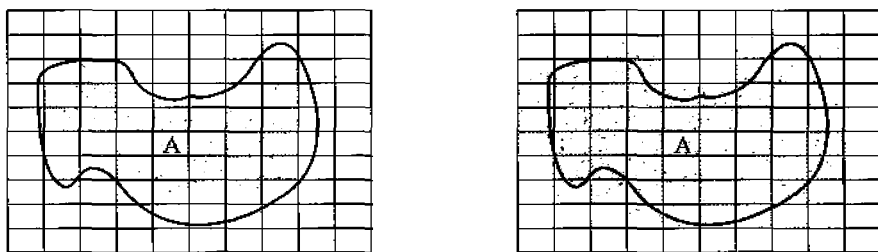


Figura 3.1 Approssimazione dall'interno e dall'esterno dell'area della regione A.

**ESEMPI 3.1 (a)** Si consideri un segmento parabolico, vale a dire la parte  $A$  di piano determinata dall'asse delle ascisse, dalla retta  $x = b$  e dalla parabola di equazione  $y = x^2$ . Il seguente procedimento per calcolare l'area di  $A$  risale sostanzialmente ad Archimede: si suddivide l'intervallo  $[0, b]$  in  $n$  intervalli uguali, ciascuno di ampiezza  $h = b/n$ , e si considerino i rettangoli che hanno come base tali intervalli e altezza pari al massimo valore assunto da  $f(x) = x^2$  in tale intervallo. L'area complessiva di questi rettangoli è

$$\begin{aligned} S_n &= h[h^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \dots + (nh)^2] = \\ &= \left(\frac{b}{n}\right)^3 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) = b^3 \frac{n(2n+1)(n+1)}{6n^3}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ove è stato fatto uso della formula (1.13), pag. 8.

Si considerino ora i rettangoli che hanno la stessa base dei precedenti ma altezza pari al minimo di  $f(x) = x^2$  nell'intervallo; la loro area complessiva è

$$\begin{aligned} s_n &= h[0^2 + h^2 + (2h)^2 + \dots + ((n-1)h)^2] = \\ &= \left(\frac{b}{n}\right)^3 (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2) = b^3 \frac{(n-1)(2n-1)n}{6n^3}. \end{aligned}$$

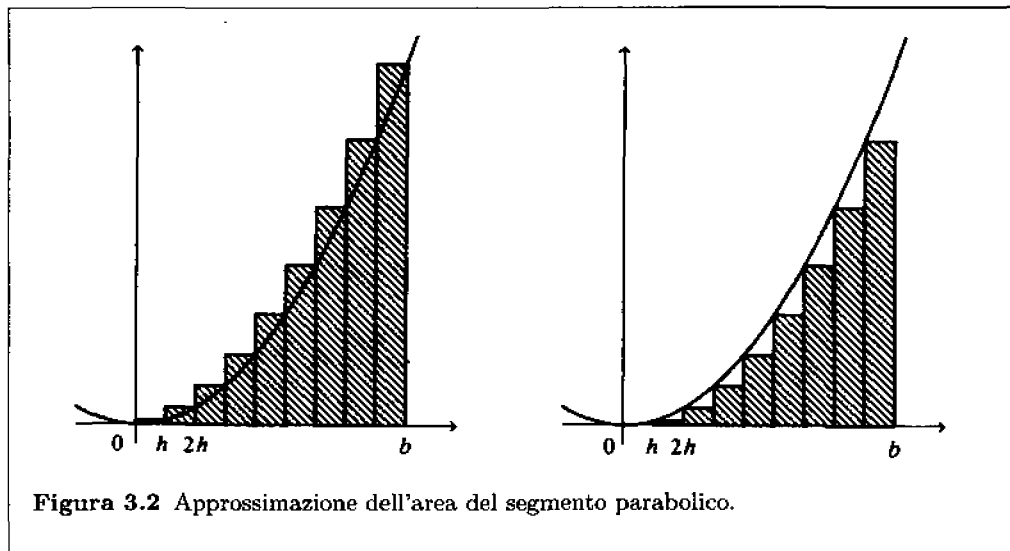
Al tendere di  $n$  all'infinito  $S_n$  e  $s_n$  tendono allo stesso limite  $b^3/3$ , il quale potrà allora essere assunto come "area" della regione  $A$ .

**(b)** Si consideri ora la curva di equazione  $y = x^p$  ( $p$  intero positivo) e il "trapezoide" analogo al precedente, delimitato dalla curva, dall'asse delle  $x$  e dalle rette  $x = 1$  e  $x = b$  ( $b > 1$ ). Si suddivide, questa volta, l'intervallo  $[1, b]$  in  $n$  intervalli in modo che i punti di suddivisione formino una progressione geometrica

$$1, h, h^2, h^3, \dots, h^n = b,$$

ove  $h = \sqrt[n]{b}$ . Considerando i rettangoli analoghi ai precedenti si trova un'area complessiva, per i "rettangoli superiori", pari a

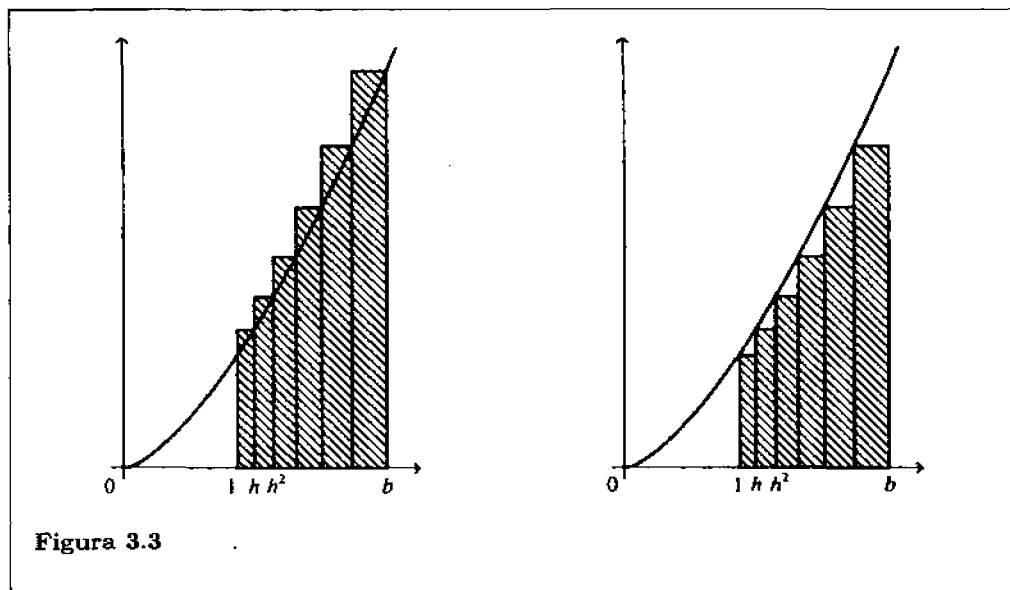
$$\begin{aligned} S_n &= (h-1)h^p + (h^2-h)h^{2p} + \dots + (h^n - h^{n-1})h^{np} = \\ &= \sum_{k=1}^n (h^k - h^{k-1})h^{pk}, \end{aligned} \quad (3.2)$$



mentre per i rettangoli inferiori si ha

$$s_n = (h-1)1^p + (h^2-h)h^p + \dots + (h^n - h^{n-1})h^{(n-1)p} = \frac{S_n}{h^p}. \quad (3.3)$$

Per  $n \rightarrow \infty$  si ha che  $h = \sqrt[n]{b}$  tende a 1 (Esempio 1.26(c), pag. 46) e quindi anche in questo caso le successioni  $S_n$  e  $s_n$  hanno lo stesso limite, che si può calcolare scrivendo



la (3.2) nel modo seguente:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n h^{(p+1)k} \left(1 - \frac{1}{h}\right) = \left(1 - \frac{1}{h}\right) h^{p+1} \frac{h^{(p+1)n} - 1}{h^{p+1} - 1} = \\ &= \frac{h-1}{h^{p+1}-1} h^p (h^{(p+1)n} - 1) = \frac{h^p}{h^p + h^{p-1} + \dots + 1} (h^{p+1} - 1). \end{aligned}$$

Poiché, come si è osservato, per  $n \rightarrow \infty$  si ha  $h \rightarrow 1$ , si ottiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{h^{p+1} - 1}{p + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n. \quad (3.4)$$

Questo esempio, è sostanzialmente dovuto a Fermat (Oeuvres, III, 216).

(c) In modo simile si può calcolare l'area del trapezoide definito dalla stessa funzione  $y = x^p$  fra le ascisse 0 e 1, vale a dire della regione di piano delimitata dalla curva, dall'asse  $x$  e dalla retta  $x = 1$ . Sia  $h$  un numero arbitrario con  $h < 1$  e sia  $n$  un intero fissato. Considerata la partizione di  $[0, 1]$  tramite i punti

$$0, h^n, h^{n-1}, \dots, h, 1$$

e indicando anche in questo caso con  $s_n$  e  $S_n$  le aree complessive dei rettangoli inferiori e superiori (sommando questa volta da destra a sinistra), con  $h_n = \frac{1}{n}$ , tramite un calcolo analogo al precedente, si trova:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{p+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (3.5)$$

## DEFINIZIONE DI INTEGRALE

Considereremo funzioni limitate definite su un intervallo chiuso  $[a, b]$ . Motivati dalle precedenti considerazioni, fissiamo una suddivisione di  $[a, b]$  in un numero finito di sottointervalli, ottenuta inserendo dei punti fra  $a$  e  $b$ :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Una suddivisione di questo tipo viene detta *partizione* di  $[a, b]$  negli  $n$  sottointervalli  $[x_0, x_1], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  e sarà indicata con il simbolo  $\pi : (x_0, x_1, \dots, x_n)$  o più semplicemente con  $\pi$ . Si indichino con  $m_i$  e  $M_i$ , rispettivamente, l'estremo inferiore e l'estremo superiore della funzione  $f$  nell'intervallo chiuso  $[x_{i-1}, x_i]$ :

$$m_i = \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x), \quad M_i = \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x),$$

e si costruiscano le due somme

$$\begin{aligned} s_\pi &= m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \dots + m_n(x_n - x_{n-1}) \\ S_\pi &= M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \dots + M_n(x_n - x_{n-1}) \end{aligned} \quad (3.6)$$

che saranno chiamate, rispettivamente, *somma inferiore* e *somma superiore* di  $f$  relative alla partizione  $\pi$ .

Si supponga per il momento che  $f$  sia positiva:  $s_\pi$  e  $S_\pi$  rappresentano allora le aree di due regioni formate da rettangoli (queste regioni saranno chiamate *plurirettangoli*) la prima delle quali è contenuta nel trapezoide definito dal grafico di  $f$ , la

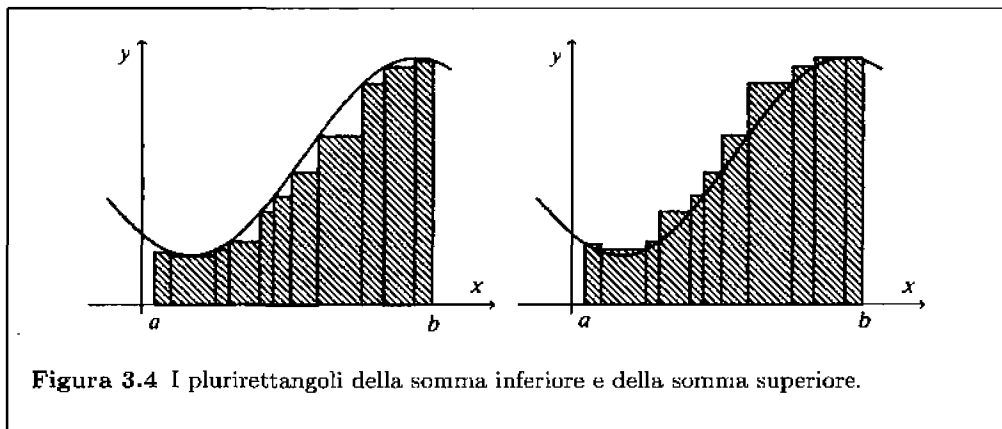


Figura 3.4 I plurirettangoli della somma inferiore e della somma superiore.

seconda invece contiene tale trapezoide (Figura 3.4). Sembra ragionevole supporre che, se si prendono tutte le possibili partizioni e si considera l'estremo superiore delle corrispondenti somme inferiori, esso sia l'area del trapezoide stesso, cioè della regione di piano

$$\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Allo stesso modo è plausibile che tale area si possa ottenere come estremo inferiore delle somme superiori al variare di tutte le possibili partizioni.

**DEFINIZIONE 3.2** In base alle considerazioni precedenti poniamo

$I'$  = estremo superiore di tutte le somme inferiori  $s_\pi$ ,

$I''$  = estremo inferiore di tutte le somme superiori  $S_\pi$ ,

in simboli

$$I' = \sup_{\pi} s_{\pi}, \quad I'' = \inf_{\pi} S_{\pi}. \quad (3.7)$$

Se risulta

$$I' = I'' \quad (3.8)$$

si dice che la funzione  $f$  è *integrabile* (secondo Riemann) in  $[a, b]$  e si indica con

$$\int_a^b f(x) dx$$

il loro comune valore. Esso si chiama *integrale definito* della funzione  $f$  fra i due estremi  $a$  e  $b$ . Nel caso in cui  $f \geq 0$  l'integrale individua, per definizione, l'area del trapezoide definito da  $f$ , cioè dell'insieme  $\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ . Il significato geometrico dell'integrale, nel caso di funzioni che cambiano segno, sarà chiaro in seguito.

I due membri che compaiono nella (3.8) si dicono talora *integrale inferiore* e *integrale superiore* di  $f$ . Si noti che risulta in ogni caso

$$I' \leq I''; \quad (3.9)$$

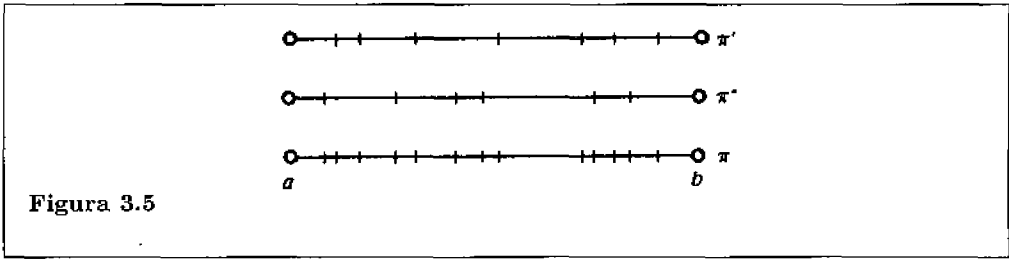


Figura 3.5

infatti, se  $\pi'$  e  $\pi''$  sono due qualunque partizioni di  $[a, b]$ , denotiamo con  $\pi$  quella partizione che tiene conto sia dei punti di suddivisione di  $\pi'$  sia di quelli di  $\pi''$  (Figura 3.5). Si ha ovviamente  $s_\pi \leq S_{\pi'}$ , e d'altra parte  $s_{\pi'} \leq s_\pi$  perché, passando a una partizione "più fine", la somma inferiore non può certo diminuire. Analogamente  $S_\pi \leq S_{\pi''}$  e collegando fra loro queste disequaglianze si ha:

$$s_{\pi'} \leq S_{\pi''};$$

dunque, ogni somma inferiore è minore o uguale a ogni somma superiore, da cui la (3.9). La definizione precedente è formulata in modo assai generale ed è conveniente per le estensioni della nozione di integrale che verranno incontrate in seguito (ma talvolta, come mostra l'Esempio 3.1(b), anche per la sua determinazione); tuttavia si può riformulare tale definizione considerando unicamente partizioni di  $[a, b]$  in intervalli di egual lunghezza, per esempio, correlandola così alla abituale operazione di passaggio al limite.

Per far questo in modo sufficientemente generale introduciamo una notazione speciale riguardante le partizioni. Se  $\pi$  è una partizione individuata dai punti  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ , la lunghezza del massimo sottointervallo della partizione si dirà *passo* della partizione stessa e si indicherà con  $|\pi|$ . Per definizione dunque  $|\pi|$  è il massimo delle differenze

$$x_1 - x_0, \quad x_2 - x_1, \quad \dots, \quad x_n - x_{n-1}.$$

Se  $\pi_n$  è la partizione in  $n$  intervalli equispaziati di  $[a, b]$ , si avrà  $|\pi_n| = (b - a)/n$  e, dunque,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\pi_n| = 0$ . La proprietà  $|\pi_n| \rightarrow 0$  non è caratteristica delle partizioni in parti uguali ma si presenta anche in moltissime altre successioni di partizioni  $\pi_n$  che divengono via via sempre "più fini" al crescere di  $n$ .

Per motivi di chiarezza il teorema che segue viene dapprima enunciato per partizioni in parti uguali e, successivamente, riformulato per generiche partizioni con  $|\pi_n| \rightarrow 0$ .

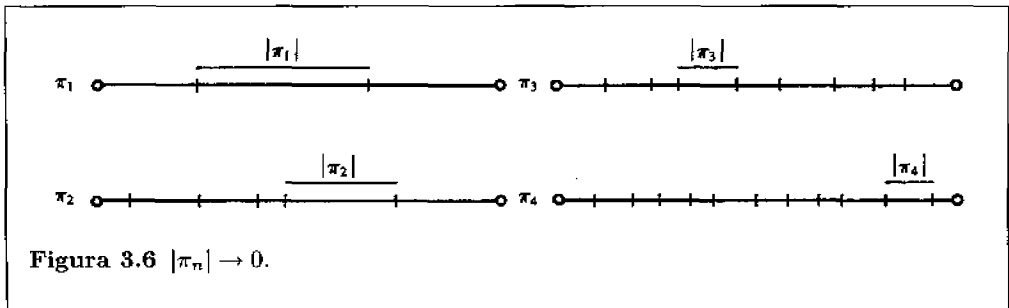


Figura 3.6  $|\pi_n| \rightarrow 0$ .

**TEOREMA 3.3** Sia  $f$  una funzione limitata su  $[a, b]$ ; si indichino con  $s_n$  e  $S_n$ , rispettivamente, le somme inferiore e superiore relative a una partizione di  $[a, b]$  in  $n$  intervalli di egual lunghezza. La funzione  $f$  è integrabile se e solo se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - s_n) = 0 \quad (3.10)$$

e in tal caso le successioni  $S_n$  e  $s_n$  convergono entrambe allo stesso limite che è:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

La stessa conclusione vale se  $\pi_n$  sono delle partizioni arbitrarie di  $[a, b]$  con  $|\pi_n| \rightarrow 0$ : denotando con  $s_n$  e  $S_n$  nuovamente le somme inferiore e superiore la (3.10) è condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità di  $f$  e si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (3.11)$$

**DIMOSTRAZIONE (Parziale)** Supponiamo che la condizione (3.10) sia soddisfatta. Abbiamo già osservato che ciascuna somma inferiore è minore o uguale a ciascuna somma superiore; dunque, in base alla Proposizione 1.35 pag. 51, le due successioni  $s_n$  e  $S_n$  convergono entrambe (allo stesso limite).

Dato  $\varepsilon > 0$  sia  $k$  un indice tale che  $S_k - s_k < \varepsilon$ . Siccome per definizione  $I'' \leq S_k$  e  $s_k \leq I'$ , combinando queste disuguaglianze abbiamo

$$I'' \leq S_k < s_k + \varepsilon \leq I' + \varepsilon, \quad (3.12)$$

da cui  $I'' \leq I' + \varepsilon$  per ogni  $\varepsilon > 0$ , cioè  $I'' \leq I'$ . Dalla (3.9) segue allora  $I' = I''$ , cioè l'integrabilità di  $f$ .  $\square$

La parte del teorema ora dimostrata consentirà di ottenere facilmente la integrabilità di alcune classi di funzioni. L'implicazione inversa è meno importante per cui ne omettiamo la dimostrazione (che non è altrettanto semplice ed è tratteggiata nell'Esercizio 3.1.12).

Si osservi che se  $f$  è integrabile in  $[a, b]$  e se si considera una partizione  $x_i, i = 0, 1, \dots, n$ , in  $n$  intervalli uguali e  $\xi_i$  è un punto dell'intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$ , si avrà  $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ , con il solito significato dei simboli  $m_i, M_i$ ; dunque

$$s_n \leq \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \leq S_n,$$

da cui, per il teorema precedente,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i). \quad (3.13)$$

In particolare, si potrà prendere  $\xi_i = x_{i-1}$  oppure  $\xi_i = x_i$ ; poiché  $m_i \leq [f(x_{i-1}) + f(x_i)]/2 \leq M_i$ , si avrà anche

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \left[ \frac{f(a)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(b)}{2} \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

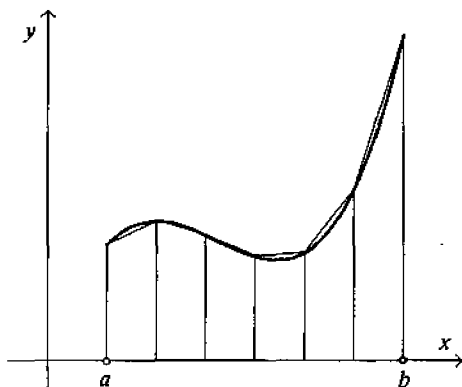


Figura 3.7 Formula dei trapezi.

La formula (3.14) approssima l'integrale con le somme delle aree dei trapezi rettangoli di vertici  $(x_{i-1}, 0)$ ,  $(x_i, 0)$ ,  $(x_i, f(x_i))$ ,  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  e fornisce una prima *formula di quadratura* (detta *formula dei trapezi*) per il calcolo approssimato degli integrali (Figura 3.7).

L'uso del simbolo

$$\int_a^b f(x) dx, \quad (3.15)$$

deformazione di una  $S$  usata ai tempi di Leibniz per denotare la somma, si deve al fatto che l'integrale si può vedere come limite della somma finita (3.13). La lettera  $x$  che figura nel simbolo (3.15) non svolge alcun ruolo nella definizione di integrale e può essere sostituita, a piacimento, con un qualunque altro simbolo (come per le sommatorie), cioè  $\int_a^b f(x) dx$  può scriversi  $\int_a^b f(t) dt$  o  $\int_a^b f(u) du$  ecc. Il simbolo  $dx$  appare per ora del tutto superfluo: si vedrà in seguito che risulterà utile, come artificio di calcolo, nella determinazione effettiva degli integrali. L'uso di questa notazione, che può sembrare il "limite" della lunghezza finita  $\Delta x$  degli intervalli della scomposizione, non deve però indurre a una sorta di abitudine mistica di considerare  $dx$  come "infinitamente piccolo" o "quantità infinitesima" o di ritenere che l'integrale è "una somma infinita di grandezze infinitesime". Queste espressioni sono del tutto prive di significato e vanno evitate; il simbolo  $dx$  separato dall'integrale non ha per il momento alcun senso.

## ALCUNE FUNZIONI INTEGRABILI

Premettiamo ora due definizioni, l'una scontata e analoga alla definizione di successione monotona, l'altra meno ovvia.

**DEFINIZIONE 3.4** Una funzione  $f(x)$  definita su un intervallo  $I$  (eventualmente illimitato) si dice *crescente in  $I$*  se per ogni coppia  $x, x'$  in  $I$  con  $x < x'$  si ha  $f(x) \leq f(x')$ ; se invece  $f(x) \geq f(x')$ , sempre per ogni coppia  $x, x'$  in  $I$  con  $x < x'$ , allora  $f$  si dice *decescente in  $I$* . Se, poi, si hanno le disequaglianze strette  $f(x) < f(x')$  o  $f(x) > f(x')$  la  $f$  si dice *strettamente crescente* o *strettamente decrescente in  $I$* .

Una *funzione monotona* in  $I$  è una funzione che è crescente oppure decrescente in  $I$ .

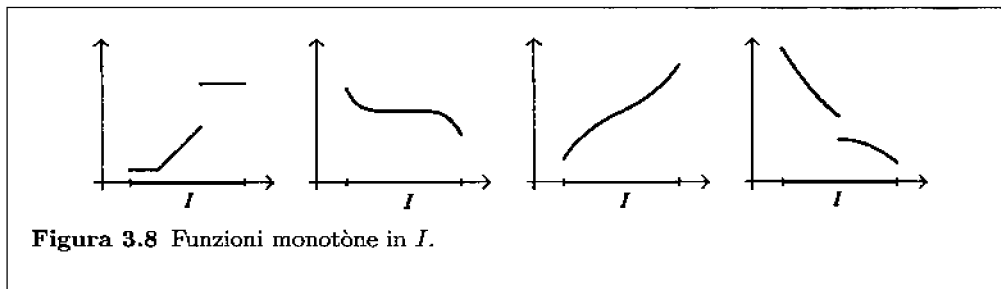


Figura 3.8 Funzioni monotone in  $I$ .

Per esempio la funzione  $f(x) = x^p$  se  $p > 0$  è strettamente crescente su  $I = [0, +\infty)$  perché  $0 \leq x < x'$  implica  $x^p < x'^p$ , mentre è strettamente decrescente se  $p < 0$  in  $I = (0, +\infty)$ . La funzione  $f(x) = x^2$  non è monotona in  $I = [-1, 1]$  ma lo è separatamente negli intervalli  $[-1, 0]$ ,  $[0, 1]$ .

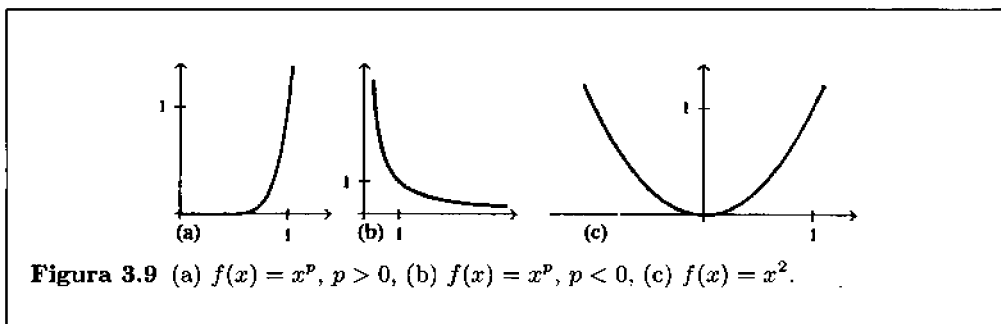


Figura 3.9 (a)  $f(x) = x^p$ ,  $p > 0$ , (b)  $f(x) = x^p$ ,  $p < 0$ , (c)  $f(x) = x^2$ .

**DEFINIZIONE 3.5** Una funzione  $f(x)$  si dice *lipschitziana* in un intervallo  $I$  se esiste un numero  $K > 0$  tale che, per ogni coppia di punti  $x, x'$  di  $I$ , si abbia

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|, \quad (3.16)$$

ogni numero  $K$ , per cui valga la (3.16), si dice costante di Lipschitz di  $f$  in  $I$ . La condizione (3.16) si può interpretare geometricamente nel modo seguente. Se per ogni punto  $(x', f(x'))$  del grafico di  $f$  si considerano le due rette che passano per questo punto e hanno coefficiente angolare  $K$  e  $-K$  allora il grafico di  $f$  è interamente “racchiuso” fra di esse (Figura 3.10). Infatti, tali rette hanno equazione  $y = f(x') + K(x - x')$  e  $y = f(x') - K(x - x')$ .

Per esempio, la funzione  $f(x) = x^2$  è lipschitziana su  $[0, 3]$  in quanto  $|x^2 - x'^2| = |x + x'| \cdot |x - x'| \leq 6|x - x'|$  se  $x, x' \in [0, 3]$  e quindi la costante di Lipschitz è 6.

Invece la funzione  $f(x) = \sqrt{x}$  non è lipschitziana su  $[0, 1]$ ; infatti, se così fosse, scegliendo  $x' = 0$ , si dovrebbe avere

$$\sqrt{x} = |\sqrt{x} - \sqrt{0}| \leq K|x - 0| = Kx \quad \text{per ogni } x \in [0, 1];$$

ma la disuguaglianza si può scrivere  $\sqrt{x} \geq \frac{1}{K}$  e quindi non può essere soddisfatta, con la medesima costante  $K$ , da ogni  $x$  di  $[0, 1]$ .



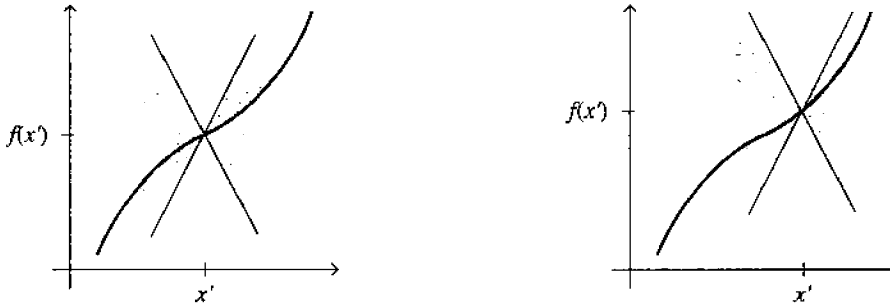


Figura 3.10 Interpretazione geometrica della lipschitzianità.

È chiaro che ogni funzione lipschitziana su un intervallo limitato  $I = [a, b]$  è *limitata*. Si vedranno in seguito alcuni comodi criteri per decidere se una data funzione è monotona o se è lipschitziana.

**TEOREMA 3.6** Le funzioni monotone e limitate in  $[a, b]$  e le funzioni lipschitziane in  $[a, b]$  sono ivi integrabili.

**DIMOSTRAZIONE** Si supponga che  $f$  sia limitata e monotona in  $[a, b]$ , per esempio crescente, e si consideri una partizione  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  in  $n$  intervalli di egual lunghezza; indicando, come di consueto, con  $m_i$  e  $M_i$  l'estremo inferiore e l'estremo superiore di  $f$  nell'intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$  si ha

$$m_i = f(x_{i-1}), \quad M_i = f(x_i).$$

Dunque, se  $s_n$  e  $S_n$  denotano le corrispondenti somme inferiore e superiore,

$$\begin{aligned} S_n - s_n &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - f(x_{i-1})] = \\ &= \frac{b-a}{n} [f(x_n) - f(x_0)] = \frac{b-a}{n} [f(b) - f(a)], \end{aligned}$$

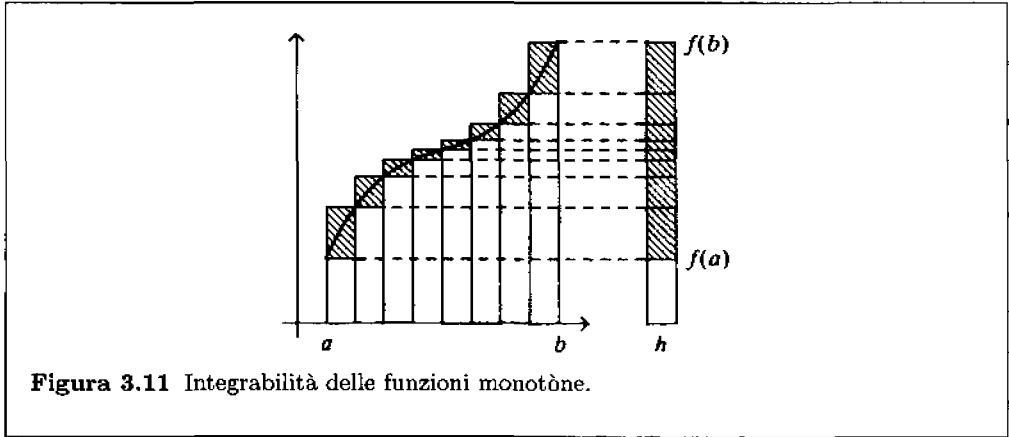
pertanto  $\lim(S_n - s_n) = 0$  e per il Teorema 3.3 (parte dimostrata!) la funzione  $f$  è integrabile. La Figura 3.11 mostra una evidente interpretazione geometrica del calcolo ora eseguito: la differenza fra l'area di un plurirettangolo circoscritto al trapezoide definito da  $f$  e quella del plurirettangolo inscritto è pari all'area di un rettangolo di base  $(b-a)/n$  e altezza  $f(b) - f(a)$ .

Si supponga ora che  $f$  sia lipschitziana in  $[a, b]$ , cioè

$$|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'| \quad \text{per ogni } x, x' \text{ in } [a, b], \quad (3.17)$$

e iniziamo osservando che, per ogni intervallo  $I$  contenuto in  $[a, b]$ , indicando con  $M_I$  e  $m_I$  l'estremo superiore e l'estremo inferiore di  $f$  in  $I$ , si ha

$$M_I - m_I \leq Kl(I) \quad (3.18)$$



**Figura 3.11** Integrabilità delle funzioni monotone.

ove  $l(I)$  indica la lunghezza dell'intervallo  $I$ . Infatti, in base alle definizioni di estremo superiore e di estremo inferiore, dato  $\varepsilon > 0$ , esistono due punti  $x_1, x_2$  di  $I$  tali che

$$f(x_1) > M_I - \varepsilon, \quad f(x_2) < m_I + \varepsilon$$

e quindi

$$\begin{aligned} M_I - m_I &< f(x_1) + \varepsilon - f(x_2) + \varepsilon \leq |f(x_1) - f(x_2)| + 2\varepsilon \leq \\ &\leq K|x_1 - x_2| + 2\varepsilon \leq Kl(I) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Siccome il primo membro di questa disuguaglianza non dipende da  $\varepsilon$  se ne deduce la (3.18). L'integrabilità di  $f$  segue facilmente da questa maggiorazione; infatti scomponendo  $[a, b]$  in  $n$  intervalli uguali e con il significato abituale dei simboli  $S_n, s_n, M_i, m_i$ , si può scrivere

$$\begin{aligned} S_n - s_n &= \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \leq \frac{b-a}{n} K \sum_{i=1}^n l([x_{i-1}, x_i]) = \\ &= \frac{(b-a)^2}{n} K, \end{aligned}$$

quindi  $\lim(S_n - s_n) = 0$ . □

La seguente proposizione consente di ottenere l'integrabilità della più importante classe di funzioni finora incontrata: le funzioni analitiche.

**PROPOSIZIONE 3.7** Se  $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  è una funzione analitica per  $|x - x_0| < R$ , allora  $f(x)$  è lipschitziana e quindi integrabile in ogni intervallo chiuso  $[a, b]$  contenuto in  $(x_0 - R, x_0 + R)$ .

**DIMOSTRAZIONE** Si supponga, per semplicità,  $x_0 = 0$ , sia  $c$  un qualunque numero minore di  $R$  e siano  $x, y$  due punti di  $[-c, c]$ : allora

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| \sum_0^{\infty} a_n (x^n - y^n) \right| \leq \\ &\leq |x - y| \sum_1^{\infty} |a_n| |x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}| \leq \\ &\leq |x - y| \sum_1^{\infty} |a_n| nc^{n-1}. \end{aligned}$$

Siccome la serie  $\sum na_n x^{n-1}$  ha raggio di convergenza  $R$  (Esempio 2.4(d), pag. 63) si ha che  $\sum |a_n| nc^{n-1}$  converge e quindi la (3.16) è soddisfatta con  $K = \sum |a_n| nc^{n-1}$ .  $\square$

Si osservi che il valore della costante  $K$  può dipendere dal numero  $c < R$  e che non si può, in generale, assicurare la lipschitzianità (né l'integrabilità) di  $f$  sull'intero intervallo  $[-R, R]$  (come ben sappiamo,  $f$  può essere illimitata su  $[-R, R]$ ).

Tutte le funzioni esprimibili come serie di potenze sono integrabili, così come le funzioni monotone e limitate ... può, a buona ragione, venire il sospetto che tutte le funzioni limitate siano integrabili. Non è così, come mostra il seguente famoso, seppur patologico, esempio.

**ESEMPIO 3.8 (Funzione di Dirichlet)** Si consideri la funzione definita in  $[0, 1]$  ponendo  $f(x) = 0$  se  $x$  è irrazionale,  $f(x) = 1$  se  $x$  è razionale. Per questa funzione su  $[0, 1]$  si ha che l'integrale inferiore  $I'$  è nullo, mentre  $I'' = 1$ ; infatti ogni sottointervallo di  $[0, 1]$  contiene sia numeri razionali sia numeri irrazionali e dunque  $m_i = 0$ ,  $M_i = 1$ . Ne segue che, qualunque sia la partizione, le somme inferiori valgono  $s = 0$  mentre quelle superiori valgono  $S = 1$ . Si ha dunque  $I' < I''$  e  $f$  non è integrabile.

## PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE

I teoremi precedenti se da una parte garantiscono che la classe delle funzioni integrabili è piuttosto vasta, dall'altra non sono di alcun aiuto per il calcolo esplicito dell'integrale. Di basilare importanza sarà, a questo scopo, il legame strettissimo che connette l'integrale all'altra fondamentale operazione del calcolo infinitesimale: la derivazione.

Prima di esporre questo legame studiamo alcune elementari proprietà algebriche dell'integrale, avvertendo il lettore che la loro dimostrazione, pur non essendo difficile, potrà rivelarsi tediosa e potrà quindi essere omessa in prima istanza.

Anzitutto si osservi che la definizione di integrale è del tutto lecita anche per funzioni  $f$  che cambiano segno (mentre è essenziale che  $f$  sia limitata); tuttavia, occorrerà precisare in tale caso l'interpretazione dell'integrale come area del trapezoide individuato da  $f$ , in quanto le zone in cui  $f < 0$  danno un contributo negativo all'area totale. L'integrale sarà dunque la somma dei termini positivi e negativi corrispondenti rispettivamente alle porzioni del grafico di  $f(x)$  che stanno sopra o sotto l'asse delle ascisse (Figura 3.12).

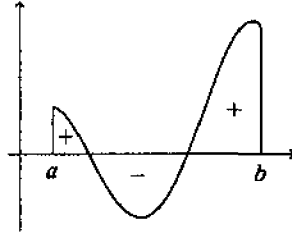


Figura 3.12

Si osservi ancora che è possibile estendere la definizione di integrale fra  $a$  e  $b$  anche quando  $a \geq b$ . Si pone in tal caso

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx. \quad (3.19)$$

Dimostriamo ora le principali proprietà elementari.

**PROPOSIZIONE 3.9** (*Linearità*) Se  $f, g$  sono due funzioni integrabili su  $[a, b]$  allora le funzioni  $f + g, Cf$  (ove  $C$  è una costante) sono funzioni integrabili e si ha

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (3.20)$$

$$\int_a^b Cf(x)dx = C \int_a^b f(x)dx. \quad (3.21)$$

**DIMOSTRAZIONE** Dette  $s_n, s'_n, \bar{s}_n$  le somme inferiori delle funzioni  $f, g, f + g$  relative a una partizione in  $n$  intervalli uguali e  $S_n, S'_n, \bar{S}_n$  le relative somme superiori si ha

$$s_n + s'_n \leq \bar{s}_n \leq \bar{S}_n \leq S_n + S'_n \quad (3.22)$$

(si ricordi che  $\inf f + \inf g \leq \inf(f + g)$  e che  $\sup(f + g) \leq \sup f + \sup g$ ). Dalla (3.22) e dal Teorema 3.3 segue subito la (3.20). La (3.21) si dimostra in modo simile.  $\square$

**PROPOSIZIONE 3.10** Se  $f$  è integrabile su  $[a, b]$  e  $a \leq c < d \leq b$  allora  $f$  è integrabile su  $[c, d]$ .

**DIMOSTRAZIONE** Siano  $\pi_n$  partizioni di  $[c, d]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , con  $|\pi_n| \rightarrow 0$  e siano  $S_n, s_n$  le corrispondenti somme di  $f$  in  $[c, d]$ . Estendiamo tali partizioni a tutto  $[a, b]$ , per esempio considerando la partizione  $\pi'_n$  che ha gli stessi punti di  $\pi_n$  e suddivide i restanti intervalli  $[a, c], [d, b]$  ciascuno in  $n$  sottointervalli uguali. Si avrà, ovviamente,  $|\pi'_n| \rightarrow 0$  e dunque, per il Teorema 3.3, le somme superiore e inferiori  $S'_n$  e  $s'_n$  corrispondenti a tali partizioni sono tali che  $\lim(S'_n - s'_n) = 0$ ; ma  $S_n - s_n \leq S'_n - s'_n$  perché ogni termine non negativo del tipo  $(M_i - m_i)(x_i - x_{i-1})$  che figura in  $S_n - s_n$  compare anche in  $S'_n - s'_n$ . Dunque, avremo  $\lim(S_n - s_n) = 0$  e una nuova applicazione dello stesso teorema fornisce la tesi.  $\square$

**PROPOSIZIONE 3.11** (*Additività*) Se  $f$  è integrabile su  $[a, c]$  e su  $[c, b]$  allora è integrabile anche su  $[a, b]$  e si ha

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \quad (3.23)$$

**DIMOSTRAZIONE** Si consideri dapprima il caso  $a < c < b$  e si utilizzi nuovamente il Teorema 3.3. Si prendano partizioni  $\pi_n$  di  $[a, b]$  con  $|\pi_n| \rightarrow 0$  e che contengano, per ciascun  $n$ , il punto  $c$ . Ciascuna di esse induce una partizione  $\pi'_n$  su  $[a, c]$  e una partizione  $\pi''_n$  su  $[c, b]$  e risulta  $|\pi'_n| \rightarrow 0, |\pi''_n| \rightarrow 0$ . Ne segue (con ovvio significato dei simboli)

$$s_n = s'_n + s''_n \longrightarrow \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

$$S_n = S'_n + S''_n \longrightarrow \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

dunque le somme  $s_n, S_n$  convergono allo stesso limite, cioè  $f$  è integrabile su  $[a, b]$  e si ha la (3.23).

Se poi  $c$  è esterno ad  $[a, b]$ , per esempio  $a < b < c$ , si userà la Proposizione 3.10 per ottenere la integrabilità su  $[a, b]$ , si userà poi la (3.23) con  $c$  scambiato con  $b$  e dalla (3.19) si ricaverà il risultato.  $\square$

Dagli Esempi 3.1 e dalla Proposizione 3.11 si ricava allora il valore esplicito dell'integrale fra due estremi arbitrari  $a, b$  della funzione  $y = x^2$  e, più in generale, di  $y = x^p$  con  $p$  intero positivo. Infatti

$$\int_a^b x^2 dx = \int_0^b x^2 dx - \int_0^a x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

e anche da (3.4) e (3.5)

$$\int_0^b x^p dx = \int_0^1 x^p dx + \int_1^b x^p dx = \frac{1}{p+1} + \frac{b^{p+1} - 1}{p+1} = \frac{b^{p+1}}{p+1}$$

da cui ancora

$$\int_a^b x^p dx = \frac{b^{p+1} - a^{p+1}}{p+1}. \quad (3.24)$$

**PROPOSIZIONE 3.12** (*Monotonia*) Siano  $f$  e  $g$  integrabili su  $[a, b]$  (con  $a < b$ ). Allora

- (a) se  $f(x) \leq g(x)$  per ogni  $x$  di  $[a, b]$  allora  $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ ,
- (b)  $|f(x)|$  è integrabile in  $[a, b]$  e si ha

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx, \quad (3.25)$$

- (c) se  $m \leq f(x) \leq M$  allora  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ .

**DIMOSTRAZIONE** (a) Se  $\pi_n$  sono partizioni di  $[a, b]$  con  $|\pi_n| \rightarrow 0$  e per ciascuna di esse si considerano le somme inferiori  $s_n, s'_n$ , rispettivamente di  $f$  e di  $g$ , si avrà  $s_n \leq s'_n$ , da cui la corrispondente disuguaglianza per gli integrali che sono i limiti di  $s_n$  e di  $s'_n$  (Teorema 3.3).

(b) Proviamo ora l'integrabilità di  $|f|$ . Se  $m_i, M_i$  sono gli estremi inferiore e superiore di  $f$  in  $[x_{i-1}, x_i]$  e  $m'_i, M'_i$  sono quelli di  $|f|$  si vede facilmente che  $M'_i - m'_i \leq M_i - m_i$  (basta considerare separatamente i tre casi in cui  $m_i, M_i$  sono entrambi positivi, entrambi negativi o di segno opposto). Da questa disuguaglianza segue che per ogni partizione si ha  $S' - s' \leq S - s$  e quindi, ancora per il Teorema 3.3, si ricava l'integrabilità di  $|f|$ . Per dimostrare la disuguaglianza (3.25) osserviamo invece che  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  e dunque dalla parte (a)

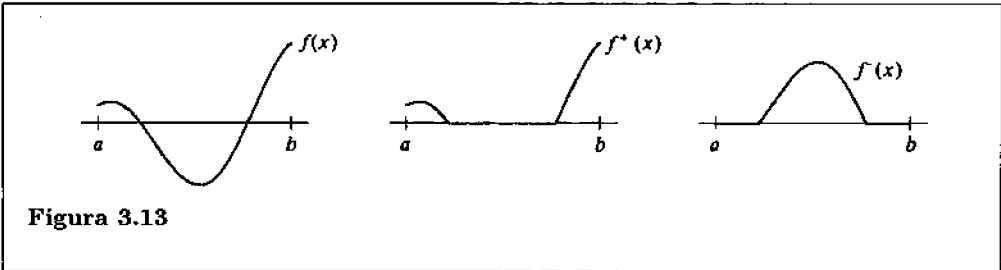
$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx,$$

che equivale alla (3.25).

(c) Su ogni sottointervallo si ha  $m \leq m_i \leq M_i \leq M$  e dunque per ogni somma inferiore  $s$  e superiore  $S$  si ha  $m(b-a) \leq s \leq S \leq M(b-a)$ . □

**ESERCIZI**

- 3.1.1 Sia  $f(x) = x$  su  $[0,1]$ . Dividendo  $[0,1]$  in  $n$  intervalli uguali si provi che le somme inferiori  $s_n$  e superiori  $S_n$  tendono entrambe a  $1/2$  e quindi  $f$  è integrabile su  $[0,1]$  con integrale uguale a  $1/2$ .
- 3.1.2 Verificare che le funzioni  $f(t) = c, g(t) = v_0 + gt$  ( $c, v_0, g$  sono costanti) sono integrabili su ogni intervallo  $a \leq t \leq b$  e calcolarne gli integrali.
- 3.1.3 Verificare che le condizioni 1, 2, 3, 4 di pagina 86 consentono di attribuire, in modo univoco, a ogni poligono piano la sua area (quella assegnata dalla geometria elementare).
- 3.1.4 Estendere il risultato dell'Esempio 3.1 (b) al caso in cui  $p$  è un intero negativo diverso da  $-1$  e anche al caso in cui  $p$  è razionale,  $p = r/s \neq -1$ . [Nel primo caso porre  $p = -q$ , nel secondo porre  $h = a^s$ .]
- 3.1.5 È vero che se  $|f|$  è integrabile allora  $f$  è integrabile?
- 3.1.6 Siano  $f^+(x) = \max(f(x), 0), f^-(x) = -\min(f(x), 0)$  le parti positive e negative di una funzione integrabile  $f$ . Si provi che  $f^+$  e  $f^-$  sono funzioni integrabili.



**Figura 3.13**

- 3.1.7 Si dimostri che il prodotto di due funzioni  $f, g$  integrabili è integrabile. [Si provi il risultato per funzioni non negative e poi si scriva  $fg$  come  $(f^+ - f^-)(g^+ - g^-) = f^+g^+ - f^+g^- - f^-g^+ + f^-g^-$ ].

**3.1.8** Se  $f, g$  sono funzioni integrabili in  $[a, b]$  con  $m \leq f(x) \leq M$  e  $g(x) \geq 0$ , si provi che

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Si verifichi anche che l'ipotesi  $g \geq 0$  è necessaria.

**3.1.9** Sia  $f$  limitata in  $[a, b]$  con  $|f(x)| \leq K$ . Se  $\pi$  è una partizione di  $[a, b]$  e  $\pi'$  è un'altra partizione ottenuta aggiungendo a  $\pi$  un solo punto, si provi che per le somme superiori  $S, S'$  e per quelle inferiori  $s, s'$ , relative alle partizioni  $\pi, \pi'$ , valgono le relazioni

$$s' - s \leq 2K|\pi|, \quad S - S' \leq 2K|\pi|.$$

**3.1.10** Si estenda il risultato dell'esercizio precedente al caso in cui  $\pi'$  è ottenuta aggiungendo  $N$  punti a  $\pi$ , con al più uno solo di questi in ciascun intervallo di  $\pi$ , provando che

$$s' - s \leq 2NK|\pi|, \quad S - S' \leq 2NK|\pi|.$$

**3.1.11** Sia  $f$  integrabile su  $[a, b]$ , con  $|f(x)| \leq K$ . Fissato  $\varepsilon > 0$ , sia  $\pi$  una partizione di  $[a, b]$  con  $N$  punti, tale che la differenza  $S - s$  tra la rispettiva somma superiore e quella inferiore non superi  $\varepsilon$ . Detta  $h$  la lunghezza del *minimo* intervallo di  $\pi$ , si considerino per ogni  $n \in \mathbf{N}$  delle partizioni  $\pi_n$  tali che  $|\pi_n| \leq h$  e  $|\pi_n| \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Indicata con  $\pi'_n$  la partizione ottenuta aggiungendo a  $\pi_n$  i punti di  $\pi$ , si provi che, per le somme superiori  $S_n, S'_n$  e per quelle inferiori  $s_n, s'_n$  relative alle partizioni  $\pi_n, \pi'_n$ , valgono le relazioni

$$s'_n - s_n \leq 2NK|\pi_n|, \quad S_n - S'_n \leq 2NK|\pi_n|.$$

**3.1.12** Dedurre dall'esercizio precedente che una funzione limitata  $f$  è integrabile su  $[a, b]$  se e solo se esiste una successione  $\{\pi_n\}$  di partizioni di  $[a, b]$  tale che  $|\pi_n| \rightarrow 0$  e  $S_n - s_n \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

**3.1.13** Sia  $0 < a < b$ ; la funzione  $f(x) = 1/x^2$  è monotona su  $[a, b]$ , dunque è integrabile. Per ogni partizione  $(x_0, x_1, \dots, x_n)$  di  $[a, b]$  si considerino i punti intermedi  $\xi_i = \sqrt{x_i x_{i-1}}$  e si calcoli l'integrale di  $f$  come  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^n (x_i - x_{i-1}) f(\xi_i)$ .

**3.1.14** Si ripeta l'Esercizio 3.1.13 con la funzione  $f(x) = 1/\sqrt{x}$  e i punti intermedi  $\xi_i = [(\sqrt{x_i} + \sqrt{x_{i-1}})/2]^2$ .

**3.1.15** Usando le proprietà di simmetria delle funzioni integrande, dedurre il valore dei seguenti integrali:

$$\int_{-1}^1 x^3 dx, \quad \int_{-1}^1 x \cos x dx, \\ \int_{\pi}^{3\pi} (1 + \operatorname{sen} x) dx, \quad \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x} dx.$$

**3.1.16** La funzione  $f(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$ ,  $-a \leq x \leq a$ , rappresenta una semicirconferenza di centro nell'origine e raggio  $a$ . Essa è integrabile in  $[-a, a]$  (è monotona nei sottointervalli  $[-a, 0], [0, a]$ ); sapendo che l'area del semicerchio è  $\pi a^2/2$  come si può usufruire della formula (3.21) per calcolare l'area di una semiellisse di semiassi  $a$  e  $b$ ?

### 3.2 Definizione e prime proprietà della derivata

Si supponga di avere una funzione  $f(x)$  e di voler determinare l'equazione della retta tangente al suo grafico in un punto  $P$  di coordinate  $(x_0, f(x_0))$ . Sarà naturale prendere un altro punto  $Q$  del grafico corrispondente a un punto di ascissa diversa da  $x_0$ , diciamo  $x_0 + h$ , e tracciare per intanto la "secante"  $PQ$  (Figura 3.14).

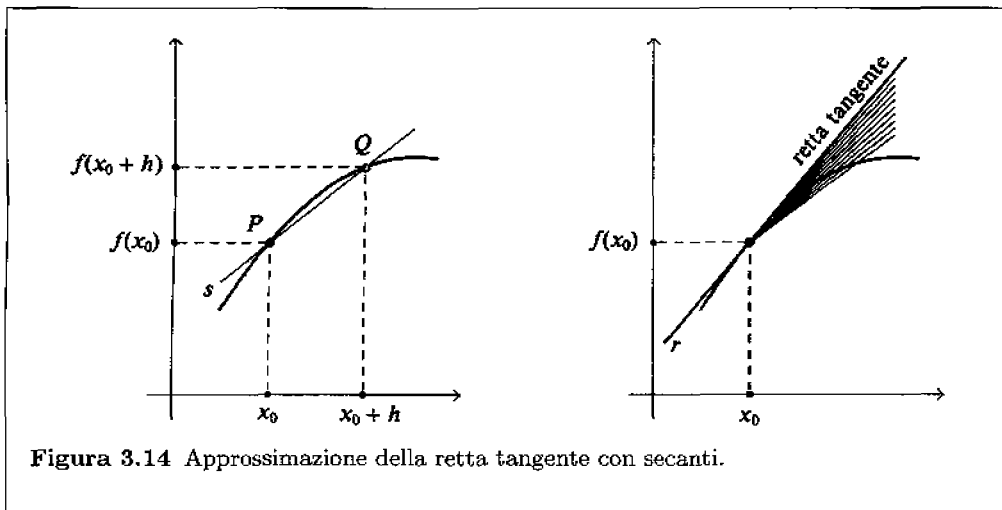


Figura 3.14 Approssimazione della retta tangente con secanti.

La retta per i punti  $P$  e  $Q$  ha equazione

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0),$$

come si verifica facilmente; il coefficiente angolare di questa retta dipende da  $h$  e si chiama *rapporto incrementale* della funzione  $f$  nel punto  $x_0$ : esso si indica con  $R(h)$  o  $R_f(h)$  o ancora  $R_f(x_0, h)$ :

$$R(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0.$$

Se ora si considerano valori di  $h$  sempre più prossimi a zero, intuitivamente ci si aspetta che il punto  $Q$  si avvicini a  $P$  e che la retta  $s$  venga ad assumere una "posizione limite"  $r$  che ragionevolmente si potrà chiamare retta tangente in  $P$  al grafico della funzione  $f(x)$ . Tale retta, passando per il punto  $(x_0, f(x_0))$ , avrà equazione del tipo

$$y = f(x_0) + \alpha(x - x_0)$$

ove  $\alpha$  è il suo coefficiente angolare. Nella Figura 3.14 si è preso  $h > 0$ , ma ovviamente si possono considerare anche incrementi  $h$  negativi, il che corrisponde a prendere il punto  $Q$  dalla parte opposta; anzi sarà opportuno convincersi che quanto segue si applica a entrambi i casi.

Euristicamente il numero  $\alpha$  sarà il "limite" dei coefficienti angolari  $R(h)$  delle rette approssimanti, al "tendere" di  $h$  a zero; ma il significato preciso di questa affermazione



è ancora tutto da chiarire. Tale numero  $\alpha$  viene indicato con  $f'(x_0)$  e viene detto *derivata* della funzione  $f(x)$  nel punto  $x_0$ : si scriverà anche

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} R(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h};$$

ne daremo una definizione precisa tra breve.

Il lettore conosce certamente il caso in cui  $f(t)$  indica la distanza dall'origine, al tempo  $t$ , di un corpo che si muove su una retta. Il rapporto incrementale

$$v_m(h) = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}$$

indica allora la velocità media del corpo fra gli istanti  $t_0$  e  $t_0 + h$ . Facendo tendere  $h$  a zero (il che corrisponde a calcolare la velocità media su intervalli di tempo sempre più brevi) la velocità media "tende" alla velocità istantanea al tempo  $t_0$ :

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} v_m(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = f'(t_0).$$

Vale la pena di notare che nella espressione della velocità media i valori  $h < 0$  sono altrettanto possibili e naturali dei valori  $h > 0$ .

La stessa situazione si riproduce in contesti ben diversi: in economia, per esempio, occorre sovente analizzare l'andamento del costo  $C(q)$  di produzione di una merce al variare della quantità  $q$  della merce prodotta. L'interesse fondamentale è nel valutare la rapidità con cui varia  $C$  al variare di  $q$ . Si definisce *costo marginale medio* fra  $q_0$  e  $q_0 + h$  la grandezza

$$c_m(h) = \frac{C(q_0 + h) - C(q_0)}{h}$$

e al tendere di  $h$  a zero si ottiene il *costo marginale*  $c(q_0)$ :

$$c(q_0) = \lim_{h \rightarrow 0} c_m(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{C(q_0 + h) - C(q_0)}{h} = C'(q_0).$$

Si potrebbero aggiungere molti altri esempi dello stesso tipo riguardanti le più disparate discipline.

## FUNZIONI INFINITESIME

Prima di dare la definizione formale di derivata e di addentrarci nello studio delle ricche proprietà delle funzioni derivabili, conviene mettere a punto qualche semplice strumento tecnico. Uno di questi consiste nell'uso delle funzioni infinitesime, nozione per certi versi analoga a quella di successione infinitesima.

**DEFINIZIONE 3.13** Una funzione  $\omega(h)$  si dice *infinitesima* con  $h$  se per ogni numero positivo  $\varepsilon$  esiste  $\delta_\varepsilon > 0$  in modo che

$$\text{se } 0 < |h| < \delta_\varepsilon \quad \text{allora} \quad |\omega(h)| < \varepsilon. \quad (3.26)$$

La definizione richiede dunque che la funzione  $\omega$  divenga arbitrariamente "piccola", in valore assoluto, per "piccoli" valori della variabile  $h$ , concetto che viene espresso in forma matematicamente precisa dalla (3.26). Comunque stretta si prenda una striscia  $V$  centrata sull'asse  $x$ , vi è una striscia  $W$  centrata sull'asse  $y$  in modo che la parte di grafico di  $\omega$  contenuta in  $W$  sia contenuta anche in  $V$  (Figura 3.15).

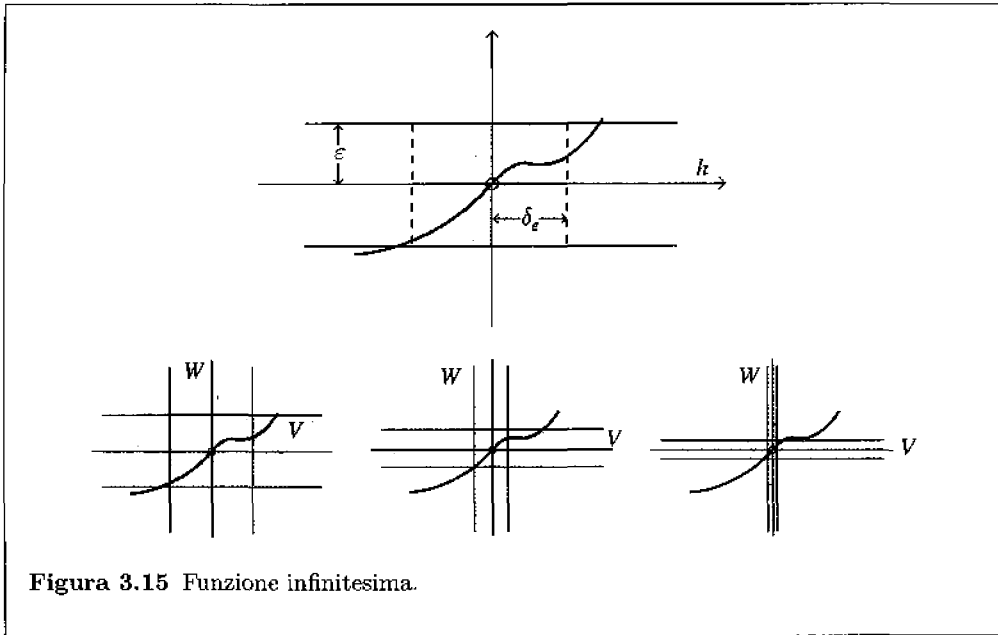


Figura 3.15 Funzione infinitesima.

**ESEMPI 3.14 (a)**  $\omega(h) = h^2$  è infinitesima con  $h$  perché per ogni  $\varepsilon > 0$  se  $|h| < \sqrt{\varepsilon}$  si ha  $|\omega(h)| < \varepsilon$ ; dunque in questo caso  $\delta_\varepsilon = \sqrt{\varepsilon}$ . Per esempio, se  $\varepsilon = 1/10\,000$  si avrà che  $\omega(h) = h^2 < 1/10\,000$  pur di prendere  $|h|$  minore di  $1/100$ ; preso invece  $\varepsilon = 1/1\,000\,000$  occorrerà assumere  $|h|$  minore di  $1/1000$  per avere  $\omega(h) < \varepsilon$ , ... è chiaro che il numero  $\delta_\varepsilon$  dipende da  $\varepsilon$ : più piccolo si prende  $\varepsilon$ , più piccolo occorrerà assumere  $\delta_\varepsilon$ .

(b) In generale  $\omega(h) = h^p$ , ove  $p$  è un intero positivo, è infinitesimo con  $h$  in quanto se  $|h| < \varepsilon^{1/p}$  si ha  $|\omega(h)| < \varepsilon$ ; cambiando la variabile si potrà dire che  $\omega(x - x_0) = (x - x_0)^p$  è infinitesimo con  $x - x_0$ . Se  $p < 0$  invece  $(x - x_0)^p$  non è infinitesimo con  $x - x_0$ ; per esempio se  $x_0 = 1$ ,  $p = -2$  la funzione  $f(x) = 1/(x - 1)^2$  non è infinitesima con  $x - 1$  perché preso  $\varepsilon = 1$  (per fissare un valore) per ogni  $x$  con  $0 < |x - 1| < 1/2$  si ha  $f(x) > 4 > \varepsilon$  e dunque non vi può essere alcun  $\delta_\varepsilon$  che verifica la condizione (3.26). In questo caso in effetti la funzione diviene arbitrariamente "grande" per "piccoli valori" di  $x - x_0$ .

Come si vede dalla definizione, una funzione infinitesima può non essere definita<sup>(1)</sup> per  $h = 0$ ; in questo caso si conviene di porre  $\omega(0) = 0$ . Con questa convenzione la definizione può essere espressa in forma più concisa:  $\omega(h)$  è una funzione infinitesima con  $h$ , o più semplicemente è un *infinitesimo*, se per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha

$$|\omega(h)| < \varepsilon \text{ in un (opportuno) intorno (completo) di } 0. \quad (3.27)$$

<sup>(1)</sup> Per esempio  $\omega(h) = R(h) - f'(x_0)$  non è definita per  $h = 0$ .

Gli aggettivi “opportuno” e “completo” si riferiscono al fatto che l’ampiezza dell’intorno dipende dal numero  $\varepsilon$  e che tale intorno deve essere bilatero (cioè del tipo  $(-\delta, \delta)$  con  $\delta > 0$ ); questi aggettivi verranno sovente omessi nel seguito.

Si usa anche esprimere il fatto che  $\omega(h)$  è infinitesimo con  $h$  scrivendo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \omega(h) = 0.$$

La nozione di funzione infinitesima non è affatto disgiunta da quella di successione infinitesima; infatti  $\omega(h)$  è infinitesimo con  $h$  se e solo se per *ogni* successione infinitesima  $h_n$  la successione  $\omega(h_n)$  è infinitesima, ma su questa questione torneremo in seguito in un diverso contesto.

Esponiamo ora qualche proprietà degli infinitesimi.

**PROPOSIZIONE 3.15** (a) Se  $\omega(h)$  è un infinitesimo allora  $\omega(h)$  è limitato in un intorno di 0.

(b) Somma e prodotto di infinitesimi sono infinitesimi.

(c) Il prodotto di un infinitesimo per funzioni limitate è infinitesimo.

(d) Se  $\omega(h)$ ,  $\eta(h)$  sono infinitesimi con  $h$  allora la funzione composta  $\eta(\omega(h))$  è infinitesima con  $h$ .

**DIMOSTRAZIONE** Le proprietà (a), (b), (c) sono di dimostrazione ovvia.

Proviamo la (d): fissato  $\varepsilon > 0$  esiste  $\delta_\varepsilon$  tale che  $|\eta(k)| < \varepsilon$  per  $|k| < \delta_\varepsilon$ ; posto  $k = \omega(h)$  esiste allora  $\mu_\varepsilon$  tale che  $|\omega(h)| < \delta_\varepsilon$  se  $|h| < \mu_\varepsilon$ . In conclusione, se  $|h| < \mu_\varepsilon$  allora  $|\eta(\omega(h))| < \varepsilon$ .  $\square$

## LA DERIVATA IN UN PUNTO

Ricordiamo che dato un punto  $x_0$  e una funzione  $f$  definita in un suo intorno, si denota con  $R(h)$  il rapporto incrementale

$$R(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0. \quad (3.28)$$

**DEFINIZIONE 3.16** Si dice che una funzione  $f$  è derivabile in un punto  $x_0$  e che il numero  $f'(x_0)$  è la sua *derivata* in  $x_0$  se la funzione

$$\omega(h) = R(h) - f'(x_0) \quad (3.29)$$

è infinitesima con  $h$ . Si scrive anche

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} R(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e si dice che la derivata è il *limite* del rapporto incrementale al tendere a 0 dell’incremento  $h$ .

La retta di equazione

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (3.30)$$

è per definizione la *retta tangente* al grafico di  $f$  nel punto di coordinate  $(x_0, f(x_0))$ . Il suo coefficiente angolare è proprio la derivata di  $f$  in  $x_0$ , come d'altra parte ci si poteva attendere in base alle considerazioni euristiche iniziali.

La definizione data equivale a richiedere che risulti

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + h\omega(h) \quad (3.31)$$

ove  $\omega(h)$  è un infinitesimo con  $h$  <sup>(2)</sup>. La condizione (3.31) ha un semplice e attraente significato geometrico: l'incremento  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  di una funzione derivabile  $f$  è somma di due termini, uno della forma  $hf'(x_0)$  che varia *linearmente* con  $h$  (rappresentato nella Figura 3.16 dal segmento  $BC$ , cioè dall'incremento della retta tangente in  $P$ ), l'altro della forma  $h \cdot \omega(h)$  (rappresentato dal segmento  $CD$ ), che decresce *più rapidamente* del primo al diminuire di  $|h|$ .

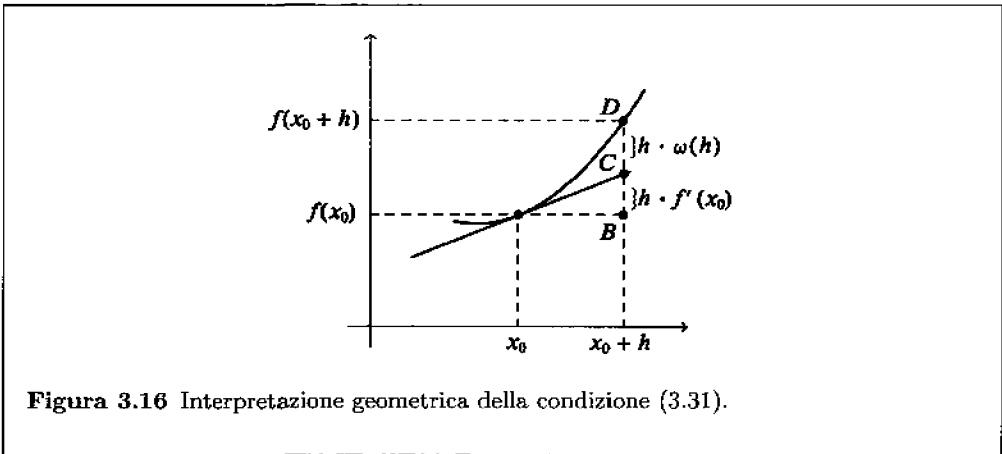


Figura 3.16 Interpretazione geometrica della condizione (3.31).

Se di una funzione  $f$  è nota la derivata in un punto  $x_0$  si potranno, dunque, approssimare i valori assunti da  $f$  "vicino a  $x_0$ " sostituendo all'incremento  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  la quantità  $hf'(x_0)$ , il che corrisponde ad approssimare localmente il grafico di  $f$  con la sua retta tangente.

**OSSERVAZIONE 3.17** È importante osservare che la formula (3.31) *caratterizza* la derivata, nel senso che, se per una certa funzione  $f(x)$  vi è un numero  $\alpha$  tale che per  $|h|$  piccolo a sufficienza

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = h\alpha + h\omega(h),$$

con  $\omega(h)$  infinitesimo, allora  $f$  è derivabile in  $x_0$  e il numero  $\alpha$  è precisamente  $f'(x_0)$ . Infatti da tale relazione segue subito che  $R(h) - \alpha$  è infinitesimo.

Possiamo dunque riassumere affermando che  $f$  è derivabile in  $x_0$  *se e solo se* vale la (3.31). Questo punto sarà piuttosto importante in seguito, soprattutto quando si passerà a studiare funzioni di più variabili.

<sup>(2)</sup>Si noti che la (3.31) deve essere soddisfatta con lo stesso numero  $f'(x_0)$  sia dagli incrementi  $h$  positivi che da quelli negativi (si veda l'Esercizio 3.2.10).

Per esempio, per la funzione

$$f(x) = x^3 - x^2/2$$

nel punto  $x_0 = 1$  si può scrivere

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) - f(x_0) &= (1 + h)^3 - (1 + h)^2/2 - 1/2 = \\ &= 2h + \frac{5}{2}h^2 + h^3 = 2h + h \left[ \frac{5}{2}h + h^2 \right]. \end{aligned}$$

L'incremento della funzione può, dunque, essere scritto come la somma di due addendi, l'uno lineare in  $h$ , l'altro della forma  $h \cdot \omega(h)$  con  $\omega(h)$  infinitesimo. La funzione è perciò derivabile e ha derivata nel punto  $x_0 = 1$  uguale a 2, .

La tabella seguente mostra i valori assunti dall'incremento della funzione e da ciascuno dei due addendi per qualche valore di  $h$ .

$h$	$f(x_0 + h) - f(x_0)$	$2h$	$h \cdot \omega(h)$
0,5	1,75	1	0,75
0,1	0,226	0,2	0,026
0,01	$\sim 0,02025$	0,02	$\sim 0,00025$
0,001	$\sim 0,0020025$	0,002	$\sim 0,0000025$

**OSSERVAZIONE 3.18 (a)** Se una funzione  $f(x)$  è derivabile in un punto  $x_0$  allora in un intorno di  $h = 0$  il rapporto incrementale  $R(h)$ , che è definito per  $h \neq 0$ , è *limitato*. Infatti, se  $R(h) - f'(x_0)$  è infinitesimo, si avrà

$$f'(x_0) - \varepsilon < R(h) < f'(x_0) + \varepsilon \quad \text{per} \quad 0 < |h| < \delta_\varepsilon.$$

**(b)** Esistono funzioni il cui grafico è dotato di "retta tangente" anche in punti in cui  $f$  non è derivabile. Per esempio, la funzione  $x \rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x}$  ha grafico simmetrico di quello di  $x \rightarrow g(x) = x^3$  rispetto alla retta  $y = x$ ; l'asse delle ordinate è intuitivamente la retta tangente al grafico di  $f$  nell'origine, ma  $R(h) = \frac{\sqrt[3]{h}}{h}$  non è limitato in un intorno di 0: dunque  $R(h) - f'(x_0)$  non potrà in alcun modo essere infinitesimo.

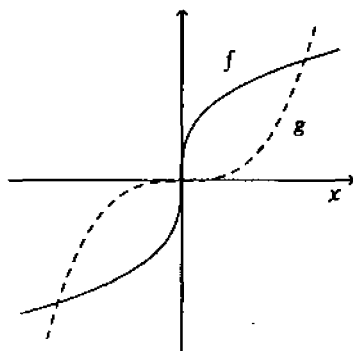


Figura 3.17 Grafico della funzione  $y = \sqrt[3]{x}$ .

(c) Se  $f(x)$  è la somma di una serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  con raggio di convergenza  $R > 0$ , posto  $x_0 = 0$  si ha

$$f(h) - f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n h^n = h a_1 + h \sum_{n=2}^{\infty} a_n h^{n-1};$$

la quantità  $\omega(h) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n h^{n-1}$  è infinitesima con  $h$ , perché si ha

$$|\omega(h)| = \left| h \sum_{n=2}^{\infty} a_n h^{n-2} \right| \leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| r^{n-2} = |h| \cdot \text{costante},$$

ove  $r$  è un numero tale che  $0 < r < R$ . Dunque la condizione (3.31) è soddisfatta e quindi  $f(x)$  è derivabile in 0 con derivata  $f'(0) = a_1$ .

(d) Sia nella definizione di derivata, sia nelle considerazioni successive è stato implicitamente supposto che la funzione  $f(x)$  fosse definita in un intervallo contenente  $x_0$  come punto interno (cioè in un intorno di  $x_0$ ) e che gli incrementi  $h$  fossero piccoli a sufficienza in modo che i punti  $x_0 + h$  risultassero contenuti nell'intervallo di definizione. Salvo avviso contrario, anche nel seguito continuerà a essere formulata questa tacita ipotesi che consente di snellire l'esposizione.

## CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI DERIVABILI

Dalla definizione di funzione derivabile segue immediatamente la seguente importante proposizione

**PROPOSIZIONE 3.19** Se  $f$  è una funzione derivabile in  $x_0$  allora  $\eta(h) = f(x_0 + h) - f(x_0)$  è infinitesimo con  $h$  o, in modo equivalente,

$$\text{per ogni } \varepsilon > 0 \quad \text{si ha } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{per } x \text{ in un intorno di } x_0. \quad (3.32)$$

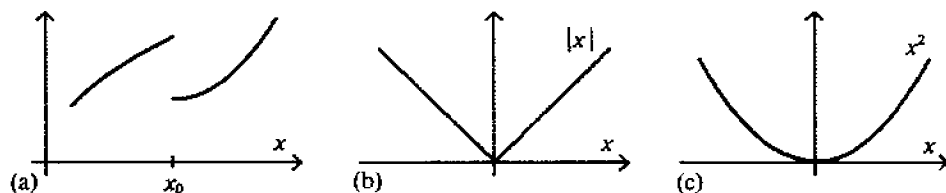
**DIMOSTRAZIONE** Se  $f$  è derivabile in  $x_0$  dalla condizione (3.31) si ricava

$$\begin{aligned} \eta(h) &= f(x_0 + h) - f(x_0) = h f'(x_0) + h \cdot \omega(h) = \\ &= h [f'(x_0) + \omega(h)], \end{aligned}$$

siccome  $f'(x_0) + \omega(h)$  è limitata, dalla Proposizione 3.15 segue che  $\eta(h)$  è infinitesimo. Dato  $\varepsilon > 0$  esiste dunque  $\delta_\varepsilon$  tale che  $|\eta(h)| < \varepsilon$  se  $|h| < \delta_\varepsilon$ ; posto  $x = x_0 + h$  si avrà, dunque,  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  se  $|x - x_0| < \delta_\varepsilon$ , cioè la (3.32).  $\square$

Euristicamente la condizione (3.32) si può descrivere dicendo che per valori di  $x$  "vicini" a  $x_0$  il valore di  $f(x)$  è "vicino" a  $f(x_0)$ . La funzione che ha il grafico mostrato nella Figura 3.18 (a) non verifica certo questa condizione nel punto di salto  $x_0$ . Le funzioni che verificano la proprietà (3.32) si dicono *continue* nel punto  $x_0$  e allo studio delle loro importanti proprietà sarà dedicata larga parte del prossimo capitolo.

La proposizione precedente afferma pertanto che *ogni funzione derivabile in un punto è ivi continua*. È importante, fin d'ora, mettere in evidenza il fatto che questa proposizione non si può invertire, cioè il fatto che  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  sia infinitesimo con  $h$  non è sufficiente a garantire la derivabilità di  $f$ . D'altra parte la (3.31) (che



**Figura 3.18** (a) Funzione non continua in  $x_0$ . (b) Funzione continua in  $x_0 = 0$  ma non derivabile in  $x_0$ . (c) Funzione derivabile.

equivale alla derivabilità) afferma che  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  non solo è infinitesimo ma è un infinitesimo di tipo particolare, somma di una parte lineare in  $h$  e di una parte “più che lineare” del tipo  $h \cdot \omega(h)$ .

Un esempio tipico di questa situazione è dato dalla funzione valore assoluto

$$f(x) = |x|$$

il cui rapporto incrementale nel punto  $x_0 = 0$  è 1 per  $h > 0$ ,  $-1$  per  $h < 0$ . Essa non è derivabile in zero, pur essendo chiaramente ivi continua.

Un altro esempio di funzione che verifica la (3.32) ma non è derivabile è dato dalla funzione

$$f(x) = x \cos \frac{1}{x} \quad \text{per } x \neq 0, \quad f(0) = 0.$$

Il suo rapporto incrementale in  $x_0 = 0$  è  $R(h) = (h \cos(1/h) - 0)/h = \cos(1/h)$ . Dunque in ogni intorno di 0 vi sono valori di  $h$  per i quali tale rapporto incrementale è 1 (i punti  $h = 1/2k\pi$  con  $k$  intero) e altri per i quali esso è  $-1$  (i punti  $h = 1/(2k+1)\pi$ ); pertanto non vi può essere alcun numero  $f'(0)$  che rende  $R(h) - f'(0)$  infinitesimo.

Nella Figura 3.19 sono riportati ingrandimenti successivi del grafico di  $f(x)$  in un intorno del punto  $(0,0)$ ; risulta evidente che tale grafico non si “appiattisce” e che dunque non ha senso parlare di retta tangente a tale grafico in  $(0,0)$ .

## LA FUNZIONE DERIVATA

Il simbolo  $f'(x_0)$  è stato usato per indicare la derivata della funzione  $f$  nel punto  $x_0$ . Quando  $f(x)$  è dotata di derivata in *ogni* punto di un certo intervallo  $(a, b)$  allora il valore della derivata  $f'(x)$  nel generico punto  $x$  fornisce, al variare di  $x$  in  $(a, b)$ , una nuova funzione  $x \rightarrow f'(x)$  che si chiama *funzione derivata* di  $f$  o semplicemente *derivata*. Per essa si usano anche i simboli

$$\frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad Df(x), \quad D_x f, \quad \dots$$

ciascuno dei quali presenta vantaggi e svantaggi; importante è, comunque, ricordarsi che espressioni del tipo  $\frac{df}{dx}$  non rappresentano un quoziente e che i simboli  $df$ ,  $dx$  non hanno, per ora, alcun significato isolatamente.

L'operazione con la quale si ottiene  $f'(x)$  da  $f(x)$  si dice *derivazione*.

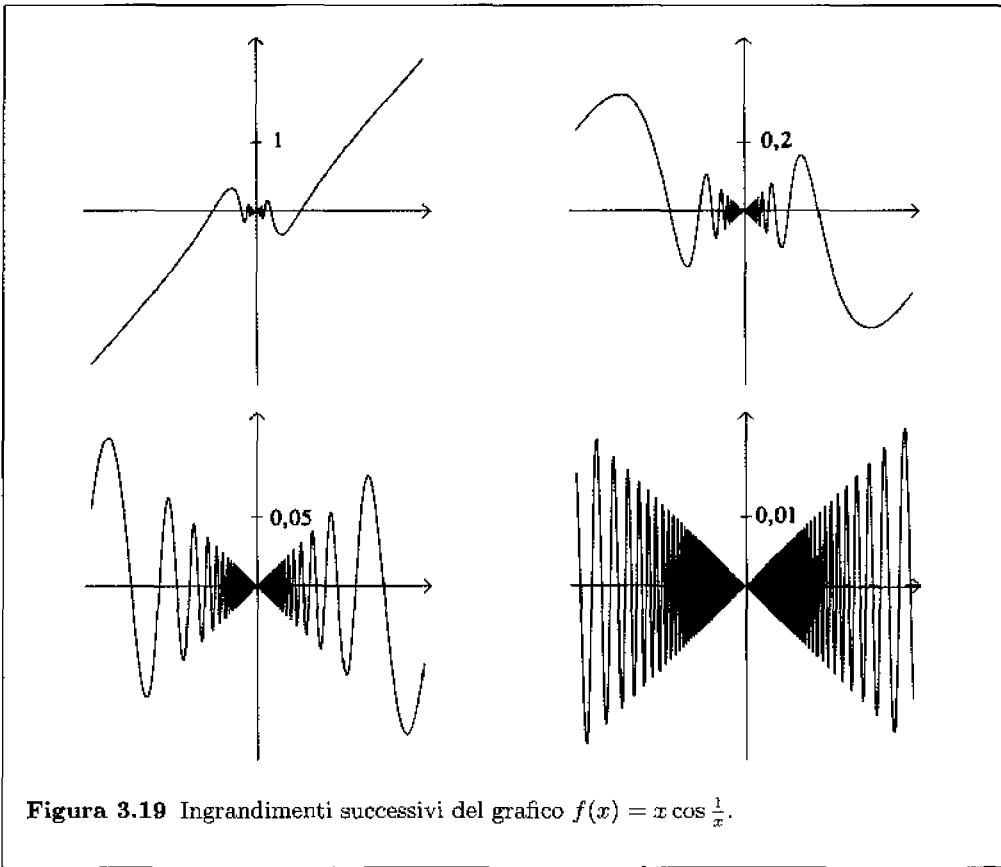


Figura 3.19 Ingrandimenti successivi del grafico  $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ .



**ESEMPIO 3.20 (a)** Se  $f(x) = c$ ,  $c$  numero reale, per ogni  $x$  reale si ha  $f(x+h) - f(x) = 0$  e dunque  $f'(x) = 0$  per ogni  $x$ : la derivata di una costante è zero.

(b) Si consideri la funzione  $f(x) = x^n$ , ove  $n$  è un intero non negativo: si ha

$$\begin{aligned} (x+h)^n &= x^n + nhx^{n-1} + \binom{n}{2}h^2x^{n-2} + \dots + h^n = \\ &= x^n + h \cdot nx^{n-1} + h \cdot \omega(h), \end{aligned}$$

ove  $\omega(h) = \binom{n}{2}hx^{n-2} + \binom{n}{3}h^2x^{n-3} + \dots + h^{n-1}$ . Per ogni fissato valore di  $x$  la funzione  $\omega(h)$  è infinitesima con  $h$  (Proposizione 3.15); dunque, in base alla condizione (3.31), la funzione  $f(x) = x^n$  è derivabile per ogni valore di  $x$  e la sua derivata è la funzione

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}. \quad (3.33)$$

(c) Si consideri ora la funzione  $f(x) = \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ). Risulta

$$\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x} = \frac{x-x-h}{x(x+h)} = -\frac{h}{x(x+h)} = -\frac{h}{x^2} + \frac{h^2}{x^2(x+h)}.$$



Se  $x$  è un fissato numero diverso da zero, prendendo  $h$  tale che  $|h| < |x|/2$  si ha

$$\frac{1}{|x^2(x+h)|} < \frac{2}{|x|^3}$$

e quindi  $\omega(h) = \frac{h}{x^2(x+h)}$  è infinitesima con  $h$ . La funzione  $f(x)$  è pertanto derivabile per ogni  $x \neq 0$  e si ha

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}. \quad (3.34)$$

(d) Se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono funzioni derivabili allora anche le funzioni  $f(x) + g(x)$  e  $Cf(x)$ , ove  $C$  è una costante, sono derivabili e hanno come derivata, rispettivamente,

$$f'(x) + g'(x), \quad Cf'(x);$$

questo fatto segue immediatamente dalla Proposizione 3.15 e dal fatto che

$$R_{f+g}(h) = R_f(h) + R_g(h), \quad R_{Cf}(h) = CR_f(h),$$

ove si è indicato con  $R_w(h)$  il rapporto incrementale della generica funzione  $w(x)$ . La proprietà ora esposta si può chiamare *proprietà di linearità della derivazione*.



### TEOREMA DI DERIVAZIONE PER SERIE

Nell'esempio precedente abbiamo visto che i monomi  $x^n$  sono funzioni derivabili in ogni punto  $x$ , con derivata  $nx^{n-1}$ , e che la derivazione è un'operazione lineare.

Ne segue che ogni polinomio

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

è derivabile e che la sua derivata è nuovamente un polinomio e precisamente

$$P'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1}.$$

Dimostriamo ora che, nei confronti della derivazione, le funzioni analitiche (cioè le funzioni che sono somma di serie di potenze) si comportano nello stesso modo dei polinomi.

**TEOREMA 3.21** Se la serie di potenze

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$$

converge per  $|x| < R$ , con  $R > 0$ , e ha per somma la funzione  $f(x)$  allora:

(a) la serie

$$a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1} \quad (3.35)$$

converge assolutamente per  $|x| < R$ ;

(b) la funzione  $f(x)$  è derivabile per  $|x| < R$  e ha come derivata la somma della serie (3.35).

**DIMOSTRAZIONE (a)** Sia  $|x| < R$  e si consideri  $\varrho$  con  $|x| < \varrho < R$ , cosicchè  $\sum a_n \varrho^n$  è assolutamente convergente; dunque le quantità  $|a_n \varrho^n|$  sono limitate, al variare di  $n$ , da una costante  $K$ . Si ha

$$|na_n x^{n-1}| = \left| na_n \varrho^{n-1} \left( \frac{x}{\varrho} \right)^{n-1} \right| \leq \frac{K}{\varrho} n \left( \frac{|x|}{\varrho} \right)^{n-1},$$

e la serie  $\sum n \left( \frac{|x|}{\varrho} \right)^{n-1}$  è convergente (come si verifica facilmente facendo uso del criterio del rapporto); dunque per il criterio del confronto la serie (3.35) è assolutamente convergente per  $|x| < R$ .

Si osservi che applicando quanto ora dimostrato alla serie  $\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}$  si ricava che anche la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \quad (3.36)$$

è assolutamente convergente per  $|x| < R$ .

**(b)** Sia  $|x| < R$ , proviamo che risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = h \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + h \cdot \omega(h) \quad (3.37)$$

ove  $\omega(h)$  è infinitesimo con  $h$ ; da (3.37) e (3.31) seguirà la tesi. Usando la formula del binomio di Newton (e la Proposizione 1.17, pag. 37):

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+h)^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \binom{n}{1} h x^{n-1} + \binom{n}{2} h^2 x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} h^{n-1} x + h^n \right] = \\ &= h \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} + h \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[ \binom{n}{2} h x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} h^{n-2} x + h^{n-1} \right], \end{aligned}$$

dunque per avere la (3.37) basterà provare che  $\omega(h)$  definito da

$$\omega(h) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \left[ \binom{n}{2} h x^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} h^{n-2} x + h^{n-1} \right]$$

è infinitesimo con  $h$ .

Risulta infatti, per  $j = 0, 1, \dots, n-2$

$$\binom{n}{j+2} = \frac{n!}{(j+2)!(n-j-2)!} \leq \frac{n(n-1)(n-2)!}{2j!(n-j-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \binom{n-2}{j}$$

e quindi

$$\begin{aligned} |\omega(h)| &\leq |h| \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \frac{n(n-1)}{2} \left[ \binom{n-2}{0} |x|^{n-2} + \binom{n-2}{1} |x|^{n-3} h + \dots \right] \leq \\ &\leq \frac{|h|}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) |a_n| (|x| + |h|)^{n-2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Pertanto, pur di prendere  $|h|$  piccolo a sufficienza in modo che

$$|x| + |h| < R,$$

la serie a ultimo membro in (3.38) è della forma (3.36) quindi è convergente; dalla Proposizione 3.15 segue pertanto che  $\omega(h)$  è infinitesimo con  $h$ .  $\square$



**ESEMPI 3.22 (a)** Derivando, termine a termine, la serie esponenziale  $\sum x^n/n!$  si può verificare che la funzione  $e^x$  è derivabile e che si ha

$$De^x = e^x. \quad (3.39)$$

Infatti dal Teorema 3.21:

$$De^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = e^x.$$

(b) Si considerino le serie di potenze (2.13), (2.14), pag. 66:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

che, come sappiamo, convergono per ogni  $x$ .

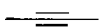
Dal teorema precedente si ricava che  $C(x)$  e  $S(x)$  sono funzioni derivabili per ogni  $x$  e che si ha

$$\begin{aligned} DC(x) &= -\frac{2x}{2!} + \frac{4x^3}{4!} - \frac{6x^5}{6!} + \dots = -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots = \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ DS(x) &= 1 - \frac{3x^2}{3!} + \frac{5x^4}{5!} - \frac{7x^6}{7!} + \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Abbiamo così provato le formule

$$DC(x) = -S(x), \quad DS(x) = C(x). \quad (3.40)$$

Come già anticipato, dimostreremo in seguito che le funzioni  $C(x)$  e  $S(x)$  coincidono con le *funzioni trigonometriche elementari*  $\cos x$  e  $\sin x$ .



**OSSERVAZIONE 3.23** Se un punto si muove di moto circolare uniforme su di una circonferenza di raggio  $R$ , la sua posizione all'istante  $t$  (in una opportuna scala dei tempi) è individuata dal punto di coordinate

$$(R \cos t, R \sin t)$$

e le sue proiezioni sugli assi  $x$  e  $y$  si muovono di *moto armonico*. Le componenti della velocità lungo gli assi sono invece date da (Figura 3.20)

$$(-R \sin t, R \cos t).$$

Sulla base dell'interpretazione della velocità come derivata dalla legge oraria, il risultato ottenuto nell'esempio precedente era dunque largamente prevedibile.

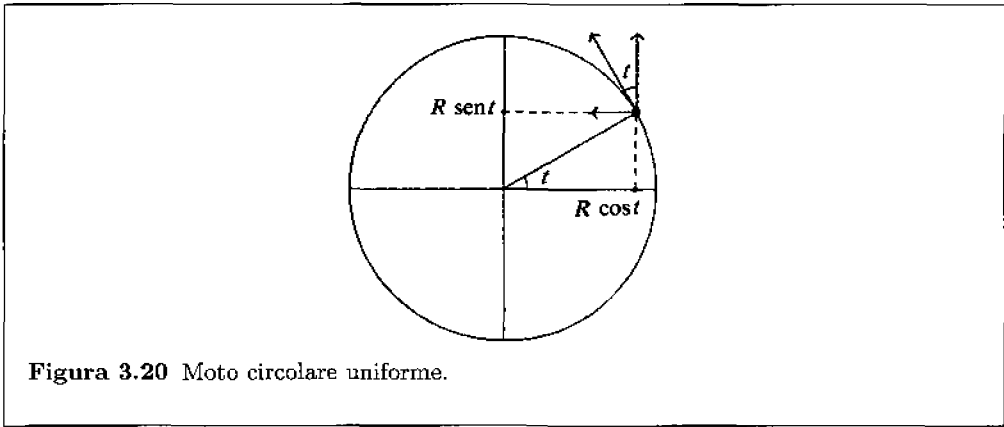


Figura 3.20 Moto circolare uniforme.

Il teorema di derivazione per serie è piuttosto importante, in quanto mostra che *una serie di potenze si può derivare termine a termine*, come se fosse un polinomio (beninteso, all'interno dell'intervallo di convergenza). Poiché la funzione derivata è ancora somma di una serie di potenze, con raggio di convergenza almeno uguale a quello della serie originaria (si vedrà in seguito che è, anzi, esattamente lo stesso), tale derivata si può ulteriormente derivare e così via: pertanto *le funzioni analitiche sono derivabili infinite volte*.

Ovviamente quanto esposto per serie di potenze di centro 0 si può ripetere per serie di potenze della forma  $\sum a_n(x - x_0)^n$ .

### DERIVATE SUCCESSIVE E PRINCIPIO DI IDENTITÀ DELLE SERIE DI POTENZE

In generale, se  $f$  è una funzione derivabile in tutti i punti di un intervallo, la sua derivata può essere a sua volta derivabile. La derivata della derivata di  $f$  si dice *derivata seconda* e per essa si usano le notazioni

$$f''(x), \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad D^2 f(x), \quad D_{xx} f.$$

In modo analogo, la derivata di  $f''(x)$ , se esiste, sarà la derivata terza  $f'''(x)$  di  $f(x)$ . In generale la derivata  $n$ -esima di  $f(x)$  si può definire induttivamente, se esiste, come

la derivata della derivata  $(n - 1)$ -esima e si indica con uno dei simboli

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n f}{dx^n}, \quad D^n f(x).$$

Talvolta è opportuno considerare la funzione stessa come derivata di ordine zero e usare la notazione  $f^{(0)}(x)$  per indicare  $f(x)$ .

Si supponga ora di avere una serie di potenze con raggio di convergenza positivo:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \quad |x| < R;$$

applicando successivamente il Teorema 3.21 si ottiene per  $|x| < R$

$$f'(x) = \sum_1^{\infty} n a_n x^{n-1} = 1 \cdot a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \dots,$$

$$f''(x) = \sum_2^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = 2 \cdot 1 \cdot a_2 + 3 \cdot 2 \cdot a_3 x + 4 \cdot 3 \cdot a_4 x^2 + \dots,$$

.....

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_k^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k} = \\ &= k! a_k + \frac{(k+1)!}{1} a_{k+1} x + \frac{(k+2)!}{2!} a_{k+2} x^2 + \dots, \end{aligned}$$

da cui, ponendo  $x = 0$ , si ha

$$f(0) = a_0, \quad f'(0) = a_1, \quad f''(0) = 2a_2, \quad \dots, \quad f^{(k)}(0) = k! a_k, \quad \dots;$$

abbiamo così dimostrato l'importante relazione fra i coefficienti di una serie di potenze e le derivate successive della sua somma espressa dal seguente teorema.

**TEOREMA 3.24** Se la serie di potenze  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ha raggio di convergenza positivo  $R$  allora la sua somma  $f(x)$  ha derivata di ogni ordine per  $|x| < R$  e si ha <sup>(3)</sup>

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \tag{3.41}$$

In altri termini, una funzione analitica è completamente individuata dal valore assunto dalla funzione stessa e da *tutte* le sue derivate in un unico punto.

Dal Teorema 3.24 si deduce il *principio di identità della serie di potenze*, che estende l'analogo principio per i polinomi.

**TEOREMA 3.25** Se due serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  e  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  convergono in un intorno di 0 e hanno la stessa somma  $f(x)$  allora esse hanno gli stessi coefficienti:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \dots$$

<sup>(3)</sup>Si ricordi la convenzione  $f^{(0)}(x) = f(x)$ .

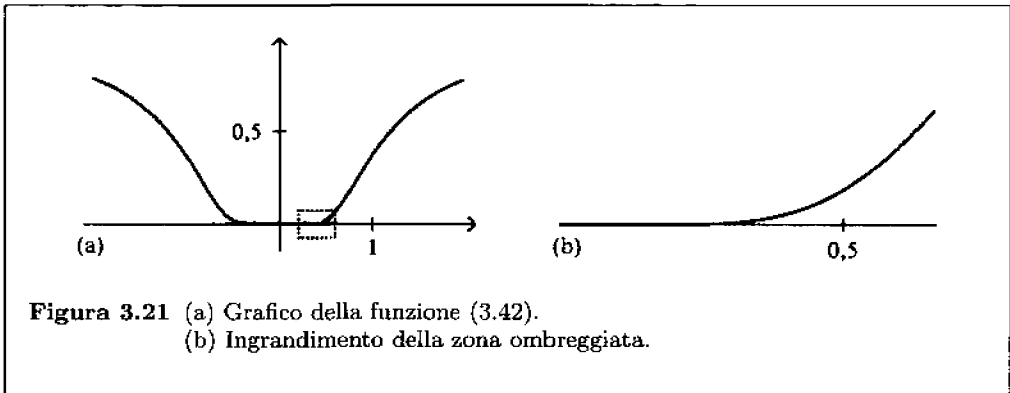
**OSSERVAZIONE 3.26** Si potrebbe pensare che ogni funzione  $f(x)$  che ha derivata di ogni ordine per  $x = 0$  si possa scrivere come somma della serie di potenze  $\sum a_n x^n$  con i coefficienti  $a_n$  dati da (3.41): non è così. La funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad (3.42)$$

è dotata di derivate di ogni ordine e tali derivate sono tutte nulle in 0; dunque la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

è identicamente nulla e quindi  $f(x)$  non è la somma di tale serie. Se  $f(x)$  si interpreta come spostamento, all'istante  $x$ , di una particella che si muove lungo una retta, allora la particella ha inizialmente ( $x = 0$ ) velocità nulla, accelerazione nulla ecc . . . , eppur si muove.



**Figura 3.21** (a) Grafico della funzione (3.42).  
(b) Ingrandimento della zona ombreggiata.

La funzione  $f(x)$ , come mostra la Figura 3.21, pur essendo diversa da zero per ogni  $x \neq 0$ , ha un andamento molto "piatto" in un intorno di 0.

Può essere istruttivo osservare l'andamento delle somme parziali della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^n \frac{1}{n!} \quad (3.43)$$

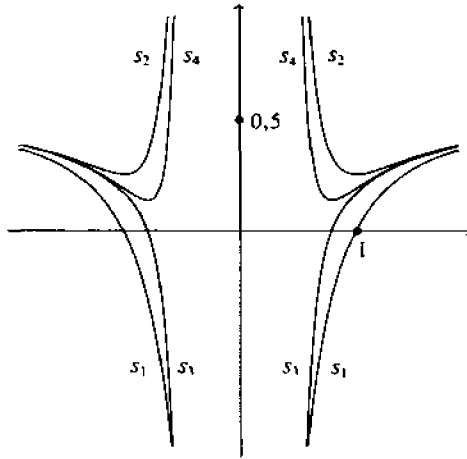
che, come sappiamo, converge per ogni  $x \neq 0$  proprio a  $f(x) = e^{-1/x^2}$  (Figura 3.22).

## SERIE DI POTENZE ED EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Il teorema di derivazione per serie e il principio di identità delle serie di potenze consentono talora di risolvere per serie alcune *equazioni differenziali*, cioè di trovare funzioni analitiche che sono soluzioni di un'equazione in cui figura una funzione incognita  $y(x)$  assieme a una o più delle sue derivate.

Consideriamo dapprima il caso più semplice: l'equazione

$$y' = 0; \quad (3.44)$$



**Figura 3.22** Alcune somme parziali della serie (3.43). Esse convergono per ogni  $x \neq 0$  alla funzione (3.42).

si cercano, dunque, funzioni incognite  $y(x)$  tali che la loro funzione derivata  $y'(x)$  sia nulla per ogni  $x$ . Se  $y(x)$  è somma di una serie di potenze  $\sum_0^\infty a_n x^n$  si avrà che  $y'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1}$ ; a causa dell'equazione (3.44) si deve avere  $\sum_1^\infty n a_n x^{n-1} = 0$  e quindi, per il principio di identità, ciascun  $a_n$ , con  $n = 1, 2, \dots$ , deve essere nullo, mentre niente si potrà dire del coefficiente  $a_0$ . Abbiamo, dunque, dimostrato che se  $f$  è una funzione analitica che ha derivata nulla allora  $f$  è costante.

Possiamo subito estendere di molto la classe di funzioni che verifica questa proprietà dimostrando il seguente importante teorema che inverte, negli intervalli, la proprietà espressa dall'Esempio 3.20(a).

**TEOREMA 3.27** Se una funzione  $f$  ha derivata nulla in tutti i punti di un intervallo, allora  $f$  è costante in tale intervallo.

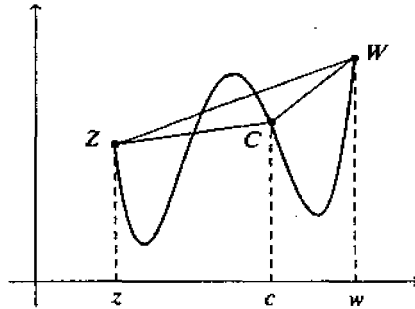
**DIMOSTRAZIONE** Effettueremo una osservazione preliminare che sarà usata come lemma. Si indichi con  $R(z,w)$  il valore assoluto del rapporto incrementale della funzione  $f$  relativo al generico intervallo  $[z,w]$ , cioè

$$R(z,w) = \left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \right|.$$

Ebbene, se  $c$  è un qualunque punto di  $(z,w)$  allora uno dei numeri  $R(z,c)$ ,  $R(c,w)$ , deve essere maggiore o uguale a  $R(z,w)$ . Infatti se fosse simultaneamente  $R(z,c) < R(z,w)$  e  $R(c,w) < R(z,w)$  si potrebbe scrivere

$$\begin{aligned} |f(z) - f(w)| &\leq |f(z) - f(c)| + |f(c) - f(w)| = R(z,c)|c - z| + R(c,w)|w - c| < \\ &< R(z,w)(|c - z| + |w - c|) = R(z,w)|z - w|, \end{aligned}$$

il che equivale a  $R(z,w) < R(z,w)$ : assurdo.



**Figura 3.23** Comunque si prenda  $c$  in  $(z, w)$  uno dei segmenti  $ZC$ ,  $CW$  ha inclinazione maggiore (o uguale) a quella di  $ZW$ .

Ricordando che il rapporto incrementale relativo a un intervallo è il coefficiente angolare della retta secante il grafico della funzione nei punti relativi agli estremi dell'intervallo stesso, il significato della osservazione fatta è reso trasparente dalla Figura 3.23.

Ciò premesso, il Teorema 3.27 segue facilmente ragionando per assurdo e usando il cosiddetto metodo di bisezione. Supponiamo per assurdo che  $f$  non sia costante e siano  $a_0, b_0$  due punti tali che  $f(a_0) \neq f(b_0)$ ; poniamo

$$0 < M = R(a_0, b_0) = \left| \frac{f(b_0) - f(a_0)}{b_0 - a_0} \right|.$$

Preso il punto medio  $c$  di  $[a_0, b_0]$  si avrà che uno dei due numeri  $R(a_0, c)$ ,  $R(c, b_0)$  è  $\geq M$ . Se  $R(a_0, c) \geq M$  indichiamo l'intervallo  $[a_0, c]$  con  $[a_1, b_1]$ , altrimenti indichiamo  $[c, b_0]$  con  $[a_1, b_1]$ ; in ogni caso si avrà  $R(a_1, b_1) \geq M$ . Considerato ora il punto medio di  $[a_1, b_1]$  si trova allo stesso modo un intervallo  $[a_2, b_2]$  per il quale  $R(a_2, b_2) \geq M$  e proseguendo in questo modo si costruisce una successione di intervalli  $[a_n, b_n]$  di ampiezza  $(b_0 - a_0)/2^n$ , ciascuno contenuto nel precedente e con  $R(a_n, b_n) \geq M$ . Esiste un unico punto  $x_0$  comune a tutti questi intervalli; siccome  $R(a_n, b_n) \geq M$  ancora per la stessa osservazione si avrà che uno dei due numeri  $R(a_n, x_0)$ ,  $R(x_0, b_n)$  è  $\geq M$  e ciò avviene per ogni  $n$ , dunque il rapporto incrementale in  $x_0$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

non può essere infinitesimo con  $h$ . Poiché  $f'(x_0) = 0$  per ipotesi, la conclusione è assurda e quindi  $f$  è costante.  $\square$

Si noti che il teorema precedente non richiede alcuna condizione "a priori" sulla funzione  $f$ , cioè determina tutte le funzioni derivabili con derivata nulla, ma richiede che l'insieme di definizione sia un intervallo (sia un insieme *connesso*) e ciò è irrinunciabile: la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{se } 2 < x < 3 \\ 1 & \text{se } 0 < x < 1 \end{cases}$$

ha derivata nulla in tutti i punti ove è definita ma non è costante.

Avendo così risolto completamente il problema di trovare le soluzioni della più semplice equazione differenziale  $y' = 0$  passiamo a esempi più significativi.



Le formule (3.39) e (3.40) consentono di affermare che la funzione esponenziale  $y(x) = e^x$  risolve l'equazione differenziale

$$y' = y, \quad (3.45)$$

mentre le funzioni  $C(x)$ ,  $S(x)$  risolvono entrambe la

$$y'' = -y. \quad (3.46)$$

Non è difficile trovare *tutte* le funzioni analitiche che risolvono queste equazioni. Per esempio nel caso della (3.45) se  $y = \sum a_n x^n$  si deve avere

$$\sum_1^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_0^{\infty} a_n x^n,$$

cioè  $\sum_1^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_1^{\infty} a_{n-1} x^{n-1}$ , da cui (sempre per il Teorema 3.25)  $n a_n = a_{n-1}$ ,

vale a dire  $a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{a_{n-2}}{n(n-1)} = \dots = \frac{a_0}{n!}$ .

In conclusione

$$y(x) = a_0 \sum_0^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x,$$

ove  $a_0$  è una qualunque costante, e quindi la funzione esponenziale è, a meno di una costante moltiplicativa, la sola soluzione analitica dell'equazione (3.45).

Torneremo su questa importante problematica nel capitolo dedicato alle equazioni differenziali; limitiamoci per ora a un esempio ulteriore.



**ESEMPI 3.28** Consideriamo l'equazione differenziale<sup>(4)</sup>

$$xy'' + y' + xy = 0 \quad (3.47)$$

e cerchiamone una soluzione che sia somma di una serie di potenze  $y(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$  (in un conveniente intorno dell'origine).

Derivando termine a termine:

$$\begin{aligned} y &= \sum_0^{\infty} a_n x^n, \\ y' &= \sum_1^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ y'' &= \sum_2^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}; \end{aligned}$$

<sup>(4)</sup> È questa la più semplice delle equazioni differenziali di Bessel, che intervengono nello studio delle vibrazioni delle membrane circolari e in molti altri fenomeni fisici.

moltiplicando per  $x$  la prima e l'ultima equazione e sostituendo nella (3.47) si ottiene

$$\sum_2^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_1^{\infty} na_n x^{n-1} + \sum_0^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

che si può scrivere

$$a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-2} + na_n^2) x^{n-1} = 0.$$

Per il Teorema 3.25 deve essere

$$a_1 = 0, \quad na_n^2 + a_{n-2} = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

Dunque tutti i coefficienti di indice dispari sono nulli, mentre quelli di indice pari verificano la formula ricorrente

$$a_{2m} = -\frac{1}{4m^2} a_{2m-2}$$

e quindi si possono esprimere in termini di  $a_0$ :

$$a_{2m} = (-1)^m \frac{1}{(m!)^2 2^{2m}} a_0.$$

Pertanto, a parte la costante moltiplicativa  $a_0$ , si ottiene la serie

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m}}{(m!)^2 2^{2m}}. \quad (3.48)$$

È facile verificare che la serie (3.48) converge per ogni  $x$  (si veda l'Esercizio 2.1.8, pag. 69), quindi la sua somma verifica l'equazione differenziale (3.47) per ogni  $x$ . La funzione (3.48) si dice *funzione di Bessel* di ordine 0 e si indica con  $J_0(x)$ ; contrariamente alla funzione esponenziale e alle funzioni trigonometriche non vi sono metodi geometrici, o comunque meno analitici, per definire  $J_0(x)$ .

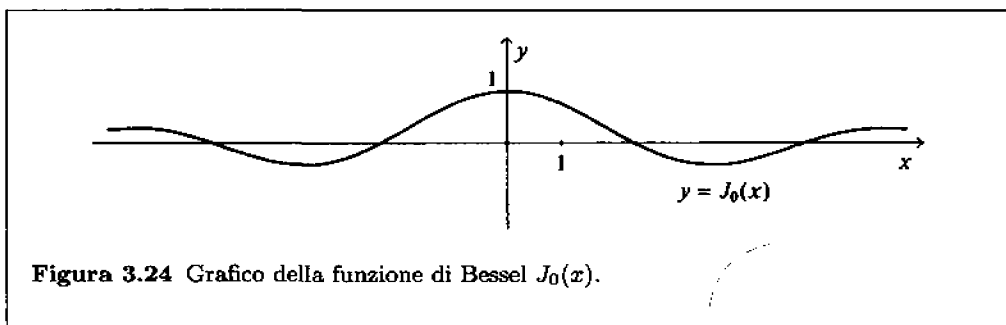


Figura 3.24 Grafico della funzione di Bessel  $J_0(x)$ .

## ESERCIZI

3.2.1 Si provi che le seguenti funzioni sono infinitesime con  $x$ :

$$(a) \frac{x^2 + x}{x-1}; \quad (b) \frac{x^3 - x^2}{x^2 + 2x}; \quad (c) \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})^2}{x}.$$

3.2.2 Si dimostri che se  $f$  è non negativa ed è continua in  $x_0$  allora  $g(x) = \sqrt{f(x)}$  è continua in  $x_0$ .

**3.2.3** Sia  $f(x) = x^3 - x^2/2 - 2x + 1$ . Trovare i punti del grafico di  $f$  nei quali la tangente è orizzontale.

**3.2.4** Dire quante sono le rette tangenti alla curva di equazione  $y = x^3 - 3x^2 + 2x$  che passano per l'origine.

**3.2.5** Trovare i punti della curva  $f(x) = x^3 - 3x + 5$  nei quali la tangente:

- (a) è parallela alla retta  $y = -2x$ ;
- (b) è perpendicolare alla retta  $x + 9y = 0$ ;
- (c) forma un angolo di  $\pi/4$  con l'asse  $x$ ;
- (d) passa per l'origine.

**3.2.6** Determinare un polinomio  $P(x)$  di terzo grado tale che

$$P(0) = 1, \quad P(1) = 0, \quad P'(0) = P'(1), \quad P''(0) = 4.$$

**3.2.7** Determinare la derivata delle seguenti funzioni usando la definizione:

$$\sqrt{x}, \quad \frac{1}{x+2}, \quad x|x|.$$

**3.2.8** Dimostrare che ogni funzione lipschitziana è continua.

**3.2.9** Sia  $f$  una funzione tale che  $f(tx) = tf(x)$  per ogni coppia di numeri  $x, t$ . Dimostrare che  $f$  è continua.

**3.2.10** Se la condizione (3.31) è soddisfatta solo da incrementi  $h > 0$  si dice che  $f$  è dotata di *derivata destra* in  $x_0$ , se lo è solo da quelli negativi si dice che  $f$  ha *derivata sinistra* in  $x_0$ . Chiaramente  $f$  è derivabile se e solo se ha derivate destra e sinistra e queste coincidono.

Ciò osservato si dica quale di queste funzioni è derivabile:

$$(a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 2 \\ 4x - 4 & \text{se } x < 2 \end{cases}; \quad (b) \quad f(x) = |x^3 - 2x^2 + x|.$$

**3.2.11** Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx & \text{per } x \leq 1 \\ 3x + 1 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$

determinare  $a$  e  $b$  in modo che sia continua e derivabile in ogni  $x$  reale.

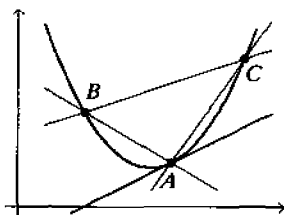
**3.2.12** Se nella definizione di derivata in luogo del rapporto incrementale  $R(h)$  si considera

$$S(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

allora si definisce la *derivata simmetrica*  $f^*(x_0)$  di  $f$  in  $x_0$ . Provare che se  $f$  è derivabile in  $x_0$  allora esiste anche la derivata simmetrica in  $x_0$  ed è  $f'(x_0) = f^*(x_0)$ . È vero il viceversa?

**3.2.13** Si consideri una parabola con asse parallelo all'asse  $y$ . Se  $P, Q$  sono punti della parabola si indichino con  $m_P, M_{PQ}$ , rispettivamente, il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola in  $P$  e quello della retta per  $P$  e  $Q$ . Si provi che, dati comunque tre punti  $A, B, C$  sulla parabola, risulta (Figura 3.25)

$$m_A = M_{AC} + M_{AB} - M_{CB}.$$



**Figura 3.25**

**3.2.14** Una funzione definita in  $(-a, a)$  si dice *pari* se  $f(x) = f(-x)$ , *dispari* se  $f(x) = -f(-x)$ . Si provi che una funzione derivabile pari (rispettivamente, dispari) ha una derivata dispari (rispettivamente, pari).

**3.2.15** Sia  $f(x) = x^2 e^{-x^2}$ . Dimostrare che posto  $c_n = f^{(n)}(0)$  vale la relazione ricorrente

$$(n-2)c_n = -2n(n-1)c_{n-2}, \quad n > 2.$$

**3.2.16** Siano  $f, g, h$  funzioni reali tali che: (a)  $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$  per ogni  $x$ ; (b)  $f, g$  sono derivabili nel punto  $x_0$ ; (c)  $f(x_0) = g(x_0)$ ; (d)  $f'(x_0) = g'(x_0)$ . Provare che anche  $h$  è derivabile in  $x_0$  e che  $h'(x_0) = f'(x_0) = g'(x_0)$ . Dire se la tesi è ancora vera se si toglie l'ipotesi (d).

**3.2.17** Determinare una serie di potenze  $y(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$  che risolva in un intorno di  $x = 0$  l'equazione di Airy:

$$y'' = xy.$$

**3.2.18** Trovare le serie di potenze che risolvono in un intorno di  $x = 0$  i problemi:

$$(a) \quad \begin{cases} y' = y + x^2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

$$(b) \quad \begin{cases} y'' + x^2 y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

### 3.3 Il teorema fondamentale del calcolo

Metteremo in evidenza la fondamentale relazione che intercorre fra le due operazioni basilari del calcolo infinitesimale esposte nei paragrafi precedenti: l'integrazione e la derivazione.

Tale relazione non solo è importante perché connette fra loro due problematiche che a prima vista non hanno alcuna parentela fra loro, il calcolo delle aree e la determinazione delle tangenti, ma si rivela uno strumento fondamentale per la determinazione esplicita delle grandezze in gioco: essa costituisce il cosiddetto teorema fondamentale del calcolo. Non siamo ancora in grado di dimostrare questo teorema nella sua generalità: lo faremo in un prossimo capitolo dopo aver studiato in dettaglio le proprietà delle funzioni continue; possiamo però dimostrarlo per la vasta classe delle funzioni lipschitziane. In particolare, dunque, avremo subito a disposizione questo teorema per le funzioni analitiche, una classe di funzioni alla quale abbiamo già dedicato ampio spazio e che ha svolto un ruolo estremamente prezioso agli albori del calcolo.

#### LA FUNZIONE INTEGRALE

Già abbiamo osservato che nella espressione simbolica

$$\int_a^b f(x) dx$$

la variabile  $x$ , detta *variabile di integrazione*, può essere cambiata ad arbitrio, così per esempio

$$\int_0^2 x^5 dx = \int_0^2 t^5 dt = \int_0^2 u^5 du.$$

Quando gli estremi di integrazione sono a loro volta delle variabili, è importante evitare di usare lo stesso simbolo negli estremi e nella variabile di integrazione perché c'è il rischio di generare confusione. Alla domanda: quanto vale l'espressione

$$\int_0^x x^5 dx$$

per  $x = 2$ ? ... è un po' imbarazzante rispondere.

Si supponga di avere una funzione  $f(t)$  integrabile nell'intervallo  $[a, b]$ . Se  $x$  è un punto intermedio fra  $a$  e  $b$  la  $f$  sarà integrabile anche in  $[a, x]$  (Proposizione 3.10, pag. 98). Si consideri l'integrale  $\int_a^x f(t) dt$ . È chiaro che se la funzione  $f$  e il primo estremo  $a$  sono fissati, allora tale integrale dipende unicamente dal secondo estremo  $x$ . La funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (3.49)$$

si chiama *funzione integrale* della  $f$ .

Lo studio delle relazioni che intercorrono tra le due funzioni  $F$  e  $f$  è alla base del calcolo infinitesimale.

Ricordiamo che per la convenzione (3.19) si ha  $F(a) = 0$ . Sulla base dell'interpretazione geometrica dell'integrale si ha che  $F(x)$  rappresenta l'area della parte di piano delimitata dalla curva  $y = f(t)$  e dall'asse  $x$  compresa fra le rette  $t = a$  e  $t = x$ .

Il grafico della funzione integrale  $y = F(x)$  appare dunque del tipo mostrato nella Figura 3.26.

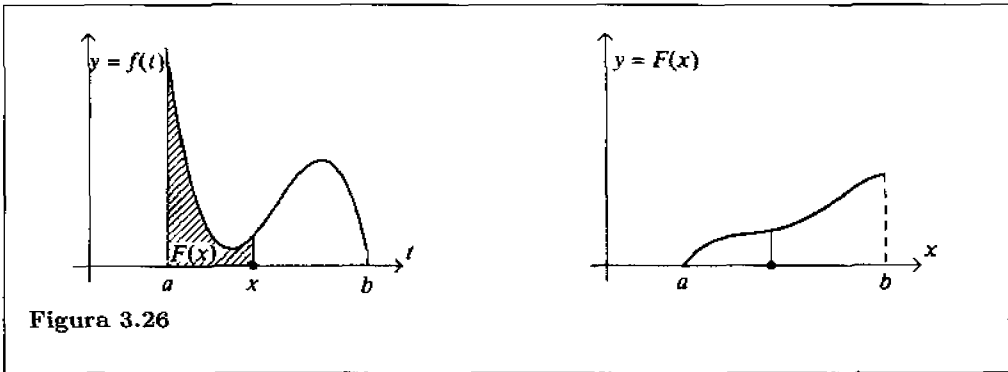


Figura 3.26

Ricordando anche che in base alla (3.24) risulta

$$\int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (3.50)$$

siccome l'integrale è lineare si avrà che la funzione integrale di un polinomio

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n$$

è ancora un polinomio, e precisamente

$$P(x) = \int_0^x p(t) dt = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \dots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(per semplicità abbiamo assunto il primo estremo uguale a 0). Per esempio,

$$\int_0^x (t + 4t^3 + 2t^5) dt = \frac{x^2}{2} + x^4 + \frac{1}{3}x^6.$$

Proveremo ora che le serie di potenze si possono integrare termine a termine, come se fossero polinomi, e che la loro funzione integrale è ancora una serie di potenze, cioè una funzione analitica (ovviamente all'interno dell'intervallo di convergenza della serie integranda).

### TEOREMA DI INTEGRAZIONE PER SERIE

**TEOREMA 3.29** Sia  $f$  una funzione analitica per  $|t| < R$

$$f(t) = \sum_0^{\infty} a_n t^n, \quad |t| < R;$$

allora la sua funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x \sum_0^{\infty} a_n t^n dt \quad (3.51)$$

è una funzione analitica e

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \text{se } |x| < R. \quad (3.52)$$

**DIMOSTRAZIONE** Già sappiamo che la funzione  $f$  è integrabile su ogni intervallo del tipo  $[0, x]$  con  $|x| < R$  (Proposizione 3.7, pag. 96).

Sia  $x$  fissato e  $\varrho$  un numero tale che  $|x| < \varrho < R$ . La serie  $\sum a_n \varrho^n$  è assolutamente convergente e quindi dato  $\varepsilon > 0$  esiste un indice  $\nu$  tale che

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \varrho^n < \varepsilon, \quad \text{se } N > \nu.$$

Risulta dunque a maggior ragione, per ogni  $t$  con  $|t| \leq \varrho$ :

$$\left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n t^n \right| < \varepsilon, \quad \text{se } N > \nu.$$

La serie  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  ha raggio di convergenza almeno uguale a  $R$  (è maggiorata in modulo da  $\sum |a_n| \varrho^n$ ). Consideriamo l'espressione

$$\left| F(x) - \sum_{n=0}^N a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|$$

e mostriamo che essa tende a 0 per  $N$  tendente all'infinito, fatto dal quale seguirà la tesi:

$$\begin{aligned} \left| F(x) - \sum_0^N a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \right| &= \left| \int_0^x \left( \sum_0^{\infty} a_n t^n \right) dt - \sum_0^N \int_0^x a_n t^n dt \right| = \\ &= \left| \int_0^x \left( \sum_0^N a_n t^n \right) dt + \int_0^x \left( \sum_{N+1}^{\infty} a_n t^n \right) dt - \sum_0^N \int_0^x \left( \sum_0^N a_n t^n \right) dt \right| = \\ &= \left| \int_0^x \left( \sum_{N+1}^{\infty} a_n t^n \right) dt \right| \leq \int_0^x \left| \sum_{N+1}^{\infty} a_n t^n \right| dt \leq \varepsilon \varrho, \quad \text{per } N > \nu, \end{aligned}$$

come si voleva. □



**ESEMPIO 3.30** La funzione  $f(t) = 1/(1+t)$  è analitica per  $|t| < 1$  e si ha  $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$ ; applicando il teorema di integrazione per serie si trova la sua funzione integrale:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots;$$

la serie trovata coincide con la (2.15), pag. 66, e quindi sarà

$$F(x) = \ln(1+x), \quad |x| < 1.$$



È chiaro che, tramite un cambiamento di variabili, si può provare il Teorema 3.29 anche per serie di potenze del tipo  $\sum a_n(x - x_0)^n$  di centro  $x_0 \neq 0$ .

Si è visto che la funzione integrale di una funzione analitica

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n \quad (3.53)$$

è ancora una funzione analitica e precisamente

$$F(x) = \sum_0^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1};$$

ma allora  $F(x)$  è derivabile: calcoliamone la derivata. Dal teorema di derivazione per serie si ottiene

$$F'(x) = \sum_0^{\infty} a_n \frac{(n+1)x^n}{n+1} = \sum_0^{\infty} a_n x^n = f(x),$$

cioè nuovamente la funzione di partenza! Le operazioni di integrazione e di derivazione appaiono, dunque, l'una l'inversa dell'altra.

Se ora  $[a, b]$  è un intervallo contenuto nell'insieme di convergenza della (3.53) si avrà

$$\int_a^b f(t) dt = \int_0^b f(t) dt - \int_0^a f(t) dt = F(b) - F(a) \quad (3.54)$$

La formula (3.54) vale non solo per la funzione integrale, ma anche per ogni funzione  $G(x)$  tale che  $G'(x) = f(x)$ . Infatti per il Teorema 3.27 le funzioni  $F(x)$  e  $G(x)$  avendo eguale derivata differiscono per una costante; dunque se  $G$  è una *primitiva* di  $f$ , cioè una funzione tale che  $G'(x) = f(x)$ , si ha

$$\int_a^b f(t) dt = G(b) - G(a). \quad (3.55)$$

Il risultato che abbiamo dimostrato nel caso delle funzioni analitiche costituisce il *teorema fondamentale del calcolo* ed è soddisfatto in un contesto più ampio. Enunciamolo nella sua generalità.

**TEOREMA 3.31** Se  $f$  è una funzione continua in ogni punto dell'intervallo  $[a, b]$  allora la sua funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è derivabile e si ha

$$F'(x) = f(x) \quad \text{per } x \text{ in } [a, b]. \quad (3.56)$$

Inoltre, se  $G(x)$  è una funzione derivabile tale che

$$G'(x) = f(x) \quad \text{per } x \text{ in } [a, b]$$

allora

$$\int_a^x f(t) dt = G(x) - G(a). \quad (3.57)$$



**DIMOSTRAZIONE** Come già annunciato proveremo il risultato solo per funzioni lipschitziane, dunque anche per funzioni analitiche (ma per esse non è una novità ...); la dimostrazione completa del teorema sarà nel Capitolo 6. Sia dunque  $f$  una funzione lipschitziana su  $[a, b]$ ; esisterà allora  $K$  tale che

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|, \quad x, y \text{ in } [a, b].$$

Siano  $x, x + h$  due punti di  $[a, b]$ ; allora

$$F(x + h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt. \quad (3.58)$$

Per  $x$  fissato il valore di  $f(x)$  è una costante e possiamo scrivere

$$hf(x) = f(x) \int_x^{x+h} dt = \int_x^{x+h} f(x)dt.$$

Dunque, sommando in (3.58)

$$F(x + h) - F(x) = hf(x) + \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt, \quad (3.59)$$

e usando la lipschitzianità di  $f$ :

$$\begin{aligned} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x))dt \right| &\leq \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt \leq \\ &\leq \int_x^{x+h} K|t - x|dt \leq \int_x^{x+h} Kh dt = Kh^2. \end{aligned} \quad (3.60)$$

Il secondo membro della (3.59) si può pertanto scrivere nella forma  $hf(x) + h \cdot \omega(h)$ , ove, per la (3.60),  $|\omega(h)| \leq Kh$  e quindi  $\omega(h)$  è infinitesimo con  $h$ . In base alla condizione (3.31) abbiamo allora dimostrato la prima parte del teorema, cioè che  $F(x)$  è derivabile e ha come derivata  $f'(x)$ .

Sia ora  $G(x)$  una funzione derivabile con  $G'(x) = f(x)$  in  $[a, b]$ ; si avrà  $F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$  e quindi, per il Teorema 3.27,  $F(x) - G(x) = \text{costante} = F(a) - G(a) = -G(a)$ , da cui la (3.57).  $\square$

Il teorema precedente è di grande importanza nel calcolo degli integrali. Supponiamo infatti di voler calcolare l'integrale

$$\int_a^b f(x)dx$$

ove  $f$  è una funzione continua e si supponga di conoscere una *primitiva* di  $f$ , cioè una funzione derivabile  $G(x)$  tale che  $G'(x) = f(x)$ . Si avrà allora

$$\int_a^x f(t)dt = G(x) - G(a)$$

e quindi

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Il calcolo degli integrali è allora ricondotto alla ricerca delle primitive, cioè all'operazione inversa della derivazione.

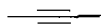


**ESEMPIO 3.32** Si voglia calcolare

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx.$$

Si sa che  $D(1/x) = -1/x^2$  (Esempio 3.20(c)); si ha dunque  $D(-1/x) = 1/x^2$ , cioè  $G(x) = -1/x$  è una primitiva di  $1/x^2$ . Allora

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} dx = G(3) - G(1) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{2}{3}.$$



L'insieme delle funzioni primitive di una funzione assegnata  $f(x)$  in un intervallo  $I$  si chiama *integrale indefinito* di  $f$  e si indica col simbolo

$$\int f(x) dx.$$

Si tratta, quindi, di un insieme di funzioni due delle quali differiscono per una costante. Si noti che è *fondamentale* che in questa definizione la funzione  $f(x)$  sia definita su *tutto* un intervallo (eventualmente illimitato).

Se si considera la funzione  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ , per esempio, vi sono due insiemi di primitive indipendenti fra loro, una per  $x > 0$ , l'altra per  $x < 0$  (si veda anche l'Esercizio 3.3.10). L'esistenza dell'integrale indefinito per funzioni  $f$  continue è assicurata dal teorema fondamentale del calcolo. Si osservi che se  $f(x)$  è integrabile ma non continua allora la sua funzione integrale  $F(x)$  può non essere derivabile. Per esempio per la funzione integrabile

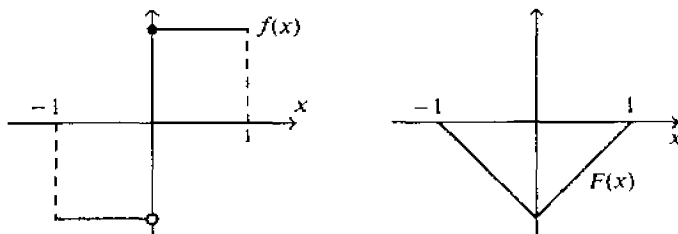
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -1, & \text{se } -1 \leq x < 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

si ha

$$F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt = \begin{cases} -x - 1, & -1 \leq x < 0 \\ \int_{-1}^0 (-1) dt + \int_0^x dt = -1 + x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Dunque  $F(x) = |x| - 1$ , ma  $F$  non è una primitiva di  $f$  in quanto non è derivabile per  $x = 0$ .

Riassumendo: l'integrale definito, e quindi la funzione integrale  $F(x)$ , esistono per ampie classi di funzioni (per esempio le funzioni monotone, anche se non continue, o quelle lipschitziane); se la funzione  $f(x)$  è continua allora la sua funzione integrale  $F$  è derivabile e ha per derivata  $f$ , cioè  $F$  è una primitiva di  $f$ ; in tal caso esiste anche l'integrale indefinito che è costituito da tutte le funzioni che, su un assegnato intervallo, differiscono da  $F$  per una costante. Per determinare l'integrale definito di una funzione



**Figura 3.27** Grafico della funzione (3.61) e della sua funzione integrale.

continua si usa la formula (3.57), cioè si cerca una primitiva della funzione e se ne calcola la differenza dei valori assunti agli estremi.

La formula fondamentale (3.57) va però applicata *cum grano salis*: se  $g(x) = -1/x$  dal fatto che  $g'(x) = 1/x^2$  sarebbe assurdo dedurre

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx = g(1) - g(-1) = -2,$$

in quanto  $1/x^2$  non è limitata né integrabile in  $[-1, 1]$ !

## ESERCIZI

**3.3.1** Trovare le primitive delle funzioni:

- |                                  |  |
|----------------------------------|--|
| (a) $\frac{1}{2}x^3 + 3x^2 - 4;$ | (b) $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x^2};$ |
| (c) $x(x-1)(x-2);$               | (d) $\frac{1}{x^3} + x + e^{-x};$        |
| (e) $\frac{x+2}{x+1};$           | (f) $\frac{x^3 + 3x^2 - x + 3}{1+x}.$    |

**3.3.2** Calcolare i seguenti integrali:

- |                                  |                                  |
|----------------------------------|----------------------------------|
| (a) $\int_1^3 (t^3 + 2t) dt;$    | (b) $\int_{-1}^2 (x + 3x^2) dx;$ |
| (c) $\int_0^3 e^x dx;$           | (d) $\int_1^5 \frac{9}{x^2} dx;$ |
| (e) $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx;$ | (f) $\int_0^1 (x+2)^3 dx.$       |

**3.3.3** Calcolare

$$\int_a^b (x-a)(b-x) dx.$$

**3.3.4** Dimostrare che la funzione integrale  $F(x)$  di ogni funzione integrabile è lipshitziana (in particolare è continua).

**3.3.5** Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx.$$

**3.3.6** Calcolare la derivata rispetto a  $x$  della funzione

$$\int_x^b f(t) dt,$$

ove  $f(x)$  è una funzione continua.

**3.3.7** Calcolare la derivata rispetto a  $x$  della funzione

$$g(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t}$$

e dare una interpretazione geometrica del risultato.

**3.3.8** Trovare tutti i valori di  $b$  per i quali:

$$(a) \int_0^b x(1-x) dx = 0, \quad (b) \int_0^b |x(1-x)| dx = 0.$$

**3.3.9** Trovare un polinomio di terzo grado  $P(x)$  tale che  $P(0) = P(1) = 0$ ,  $P'(1) = 1$  e  $\int_0^1 P(x) dx = 1$ .

**3.3.10** Si considerino la funzione  $f(x) = (1+x^2)/x^2$  e la sua funzione primitiva  $F(x)$  che assume lo stesso valore di  $f(x)$  per  $x = 1$ . Si traccino le curve di equazione  $y = f(x)$  e  $y = F(x)$  e si determinino le equazioni delle tangenti nei loro punti comuni. Si calcoli l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve e dalla retta di equazione  $x = -2$ .

Questo è il testo di un esercizio assegnato all'esame di maturità scientifica nel 1988. Si dica perché l'ultima domanda è del tutto priva di senso.

**3.3.11** Usando la formula (3.13) si provi che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p+1}} (1^p + 2^p + \dots + n^p) = \frac{1}{p+1}, \quad p > 0.$$

**3.3.12** Se  $f$  è una funzione *periodica* di periodo  $T > 0$ , cioè tale che per ogni  $x$  si abbia  $f(x+T) = f(x)$ , si provi che ogni primitiva di  $f$  è somma di una funzione periodica di periodo  $T$  e di un polinomio di grado  $\leq 1$ .

**3.3.13** Sia  $f$  una funzione dispari (Esercizio 3.2.14), periodica di periodo  $T > 0$  e integrabile. Se  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  si dimostri che  $F(kT) = 0$  per ogni intero  $k$  e che  $F$  è una funzione pari periodica di periodo  $T$ .

**3.3.14** Scrivere lo sviluppo in serie di

$$\int_0^x \operatorname{sen} t^2 dt.$$

3.3.15 Provare le seguenti uguaglianze:

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3};$$

$$(b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2};$$

$$(c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}.$$

3.3.16 Calcolare la somma delle seguenti serie

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; \quad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n}; \quad (c) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}.$$

3.3.17 (*Diseguaglianza di Hölder*). (a) Siano  $p, q > 1$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Utilizzando la Figura 3.28 dimostrare che per  $x, y \geq 0$  si ha

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

(b) Se  $f, g$  sono due funzioni integrabili su  $[a, b]$  dimostrare che

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}.$$

[Ridursi al caso in cui  $\int |f(x)|^p dx = \int |g(x)|^q dx = 1$  e usare (a)].

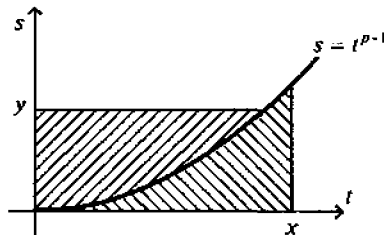


Figura 3.28

3.3.18 Sia  $f$  integrabile su  $[0, 1]$  tale che  $f(x) = \int_0^x f(t) dt$  per ogni  $x$  di  $[0, 1]$ . Si dimostri che  $f$  è identicamente nulla.

### 3.4 Un'importante applicazione fisica: il lavoro

Se  $f(x)$  è una funzione integrabile sull'intervallo  $[a,b]$  e  $[c,d]$  è un qualunque intervallo in esso contenuto, sappiamo che valgono anche su  $[c,d]$  le proprietà seguenti (Proposizioni 3.11 e 3.12, pag. 99):

A) (*additività*) se  $p$  è un qualunque punto di  $[c,d]$  allora

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^p f(x)dx + \int_p^d f(x)dx,$$

B) (*diseguaglianza della media*) per ogni intervallo  $[c,d]$  contenuto in  $[a,b]$  si ha

$$m(c-d) \leq \int_c^d f(x)dx \leq M(d-c),$$

ove  $m, M$  sono rispettivamente gli estremi inferiore e superiore di  $f$  in  $[c,d]$ .

Il nome della condizione B) è dovuto al fatto che essa può essere riformulata dicendo che la *media integrale*

$$\frac{1}{d-c} \int_c^d f(x)dx \quad (3.62)$$

è compresa fra gli estremi inferiore e superiore di  $f$ .

#### UNA CARATTERIZZAZIONE DELL'INTEGRALE

È interessante notare che l'integrale di Riemann è l'unica funzione di  $c,d,f$  che ha le proprietà A) e B). Siccome queste due proprietà sono intrinseche in molti problemi di tipo geometrico, fisico, probabilistico ecc., la descrizione matematica di tali problemi coinvolgerà necessariamente la nozione di integrale.

Ma precisiamo la predetta affermazione.

**PROPOSIZIONE 3.33** Sia  $[a,b]$  un intervallo fissato; supponiamo di potere associare a ogni funzione integrabile  $f$  e a ogni sottointervallo  $[c,d]$  di  $[a,b]$  un numero  $A_c^d(f)$  in modo che siano soddisfatte le proprietà:

A) se  $a \leq c \leq p \leq d \leq b$  allora

$$A_c^d(f) = A_c^p(f) + A_p^d(f);$$

B) per ogni intervallo  $[c,d]$ , se  $m \leq f(x) \leq M$  per  $c \leq x \leq d$ , si ha

$$m(d-c) \leq A_c^d(f) \leq M(d-c).$$

Allora  $A_c^d(f)$  è l'integrale di  $f$  esteso all'intervallo  $[c,d]$ :

$$A_c^d(f) = \int_c^d f(x)dx.$$

**DIMOSTRAZIONE** La condizione B) impone che se  $f$  è uguale a una costante  $k$  su  $[c,d]$  (quindi  $m = M = k$ ) allora  $A_c^d(f) = k(d-c)$  cioè è l'integrale di  $f$  esteso a  $[c,d]$ . A causa della condizione A) si avrà allora che questo fatto si estende a funzioni che sono

costanti in  $[c, p]$  e in  $[p, d]$  e in generale a tutte le funzioni che sono *costanti a tratti*, cioè sono costanti in ciascuno dei sottointervalli di una opportuna partizione.

Se  $\varphi$  è una funzione costante a tratti minorante  $f$  e  $\psi$  è una funzione costante a tratti maggiorante  $f$  si avrà dalla B)

$$A_c^d(\varphi) = \int_c^d \varphi(t) dt \leq A_c^d(f) \leq \int_c^d \psi(t) dt = A_c^d(\psi). \quad (3.63)$$

Si come  $f$  è integrabile allora, per il Teorema 3.3, pag. 92 (con la stessa notazione, ove solo si sostituisce il generico intervallo  $[c, d]$  a  $[a, b]$ ),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_c^d f(x) dx. \quad (3.64)$$

Ma  $s_n = A_c^d(\varphi_n)$ ,  $S_n = A_c^d(\psi_n)$ , con  $\varphi_n, \psi_n$  che valgono  $m_i, M_i$  nell' $i$ -esimo sottointervallo di  $[c, d]$ , cioè sono funzioni costanti a tratti con  $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ . Da (3.63) e (3.64) si ha allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_c^d(\varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_c^d(\psi_n) = A_c^d(f) = \int_c^d f(x) dx. \quad \square$$

Si è così visto che le condizioni A) e B) caratterizzano (nel senso precisato) l'integrale di Riemann. Tali condizioni sono assolutamente naturali se si interpreta  $A_c^d(f)$  come l'area della regione di piano compreso tra il grafico di  $f$  e l'intervallo  $I$  dell'asse  $x$  (per esempio nel caso "facile"  $f \geq 0$ ); esse traducono d'altra parte le condizioni 1), 2), 3), 4) che l'intuizione aveva suggerito di porre a fondamento della nozione empirica di area all'inizio del Paragrafo 3.1. La Proposizione 3.33 conferma, dunque, la validità dell'interpretazione geometrica dell'integrale vista sin dall'inizio.

Vi sono però altre situazioni che presentano naturalmente le condizioni A) e B) e che quindi si possono, anzi si devono, descrivere matematicamente tramite l'integrale. Ne citiamo un semplice esempio.

## LAVORO COMPIUTO DA UNA FORZA

Si immagini una particella che si muove lungo un segmento  $S$  sotto l'influenza di una forza che agisce su di essa nella direzione del moto (nello stesso verso o in verso opposto). La posizione della particella è individuata dalla sua coordinata  $s$  rispetto a una origine prefissata e similmente la forza che agisce sulla particella sarà in generale una funzione  $f$  di  $s$ ; supporremo  $f(s)$  positivo se la forza è diretta per valori crescenti di  $s$ , negativo altrimenti:  $f(s)$  descrive, dunque, la forza nel punto di coordinata  $s$  sia in intensità sia in verso. Se la forza è costante lungo il cammino  $S$  si definisce *lavoro compiuto dalla forza* il prodotto  $f(s_1 - s_0)$ , ove  $s_0$  e  $s_1$  sono rispettivamente la coordinata iniziale e finale. Si noti che se lo spostamento è avvenuto nello stesso verso della forza tale prodotto è positivo, altrimenti è negativo.

Come si può definire il lavoro quando la forza è variabile, nel senso che ha intensità e anche verso che dipendono dalla coordinata  $s$ ? Indichiamo tale lavoro con  $L_u^v(f)$  ove  $f = f(s)$  è il valore della forza (in intensità e segno) e  $S = [u, v]$  è il cammino percorso dalla particella. Consideriamo dapprima cammini  $S$  orientati nel verso crescente di  $s$ , cioè con  $u < v$ . Se  $p$  è la coordinata di un punto intermedio tra quello iniziale e quello finale si può immaginare di percorrere prima  $[u, p]$  e poi  $[p, v]$  ed è assolutamente

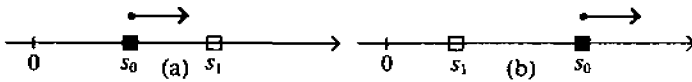


Figura 3.29 Lavoro positivo (a) e negativo (b).

naturale richiedere che sia

$$L_u^v(f) = L_u^p(f) + L_p^v(f).$$

D'altra parte; se in ogni punto di  $S$  la forza  $f(s)$  è inferiore a un dato valore  $M$  il lavoro effettuato da essa sarà inferiore a quello di una forza costantemente pari a  $M$ , analogamente se  $m \leq f(s)$ ; in altri termini è spontaneo richiedere che se

$$m \leq f(s) \leq M \quad \text{per} \quad u \leq s \leq v$$

allora

$$m(v - u) \leq L_u^v(f) \leq M(v - u).$$

È del tutto ragionevole richiedere che il lavoro  $L_u^v(f)$  abbia le proprietà di additività e della media pertanto, in base alla precedente proposizione, risulterà

$$L_u^v(f) = \int_u^v f(s) ds; \quad (3.65)$$

la (3.65) potrà allora essere assunta come definizione formale del lavoro. È ovvia l'estensione al caso  $v \leq u$  (Formula (3.19), pag. 98).

La Proposizione 3.33 consente di concludere che la definizione (3.65) del lavoro è la sola possibile, ma il Teorema 3.3 consente di formularla in modo più familiare. Suddiviso l'intervallo  $[u, v]$  in  $n$  parti uguali e se  $\xi_i$  è un punto qualunque dell'intervallo  $i$ -esimo (per esempio il primo estremo) si costruisce la somma approssimante

$$L_n = \frac{v - u}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i), \quad (3.66)$$

il che corrisponde a calcolare il lavoro supponendo che la forza sia costante in ciascuno degli  $n$  sottointervalli. All'aumentare di  $n$  la quantità (3.66) approssima sempre meglio il lavoro della forza  $f(s)$  e questa considerazione intuitiva è del tutto giustificata dal predetto teorema, in quanto  $L_n$  tende, per  $n$  che tende all'infinito, all'integrale di  $f$  su  $[u, v]$ .

Se pensiamo alla coordinata della particella come una funzione del tempo  $t$ , cosicché anche  $y = f(s)$  viene a essere una funzione di  $t$ , e disegniamo nel piano i punti  $s = s(t)$ ,  $y = y(t)$ , al variare di  $t$  avremo una curva che rappresenta il *diagramma di lavoro* del moto. Se la particella descrive un moto periodico allora, dopo un certo tempo  $T$  (il periodo del moto), il punto  $(s(t), y(t))$  ritorna su se stesso e quindi il diagramma di lavoro è una curva chiusa.

Tale curva può essere semplicemente costituita da un arco che viene attraversato dapprima in un verso e poi nel verso opposto, come avviene, per esempio, per le *vibrazioni*



elastiche lineari in cui ha  $f(s) = -ks$  (legge di Hooke). In questo caso

$$L_u^v(f) = \int_u^v (-ks) ds = \frac{1}{2}k(u^2 - v^2).$$

La Figura 3.30 mostra il caso  $u = 0$ , cioè con particella inizialmente nella posizione di riposo. Per ogni posizione finale  $v$ , il lavoro svolto dalla forza elastica è negativo in quanto essa si oppone a ogni allontanamento del punto dalla posizione di equilibrio.

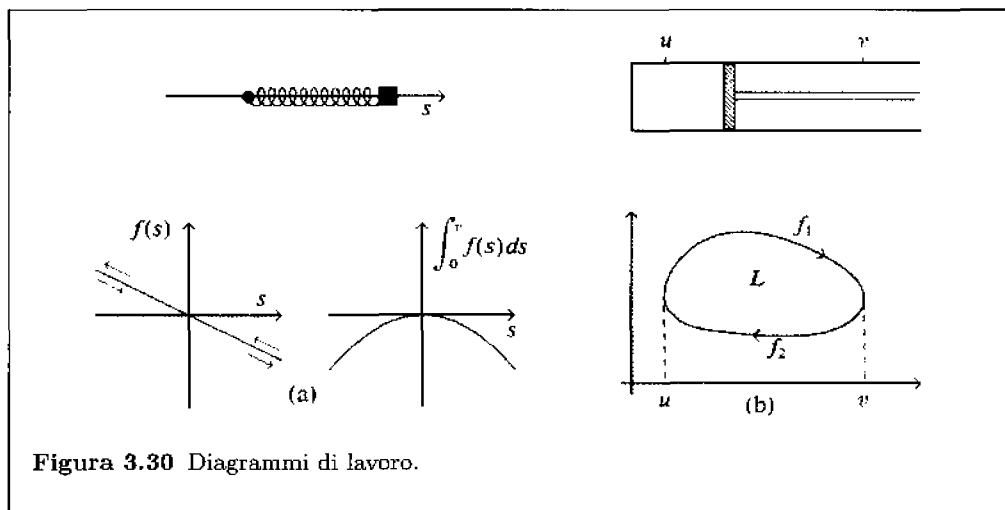


Figura 3.30 Diagrammi di lavoro.

In altri casi, invece, il diagramma di lavoro di un corpo in moto periodico può consistere in una vera e propria curva chiusa; è il caso, per esempio, dei motori a stantuffo nei quali la pressione è diversa nel movimento di compressione rispetto a quello di espansione. Il lavoro complessivo effettuato in un ciclo sarà in questo caso dato da

$$L = \int_u^v f_1(s) ds + \int_v^u f_2(s) ds, \quad (3.67)$$

ove  $f_1$  e  $f_2$  indicano le forze (proporzionali alle pressioni) in ciascuna delle due fasi in funzione dello spostamento  $s$  ( $u$  e  $v$  denotano la minima e la massima elongazione). La (3.67) può scriversi

$$L = \int_u^v (f_1(s) - f_2(s)) ds$$

e, dunque, il lavoro effettuato in un ciclo è dato dall'area racchiusa nel diagramma di lavoro (Figura 3.30(b)).

Considerazioni analoghe portano a definire l'impulso  $I_{t_0}^{t_1}(f)$  di una forza variabile  $f(t)$  in un intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  come

$$I_{t_0}^{t_1}(f) = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt.$$

Ne segue facilmente il teorema dell'impulso

$$I_{t_0}^{t_1}(f) = Q(t_1) - Q(t_0), \quad (3.68)$$

ove  $Q(t) = m \frac{ds}{dt}$  è la quantità di moto, al tempo  $t$ , di una particella di massa  $m$  e  $f$  è la forza che agisce su di essa. La (3.68) non è altro che una conseguenza del teorema fondamentale del calcolo in quanto  $\frac{dQ}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2}$  e quest'ultimo membro, per il secondo principio della dinamica, è uguale a  $f(t)$ , cioè  $Q(t)$  è una primitiva di  $f(t)$  (rispetto alla variabile  $t$ ).

Usando invece la variabile indipendente  $s$  si ottiene (più faticosamente per il vero, si veda l'Esercizio 3.4.8) il *teorema delle forze vive*

$$L_{s_0}^{s_1}(f) = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2, \quad (3.69)$$

ove  $v_0$  e  $v_1$  sono le velocità corrispondenti ai punti di coordinata  $s_0$  e  $s_1$ , vale a dire il lavoro compiuto dalla forza complessiva  $f$ , che agisce su una particella di massa  $m$  determinandone lo spostamento da una posizione a un'altra, è uguale alla differenza tra l'energia cinetica finale e quella iniziale.

Considerazioni dello stesso tipo portano a definire il lavoro compiuto da un gas in funzione del volume  $V$  e della pressione  $p$  come

$$L = \int_{V_0}^{V_1} p dV,$$

la carica che passa in un intervallo di tempo  $[t_0, t_1]$  in un conduttore percorso dalla corrente  $i$  come

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} i(t) dt,$$

lo spazio percorso da un oggetto che si muove con velocità  $\nu$  come

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \nu(t) dt,$$

e così via.

## ESERCIZI

- 3.4.1** Una molla obbedisce alla legge di Hooke; se si applica una forza di 100 newton si allunga di 1 cm. Qual è il lavoro necessario per allungarla di 3 cm? Qual è la lunghezza della molla se si effettua un lavoro di 18 joule (1 joule = 1 newton · 1 metro)?
- 3.4.2** La piattaforma di una bilancia pesa-persone si abbassa di 2 mm se vi sale una persona di 60 kg. Supponendo che la bilancia si comporti come una molla, si calcoli il lavoro compiuto dalla forza peso se sulla bilancia sale una persona di 100 kg.
- 3.4.3** Se si potesse praticare un foro fino al centro della Terra una particella di massa  $m$  che vi cadesse sarebbe attratta verso il centro da una forza di intensità  $mg \frac{r}{R}$ , ove  $g$  è l'accelerazione di gravità,  $R$  il raggio terrestre e  $r$  la distanza della particella dal centro. Quale sarebbe il lavoro svolto dalla gravità per portare la particella dalla superficie terrestre fino al centro?

- 3.4.4** Calcolare il lavoro compiuto da un gas che passa dal volume  $V_0$  al volume  $V_1$  mediante:
- (a) una trasformazione isoterma ( $p \cdot V = \text{costante}$ );  
 (b) una trasformazione adiabatica ( $p \cdot V^\gamma = \text{costante}$ ).
- 3.4.5** Due elettroni si respingono con una forza che è proporzionale al quadrato della loro distanza. Supponendo di avere un elettrone fisso, calcolare il lavoro necessario per portare l'altro elettrone da una distanza  $2d$  a una distanza  $d$ .
- 3.4.6** Se due elettroni sono fissi lungo l'asse  $x$  nei punti di coordinate  $-1$  e  $+1$ , calcolare il lavoro necessario per portare un terzo elettrone sullo stesso asse dal punto di coordinata  $x = 10$  al punto di coordinata  $x = 3$ .
- 3.4.7** Sia  $f(x)$  una funzione derivabile; usando la condizione (3.31), provare che la funzione  $[f(x)]^2$  è derivabile e che

$$D[f(x)]^2 = 2f(x) \cdot Df(x).$$

- 3.4.8** Se  $s = s(t)$  è la legge oraria del moto (unidimensionale) di una particella e  $v = \frac{ds}{dt}$ , si verifichi che  $\frac{dv}{dt} = v \frac{dv}{ds}$ . Se ne deduca che  $\frac{1}{2}mv^2$  è una primitiva (usando  $s$  come variabile indipendente) di  $m \frac{dv}{dt}$  e quindi il teorema delle forze vive (3.69).
- 3.4.9** Un sacco di cemento da 100 kg viene sollevato da una gru. Il sacco ha un foro dal quale perde cemento in modo uniforme e ha perso la metà del suo contenuto nell'istante in cui la gru lo ha sollevato di 20 m. Qual è il lavoro compiuto dalla gru fino a questo istante?
- 3.4.10** Si supponga che a ogni funzione integrabile  $f$  su  $[a, b]$  e a ogni intervallo  $[c, d]$  contenuto in  $[a, b]$  sia possibile associare un numero  $B_c^d(f)$  in modo che valga la condizione di additività A) e risulti  $mc(d - c) \leq B_c^d(f) \leq Md(d - c)$  se  $m \leq f(x) \leq M$  in  $[c, d]$ ; si provi che allora  $B_c^d(f) = \int_c^d xf(x)dx$ . Dedurne la definizione di *momento* (rispetto all'origine) di un corpo unidimensionale con densità di massa  $f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ :

$$M = \int_a^b xf(x)dx,$$

e la definizione di *baricentro*:

$$b = \frac{\int_a^b xf(x)dx}{\int_a^b f(x)dx}.$$

## Calcolo differenziale

---

Il capitolo è dedicato alla formalizzazione e allo studio dettagliato di alcuni argomenti classici che sono i costituenti fondamentali di un corso di Analisi matematica, alcuni dei quali sono già stati introdotti nel capitolo precedente: la nozione di limite e di continuità, le proprietà delle funzioni continue, l'algebra e le regole della operazione di derivazione e l'applicazione di dette regole allo studio delle proprietà qualitative delle funzioni di una variabile reale. Si ottengono in questo modo metodi per la ricerca dei massimi e dei minimi delle funzioni, si studiano le proprietà delle funzioni derivabili in un intervallo e si dimostra la formula di Taylor che è, in un certo senso, il risultato conclusivo del calcolo differenziale.

### 4.1 La continuità e i limiti

Si studiano sistematicamente due nozioni che, implicite nel concetto di derivata, sono suscettibili di notevoli generalizzazioni e costituiscono strumenti molto comodi per la stessa esposizione delle ulteriori proprietà del calcolo differenziale elementare: si tratta delle nozioni di continuità e di limite.

La prima è già apparsa come proprietà delle funzioni derivabili (Proposizione 3.19, pag. 108), ma sappiamo anche che è una proprietà condivisa da una classe molto più vasta di funzioni (non così vasta però da includere indesiderate patologie), la seconda è una lieve estensione al continuo della nozione di limite per successioni, che ben conosciamo.

#### FUNZIONI CONTINUE

La nozione di funzione continua è strettamente legata all'idea intuitiva del rapporto fra causa ed effetto: come piccole variazioni delle cause determinano (di solito) piccole variazioni degli effetti, così si dicono continue quelle funzioni  $y = f(x)$  per le quali variando di poco la variabile indipendente  $x$  anche la  $y$  varia di poco. Come sappiamo, usando il linguaggio  $\varepsilon$ ,  $\delta$ , è possibile esprimere una formulazione precisa, quantitativa di questo concetto intuitivo (si veda (3.32), pag. 108).

**DEFINIZIONE 4.1** Una funzione  $f(x)$  si dice *continua* in  $x_0$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  è possibile trovare un numero positivo  $\delta$  tale che si abbia

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x \text{ con } |x - x_0| < \delta. \quad (4.1)$$

In generale il numero  $\delta$  dipenderà, oltre che da  $f$ , da  $\varepsilon$  e da  $x_0$ .

La situazione si può visualizzare nel piano cartesiano nel modo seguente.

Se  $P_0 = (x_0, y_0)$  è un punto del grafico di  $f$ , cioè  $y_0 = f(x_0)$ , i punti  $(x, y)$  tali che  $y_0 - \varepsilon < y < y_0 + \varepsilon$  formano una striscia  $V$  orizzontale che contiene  $P_0$ . La continuità di  $f$  significa che, *comunque* si scelga l'ampiezza di questa striscia, si può trovare una striscia verticale  $W$  (data da  $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ ) abbastanza sottile in modo che la parte del grafico di  $f$  che giace in  $W$  stia anche in  $V$  (Figura 4.1).

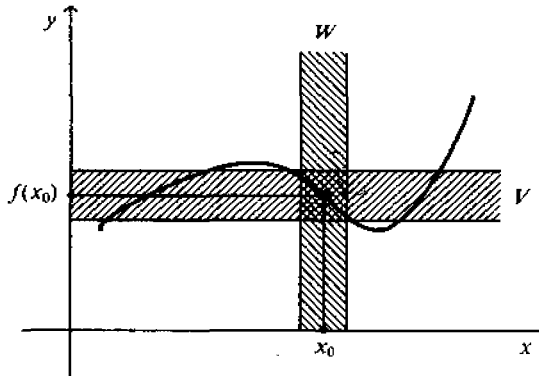


Figura 4.1

La condizione (4.1) si può anche esprimere dicendo che  $f(x) - f(x_0)$  è infinitesimo con  $x - x_0$  (o che  $f(x_0 + h) - f(x_0)$  è infinitesimo con  $h$ ) oppure che esiste il limite di  $f(x)$  per  $x$  tendente a  $x_0$  e che tale limite è  $f(x_0)$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

**OSSERVAZIONE 4.2** Si tenga presente che nella definizione precedente è stato tacitamente assunto che  $x_0$  risulti interno all'intervallo di definizione di  $f$ . Una funzione definita in un intervallo aperto  $(a, b)$  si dice *continua* in  $(a, b)$  se è continua in ogni punto di  $(a, b)$ , se invece  $f$  è definita in un intervallo chiuso  $[a, b]$  essa viene detta continua in  $[a, b]$  se è continua in  $(a, b)$  ed è *continua a destra* in  $a$  e *continua a sinistra* in  $b$ . Con ciò s'intende semplicemente che agli estremi dell'intervallo, in luogo della (4.1), si devono considerare rispettivamente le seguenti

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| < \varepsilon & \quad \text{per ogni } x \text{ con } a \leq x < a + \delta, \\ |f(x) - f(b)| < \varepsilon & \quad \text{per ogni } x \text{ con } b - \delta < x \leq b. \end{aligned}$$



Abbiamo visto (Proposizione 3.19) che ogni funzione derivabile è continua, in particolare sono funzioni continue i polinomi e le funzioni analitiche (quali  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x, \dots$ ). Più in generale sono continue le funzioni lipschitziane (Definizione 3.5, pag. 94). Infatti, se  $|f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|$  per ogni  $x, x'$  in un intervallo  $[a, b]$  allora la condizione (4.1) è soddisfatta in ogni punto  $x_0$  e per ogni  $\varepsilon$ , pur di prendere  $\delta = \varepsilon/K$ . Le verifiche dei prossimi due esempi sono dunque superflue (pur potendo giovarne).

**ESEMPI 4.3 (a)** Le funzioni affini  $f(x) = ax + b$  (che hanno come grafico una retta) sono continue. Infatti, si ha

$$|f(x) - f(x_0)| = |ax + b - (ax_0 + b)| = |a| \cdot |x - x_0| < \varepsilon$$

e quindi se  $a = 0$  la cosa è ovvia, se  $a \neq 0$  basterà prendere  $|x - x_0| < \varepsilon/|a|$  per avere  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , verificando così la (4.1) con  $\delta = \varepsilon/|a|$  (Figura 4.2).

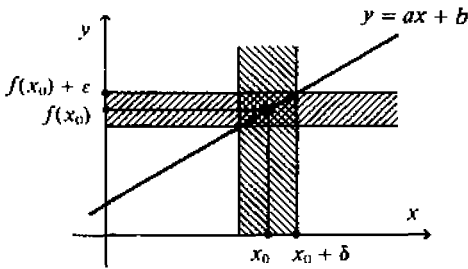


Figura 4.2

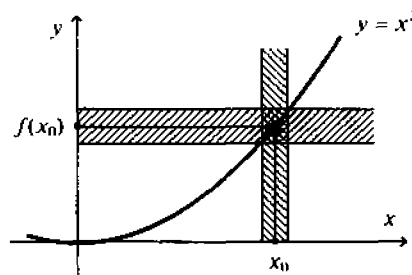


Figura 4.3

(b) La funzione  $f(x) = x^2$  è continua in ogni punto  $x_0$ . Infatti se  $|x - x_0| < \delta$  si ha

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| \leq \\ &\leq |x - x_0|(|x - x_0| + 2|x_0|) \leq \delta(\delta + 2|x_0|) \end{aligned}$$

e quindi  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  non appena  $\delta$  è scelto piccolo a sufficienza da verificare  $\delta(\delta + 2|x_0|) < \varepsilon$ , il che avviene per

$$0 < \delta < \sqrt{\varepsilon + |x_0|^2} - |x_0|.$$

Si noti che, nel caso delle funzioni affini (e più in generale per le funzioni lipschitziane), il numero  $\delta$  che verifica la condizione di continuità dipende solo da  $\varepsilon$ ; in questo caso invece  $\delta$  dipende sia da  $\varepsilon$  sia dal punto  $x_0$ .

(c) La funzione *segno di x*

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

non è continua per  $x = 0$ . La funzione *parte intera di x*<sup>(1)</sup>:

$$f(x) = [x] = n, \text{ se } n \text{ è un intero con } n \leq x < n + 1,$$

non è continua in alcun punto avente ascissa intera. Questi fatti si verificano banalmente osservando che nei punti indicati se  $\varepsilon < 1$  allora la condizione (4.1) non può essere soddisfatta, comunque piccolo si scelga  $\delta$ . Tali funzioni sono però continue a destra (ma non continue a sinistra) anche in tali punti.

<sup>(1)</sup> $[x]$  è definito come il massimo intero  $\leq x$ .

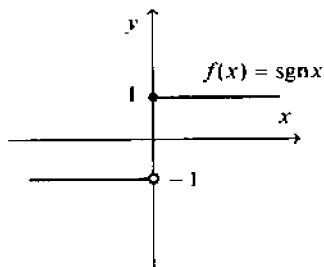


Figura 4.4

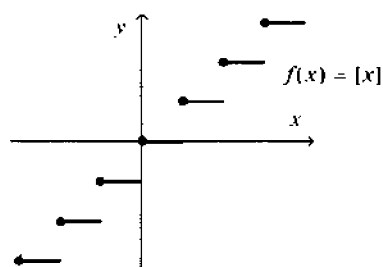


Figura 4.5

Si incontrano frequentemente fenomeni fisici la cui descrizione matematica porta a funzioni come queste che presentano dei “*salti*”. Si pensi alla collisione di un veicolo, alla rottura di un cavo, alla accensione di una lampadina, ... tutti casi che contravvengono la massima “*natura non facit saltus*”.

(d) La funzione

$$f(x) = \begin{cases} \cos 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

non è continua in 0 perché, comunque piccolo si prenda  $\delta > 0$ , vi sono valori di  $x$  con  $|x| < \delta$  nei quali  $f(x) = 1$  e altri nei quali  $f(x) = -1$  (i punti  $x = 1/2k\pi$  e  $x = 1/(2k+1)\pi$ , rispettivamente, vedi Figura 4.6). La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \cos 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

è invece continua per  $x = 0$  in quanto  $|f(x) - f(0)| < |x|$  e dunque il primo membro è infinitesimo con  $h$  (Figura 4.7)

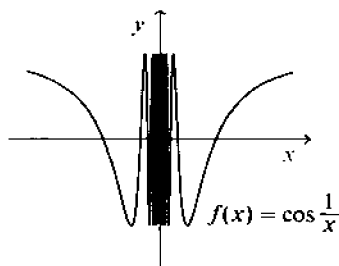


Figura 4.6

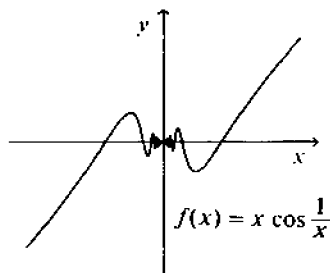


Figura 4.7

## PROPRIETÀ DEI LIMITI

Più volte in precedenza si è fatto uso della locuzione “passaggio al limite” (definizione di derivata, di infinitesimo, di funzione continua); in tali occasioni ci siamo limitati, tuttavia, a esporre le definizioni e le proprietà collegate alla nozione di limite che erano strettamente necessarie. Visto il ruolo importante che tale nozione svolge, vale ora la pena di formalizzarla, in modo anche da poterla adattare successivamente a situazioni più generali.

**DEFINIZIONE 4.4** Sia  $f$  una funzione definita in un intorno di un punto  $x_0$ , eccettuato al più il punto stesso, e sia  $L$  un numero reale. Si dice che  $f$  ha limite  $L$  per  $x$  che tende a  $x_0$ , e si scrive

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x),$$

se per ogni intorno  $U$  di  $L$  esiste un opportuno intorno  $V$  di  $x_0$  tale che:

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } x \text{ è un qualunque punto di } V \text{ diverso da } x_0, \\ \text{allora } f(x) \text{ appartiene a } U. \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

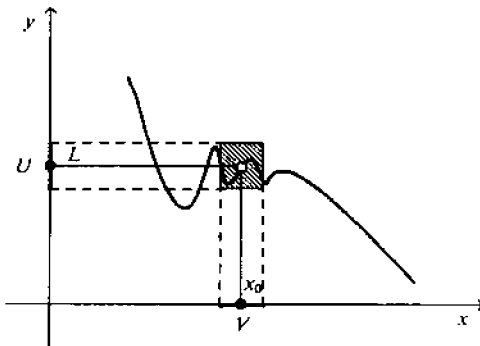


Figura 4.8  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ .

Si noti che la funzione  $f$  può non essere definita nel punto  $x_0$  e comunque il valore da essa assunto in tal punto è inessenziale e, contrariamente a quella che si ha nella definizione di continuità, non viene coinvolto nella definizione di limite. Per il resto la definizione di limite è del tutto simile a quella di continuità: infatti, la (4.2) si può porre nella forma equivalente

$$\left. \begin{array}{l} \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \text{ tale che se} \\ 0 < |x - x_0| < \delta \text{ allora } |f(x) - L| < \varepsilon. \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

La formulazione (4.2) si presta però a essere più facilmente estesa ad altri contesti. La (4.3) può anche essere riscritta nel modo seguente:

$$\left. \begin{array}{l} \text{per ogni } \varepsilon > 0 \text{ esiste } \delta > 0 \text{ tale che se} \\ 0 < \text{dist}(x, x_0) < \delta \text{ allora } \text{dist}(f(x), L) < \varepsilon. \end{array} \right\} \quad (4.4)$$



Qui, la scrittura  $\text{dist}(a, b)$  significa "distanza fra  $a$  e  $b$ "; questa nozione, che nel caso dei numeri reali (o complessi) coincide col modulo di  $a - b$ , ha una portata assai più vasta e si applica, come si vedrà in seguito, a situazioni più generali.

La definizione di limite non ha per il momento bisogno di esempi speciali per essere illustrata e manifestare il suo interesse: bastano le importanti nozioni che già si conoscono, delle quali essa è un caso particolare e contemporaneamente, se si vuole, una astrazione: quelle di infinitesimo, di derivata, di continuità (Definizioni 3.13, 3.16, 4.1). Possiamo, per comodità, riformulare tali definizioni; sarà un utile esercizio per il lettore riconoscerle in un linguaggio più sintetico.

**PROPOSIZIONE 4.5** Una funzione  $f(x)$  è infinitesima con  $x - x_0$  (o per  $x$  tendente a  $x_0$ ) se e solo se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . Una funzione  $f(x)$  è derivabile in  $x_0$  se e solo se esiste

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

e tale limite è il valore della derivata  $f'(x_0)$ .

Una funzione  $f(x)$  è continua in  $x_0$  se e soltanto se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Si ottengono poi facilmente, e con dimostrazione pressoché identica, le proprietà analoghe a quelle espresse per le successioni nelle Proposizioni 1.30, 1.32, 1.33, pag. 48-50.

**PROPOSIZIONE 4.6 (a)** Se il limite per  $x \rightarrow x_0$  di una funzione  $f(x)$  esiste, allora esso è unico.

(b) Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  allora  $f(x)$  è limitata in un intorno di  $x_0$ , cioè vi sono una costante  $K$  e un intorno  $V$  di  $x_0$  tali che se  $x \in V$  allora  $|f(x)| \leq K$ .

(c) Se  $f, g, h$  sono funzioni definite in un intorno di  $x_0$  con  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$  e se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$  allora si ha anche  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$  (teorema dei carabinieri).

(d) Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0$  allora vi è un intorno di  $V$  di  $x_0$  tale che per ogni  $x$  di  $V$  ( $x \neq x_0$ ) si ha  $f(x) > \frac{L}{2} > 0$  (permanenza del segno).

La proposizione che segue mostra poi che il calcolo dei limiti si comporta in modo molto naturale rispetto alle operazioni algebriche.

**PROPOSIZIONE 4.7** Se  $L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  e  $M = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$  allora

(a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$

(b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [cf(x)] = cL$  per ogni costante  $c$ ,

(c)  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

(d) se  $M \neq 0$  allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ .

Dunque somma, prodotto e quoziente, con denominatore diverso da zero, di funzioni continue sono ancora funzioni continue.

**DIMOSTRAZIONE** La (a) e la (b) sono pressoché ovvie, e comunque seguono dalla Proposizione 3.15, pag. 105, in quanto  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  se e solo se  $f(x) - L$  è infinitesimo con  $x - x_0$ . Per provare (c) si scriva

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - LM| &= |f(x)g(x) - f(x)M + f(x)M - LM| \leq \\ &\leq |f(x)| \cdot |g(x) - M| + M \cdot |f(x) - L| \end{aligned}$$

e si applichi nuovamente la Proposizione 3.15, pag. 105, osservando che  $|f(x)|$  è limitata in un intorno di  $x_0$ , mentre  $|g(x) - M|$  e  $|f(x) - L|$  sono per ipotesi infinitesimi.

La (d) segue in modo analogo dalla scrittura

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L}{M} \right| = \left| \frac{f(x)M - Lg(x)}{g(x)M} \right| \leq \frac{|f(x) - L|M + L|M - g(x)|}{|g(x)M|},$$

ove si tenga conto che in un intorno di  $x_0$  per la precedente Proposizione 4.6(c) si ha  $|g(x)| > |M|/2$  in un intorno di  $x_0$  e quindi  $1/g(x)$  è limitata.  $\square$

Un altro modo per ottenere la predetta proprietà (e altre ancora) è quello di utilizzare il teorema seguente, che permette di ricondurre il concetto di limite per funzioni a quello di limite per successioni.

**TEOREMA 4.8** Si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

se e solo se per ogni successione  $x_n$  convergente a  $x_0$ , ma con  $x_n \neq x_0$  (e  $x_n$  appartenente all'insieme di definizione di  $f$ ) abbiamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

**DIMOSTRAZIONE** Si supponga  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ ; dato  $\varepsilon > 0$  sia  $\delta > 0$  tale che  $|f(x) - L| < \varepsilon$  se  $0 < |x - x_0| < \delta$ ; se ora  $x_n$  è una successione convergente a  $x_0$  e con  $x_n \neq x_0$ , si avrà definitivamente  $0 < |x_n - x_0| < \delta$  e dunque definitivamente  $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ , cioè  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ .

Proviamo ora, per assurdo, il viceversa. Supponiamo, dunque, che la tesi  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  sia falsa e mostriamo che non è vera l'ipotesi, cioè che vi è almeno una successione  $x_n$  convergente a  $x_0$  per la quale non si ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ .

Se l'affermazione  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$  è falsa deve esistere  $\varepsilon_0 > 0$  tale che, comunque si prenda  $\delta > 0$ , risulta possibile trovare un  $x$  con  $0 < |x - x_0| < \delta$  e  $|f(x) - L| \geq \varepsilon_0$ . Prendendo successivamente  $\delta = 1, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots$  si troverebbero allora punti  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  per i quali si avrebbe

$$0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - L| \geq \varepsilon_0.$$

Abbiamo, così, trovato una successione  $x_n$  che converge a  $x_0$  ma per la quale  $f(x_n)$  non converge a  $L$ , in contrasto con l'ipotesi.  $\square$

Il teorema ora dimostrato può essere utile sia per calcolare il limite di alcune successioni sia per verificare che una data funzione non ha limite. Si consideri, per esempio, la funzione  $f(x) = \cos^2(1/x)$ , definita per  $x \neq 0$ ; le due successioni

$$a_n = \frac{1}{n\pi}, \quad b_n = \frac{1}{(n + 1/2)\pi}, \quad n = 1, 2, \dots$$

sono entrambe convergenti a 0 ma

$$f(a_n) = \cos^2 n\pi = 1, \quad f(b_n) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = 0$$

e dunque  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  non esiste.

La formulazione (4.2) della definizione di limite si estende naturalmente al caso in cui  $x$  tende a  $x_0$  da destra o da sinistra (si scrive, rispettivamente,  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ ): in luogo degli intorno  $V$  di  $x_0$ , basterà considerare gli intorno destri ( $x_0 < x < x_0 + \delta$ ) o gli intorno sinistri ( $x_0 - \delta < x < x_0$ ) (Figura 4.9).

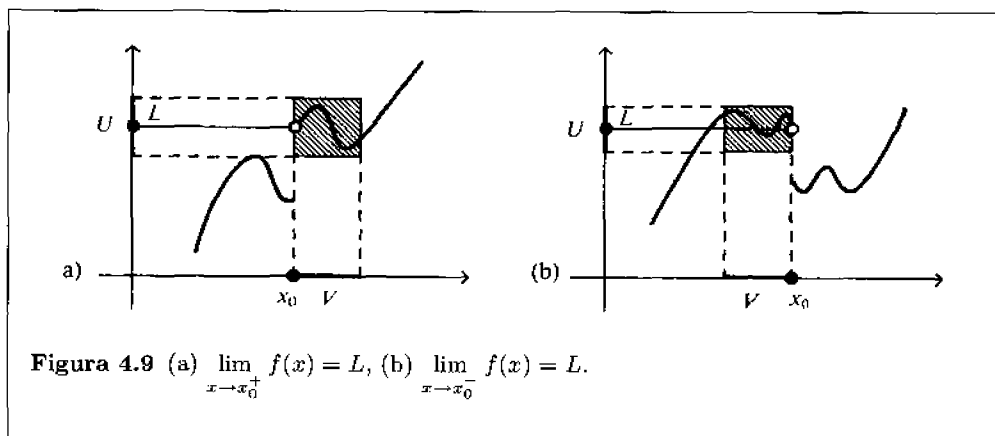


Figura 4.9 (a)  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ .

La definizione di limite si estende facilmente anche al caso in cui  $x$  tende a  $+\infty$  o a  $-\infty$ , considerando come  $V$  gli "intorni" di  $+\infty$  e di  $-\infty$ , rispettivamente, dati dalle semirette  $x > m$ ,  $x < -m$  (Figura 4.10).

Un'altra possibilità ancora è quella di avere il valore del limite uguale a  $+\infty$  oppure a  $-\infty$ , cioè di definire

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty.$$

A ciò si perviene considerando nelle definizioni di limite, in luogo dell'intorno  $U$  di  $L$ , gli intorno  $y > m$  oppure  $y < -m$  di  $+\infty$  e di  $-\infty$  (Figura 4.11).

Bisogna notare che al simbolo  $\infty$  non è associato alcun numero e, dunque, quando si usufruisce della scrittura  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$  (oppure  $-\infty$ ) si commette un vero e proprio abuso notazionale perché in queste situazioni  $f(x)$  non ha alcun limite per  $x \rightarrow x_0$ . Tuttavia, l'uso di tale notazione è assai comodo in molti contesti e d'altro canto, se interpretato con accortezza, non dà luogo a equivoci.

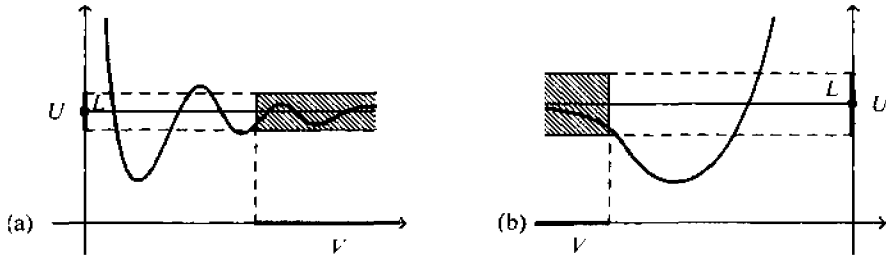


Figura 4.10 (a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ .

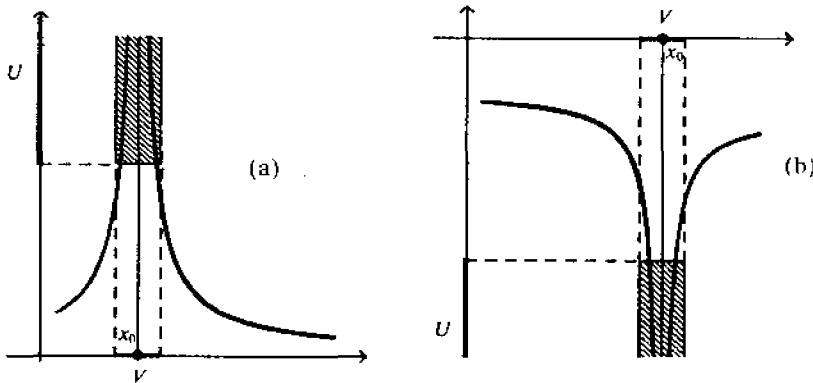


Figura 4.11 (a)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

Ovviamente sono possibili varie combinazioni delle possibilità sopra esposte. Basterà considerare qualche esempio.



**ESEMPI 4.9** (a) Si ha  $\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 2) = 4 \cdot 2^2 - 2 = 14$ , in quanto i polinomi sono funzioni continue; in tal caso per calcolare il limite basta sostituire alla variabile il valore  $x_0$  cui tende. Allo stesso modo si calcolano facilmente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^6 + 3}{1 + x + x^2} = 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x e^x}{1 + x^3} = \frac{e}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^6 + x| + x}{1 + x^2} = -\frac{1}{2}.$$

(b) Volendo ora calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

non è più possibile usare lo stesso metodo perché il denominatore ha limite 0 per  $x \rightarrow 2$ , ma con un semplice trucco algebrico si trova

$$\frac{x^3 - 8}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = x^2 + 2x + 4 \quad \text{per } x \neq 2,$$

quindi il limite cercato è  $2^2 + 2 \cdot 2 + 4 = 12$ .

In maniera analoga si calcola

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \frac{1}{2 + x} - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 - x}{2x(2 + x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(2 + x)} = -\frac{1}{4}.$$

(c) Se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  e se  $f(x) > 0$  in un intorno di  $x_0$ , allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ , infatti  $0 < f(x) < \varepsilon$  equivale a  $\frac{1}{f(x)} > \frac{1}{\varepsilon}$ .

Allo stesso modo se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  è uguale a  $+\infty$  o a  $-\infty$  allora  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$ .

Poiché per  $x > 0$  si ha  $e^x > x$ , abbiamo  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  e quindi  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x =$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/e^x = 0.$$

(d) Per la funzione  $f(x) = \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$  si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1 - x)(1 + x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x - 1) = -2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2,$$

mentre non esiste  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

Analogamente si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{1/x} = +\infty,$$

mentre non esiste  $\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x}$ .

(e) Le nozioni di limite destro e sinistro consentono di riformulare facilmente quelle di derivata destra e sinistra (Esercizio 3.2.10, pag. 121) e di continuità a destra e a sinistra (Osservazione 4.2). Per esempio, per la funzione

$$f(x) = \frac{1}{1 + |x|}$$

si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{1 + |h|} - 1 \right] = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{1 + h} - 1 \right] = -1$$

mentre

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{1+|h|} - 1 \right] = 1.$$

La funzione ha dunque derivata destra nell'origine uguale a  $-1$  e derivata sinistra uguale a  $1$ .

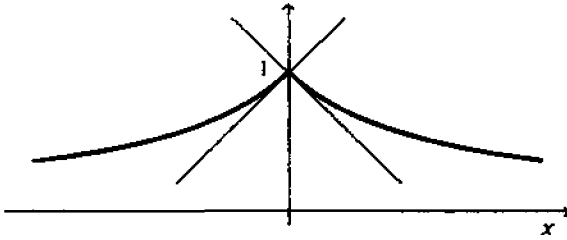


Figura 4.12 Grafico della funzione  $f(x) = 1/(1+|x|)$ .

## ESERCIZI

4.1.1 Usando la definizione verificare che:

- (a) la funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$  è continua per  $x = -1$ ,  
 (b) la funzione  $f(x) = \sqrt{x}$  è continua per ogni  $x \geq 0$ .

4.1.2 Trovare per quali valori di  $x$  le seguenti funzioni sono continue:

- (a)  $4x^3 - 3x + 2$ , (b)  $\frac{(x-3)(x+1)}{x^2-3}$ ,  
 (c)  $\frac{(x-1)(x-2)}{(x^3-x^2-4x+4)}$ , (d)  $\frac{1}{\sqrt{x^3-1}}$ ,  
 (e)  $\frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{sen} x}$ , (f)  $\frac{e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ .

4.1.3 Dire se le seguenti funzioni sono continue per ogni  $x$ :

- (a)  $||x^3 - 1|$ , (b)  $\frac{|2+x| - |x| - 2}{x}$ ,  
 (c)  $\sqrt{|x|}$ , (d)  $\frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$ .

4.1.4 Dire se la funzione  $f$  definita da  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$  se  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 1/2$  è continua per  $x = 0$ .

4.1.5 Determinare i valori di  $a$  e di  $b$  per cui è continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} -2 \operatorname{sen} x & \text{per } x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \operatorname{sen} x + b & \text{per } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & \text{per } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

4.1.6 Una funzione  $f(x)$  è definita da  $f(x) = \sqrt{1+x^2} + b$  se  $0 \leq x \leq 1$ ,  $f(x) = x^2 + bx + a$  se  $x < 0$  oppure  $x > 1$ . Trovare le costanti  $a, b$  in modo che  $f(x)$  risulti continua anche per  $x = 0, x = 1$ .

4.1.7 Le istruzioni sul dosaggio di un medicinale riportano le indicazioni seguenti:

- da 0 a 6 anni      mg  $5 + 2p$  pro die,
- da 6 a 14 anni    mg  $10 + 4p$  pro die,
- oltre 14 anni     mg 200 pro die

dove  $p$  indica il peso corporeo in kg. La funzione che esprime la quantità di medicinale da assumere quotidianamente è una funzione continua dell'età? Può divenirlo in certi casi?

4.1.8 Provare che la funzione  $f(x) = x(1-x)[x]$  è continua nell'intervallo  $(-1, 2)$  ( $[x]$  è il massimo intero  $\leq x$ ).

4.1.9 Calcolare, usando la definizione, i seguenti limiti e individuare i valori di  $x$  per cui i valori della funzione distano meno di  $1/1000$  dal limite stesso:

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+1}{x+1}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}}.$$

4.1.10 Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{array}{ll} (a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x}, & (b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x}; \\ (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}, & (d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}; \\ (e) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}, & (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}; \\ (g) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{1-x}, & (h) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}; \\ (i) \lim_{x \rightarrow -\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x), & (l) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x); \\ (m) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}-1}, & (n) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}; \\ (o) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & (p) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}}; \\ (q) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}, & (r) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[3]{x}}. \end{array}$$



4.1.11 Dopo aver dimostrato che  $|(1+x)^3 - 1| \leq 7|x|$  per  $-1 \leq x \leq 1$ , usando la definizione di limite verificare che  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^3 = 1$  (cioè trovare un opportuno  $\delta$  per ogni dato  $\varepsilon$ ).

4.1.12 Provare che:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin^2 x}{x^2} = +\infty.$$

4.1.13 Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)\sqrt{x^2 + 2}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^2}(\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1})).$$

4.1.14 Tenendo conto del Teorema 4.8 e del fatto che  $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$ , calcolare:

$$(a) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{(\frac{1-n^2}{2+n})}; \quad (b) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{tg(\frac{1}{n} - \frac{\pi}{2})}.$$

4.1.15 Se  $f$  è una funzione continua su  $[0,1]$  e se per ogni numero razionale si ha  $f(x) = 3 - 2x^2$ , quanto vale  $f(\pi/4)$ ?

4.1.16 Dato un poligono, lo si divida in due parti tramite una retta parallela all'asse  $y$  e sia  $f(x)$  l'area della parte del poligono che ha i punti di ascissa minore di  $x$ ; si provi che  $f(x)$  è una funzione continua.

## 4.2 Proprietà di alcune funzioni elementari

Questo breve paragrafo è dedicato a una esposizione delle principali proprietà delle funzioni trascendenti elementari.

### LE FUNZIONI ESPONENZIALE E LOGARITMO

Sulla funzione esponenziale  $f(x) = e^x$  abbiamo già molte informazioni: essa è definita come somma della serie esponenziale, convergente per ogni  $x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots;$$

è, dunque, una funzione analitica su tutta la retta reale e, quindi, è ovunque continua e derivabile, nonché integrabile su ogni intervallo. Risulta

$$De^x = e^x, \quad \int_a^b e^x dx = e^b - e^a.$$

Sappiamo anche (Paragrafo 2.1, pag. 64) che la funzione esponenziale è monotona crescente e assume ogni valore reale positivo, dunque è invertibile con inversa definita per ogni  $x > 0$ . Tale funzione inversa si chiama *logaritmo naturale* e si indica con  $\ln x$  (o anche  $\log x$ ,  $\lg x$ ). È stato anticipato (ma non ancora dimostrato) uno sviluppo in serie convergente per  $0 < |x| < 2$  di tale funzione; si veda anche l'Esempio 3.30.



Siamo ora in grado di dimostrare parecchie proprietà del logaritmo. Per definizione si ha  $y = e^x$  se e solo se  $x = \ln y$ ,  $y > 0$  e in particolare

$$\begin{aligned} \ln e^x &= x & \text{per ogni } x, \\ e^{\ln x} &= x & \text{per ogni } x > 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

**PROPOSIZIONE 4.10** Se  $x, y > 0$  allora

$$\ln xy = \ln x + \ln y; \quad (4.6)$$

se  $x$  è un numero razionale e  $a > 0$  si ha poi

$$\ln a^x = x \ln a. \quad (4.7)$$

**DIMOSTRAZIONE** Se  $X = \ln x$ ,  $Y = \ln y$ ,  $Z = \ln xy$ , dalla prima delle (4.5) si ha  $e^X = x$ ,  $e^Y = y$ ,  $e^Z = xy$  e quindi  $e^Z = e^X e^Y = e^{X+Y}$ , da cui (per la monotonia dell'esponenziale)  $Z = X + Y$  come si voleva.

La formula (4.7) è certamente vera per  $x = 0$  e  $x = 1$  e dunque applicando ripetutamente la (4.6) si avrà per ogni intero  $n > 0$

$$\ln a^n = n \ln a;$$

ma dalla stessa (4.6)  $n \ln a^{1/n} = \ln a$ , da cui

$$\ln a^{1/n} = \frac{1}{n} \ln a.$$

Dunque se  $m, n$  sono interi positivi

$$\ln a^{m/n} = m \ln a^{1/n} = \frac{m}{n} \ln a.$$

Infine, se  $x$  è un razionale negativo allora

$$\ln a^x + \ln a^{-x} = \ln(a^x a^{-x}) = \ln 1 = 0$$

da cui

$$\ln a^x = -\ln a^{-x} = x \ln a.$$

Vale la pena di mettere in evidenza che, per  $x = -1$ , si ha

$$\ln \frac{1}{a} = -\ln a. \quad \square$$

**PROPOSIZIONE 4.11** La funzione  $\ln x$  è continua per ogni  $x > 0$ , inoltre è derivabile e si ha

$$D \ln x = \frac{1}{x}, \quad x > 0. \quad (4.8)$$

**DIMOSTRAZIONE** Anzitutto notiamo che la funzione logaritmo è strettamente crescente; infatti, se  $x_1 < x_2$  si deve avere  $\ln x_1 < \ln x_2$ , poiché in caso contrario sarebbe  $x_1 = e^{\ln x_1} \geq e^{\ln x_2} = x_2$ , assurdo. Si osservi poi che si ha per ogni  $x$  reale

$$1 + x \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x; \quad (4.9)$$

ciò è immediato se  $x \geq 0$  e segue dall'Osservazione 1.16, pag. 36, se  $x < 0$ . D'altra parte risulta anche

$$e^x \leq \frac{1}{1-x}, \quad x < 1. \quad (4.10)$$

Se  $0 \leq x < 1$  tale disuguaglianza si deduce dal confronto fra le serie  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , mentre se  $x < 0$ , ponendo  $u = -x$  essa equivale a  $e^{-u} \leq \frac{1}{1+u}$ , cioè  $1+u \leq e^u$ .

Dalla (4.9), scegliendo  $x > -1$  e passando ai logaritmi si ottiene

$$\ln(1+x) \leq x, \quad x > -1,$$

mentre dalla (4.10), scelto  $x = u/(1+u)$  con  $u > -1$ <sup>(2)</sup> si ha  $e^{u/(1+u)} \leq 1+u$  e pertanto passando anche in questo caso ai logaritmi si conclude che

$$\frac{u}{1+u} \leq \ln(1+u), \quad u > -1.$$

Riassumendo abbiamo dimostrato che per  $x > -1$  si ha

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x. \quad (4.11)$$

da cui segue immediatamente (Proposizione 4.6(c))

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad (4.12)$$

Il limite ora trovato è piuttosto importante e conviene conoscerlo a memoria; esso si può scrivere

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = 1$$

e, quindi, equivale alla derivabilità della funzione  $\ln x$  nel punto  $x = 1$  (con derivata uguale a 1). Se  $x_0$  è un qualunque numero positivo, si ha però

$$\frac{\ln(x_0+h) - \ln x_0}{h} = \frac{1}{h} \ln \frac{x_0+h}{x_0} = \frac{1}{x_0} \cdot \frac{\ln(1+h/x_0)}{h/x_0}$$

e quindi, per (4.12), il rapporto incrementale tende, per  $h \rightarrow 0$ , a  $1/x_0$  il che dimostra sia la (4.8), sia la continuità di  $\ln x$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE 4.12** Per  $|x| < 1$  si ha

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (4.13)$$

risultato che era stato anticipato nella (2.15), pag. 66, e nell'Esempio 3.30.

**DIMOSTRAZIONE** Si indichi con  $L(x)$  la somma della serie  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ , ovviamente convergente per  $|x| < 1$ ; per il Teorema 3.21 di derivazione per serie si ha

$$L'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1.$$

D'altra parte, abbiamo appena dimostrato che  $D \ln x = 1/x$  e quindi  $D \ln(1+x) = 1/(1+x)$ . La funzione  $\ln(1+x) - L(x)$  ha derivata nulla e allora è costante (Teorema 3.27) per  $|x| < 1$ . Essendo poi  $L(0) = 0 = \ln(1+0)$  si conclude  $\ln(1+x) = L(x)$ , cioè la (4.13).  $\square$

<sup>(2)</sup>Si noti che se  $u > -1$  allora  $x = u/(1+u) < 1$ , dunque la seconda delle (4.10) è soddisfatta.

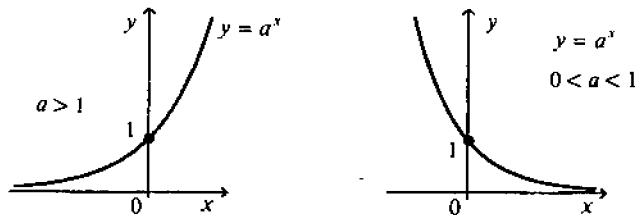
**DEFINIZIONE 4.13** Per qualunque  $x$  reale e  $a > 0$  si ponga

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad (4.14)$$

osservando che questa formula è un teorema quando  $x$  è razionale (Proposizione 4.10); è, invece, una definizione per  $x$  irrazionale.

È facile vedere che la continuità di  $e^x$  implica la continuità di  $f(x) = a^x$ ; dalla proprietà della funzione esponenziale segue poi che essa è crescente se  $a > 1$ , decrescente se  $a < 1$ , che assume tutti i valori reali positivi e che valgono le abituali regole di calcolo con gli esponenti:

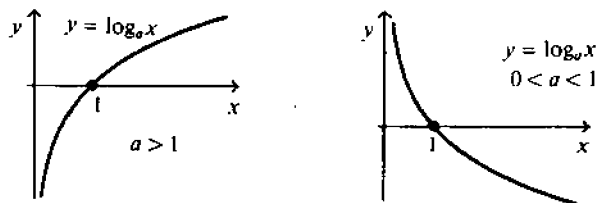
$$a^{x+y} = a^x a^y, \quad a^{xy} = (a^x)^y, \quad (ab)^x = a^x b^x.$$



**Figura 4.13** Grafico della funzione esponenziale  $f(x) = a^x$ .

Per  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , si definisce  $\log_a x$  la funzione inversa di  $a^x$ . Si verificano facilmente le proprietà

$$\begin{aligned} \log_a xy &= \log_a x + \log_a y, \\ \log_a x^y &= y \log_a x, \\ \log_a b \log_b c &= \log_a c. \end{aligned} \quad (4.15)$$



**Figura 4.14** Grafico della funzione logaritmo  $f(x) = \log_a x$ .

## LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Consideriamo le funzioni  $\cos x$ ,  $\sin x$  definite nella trigonometria elementare come l'ascissa e l'ordinata di un punto  $P$  sulla circonferenza di raggio unitario tale che  $x$  sia la misura dell'arco  $PA$  orientato in senso antiorario e  $A = (1,0)$ . La lunghezza della circonferenza è per definizione  $2\pi$ , dunque in questo modo le funzioni coseno e seno sono definite per  $0 \leq x \leq 2\pi$ , ma possono essere prolungate per periodicità ponendo

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2k\pi) = \sin x, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

**PROPOSIZIONE 4.14** Si ha

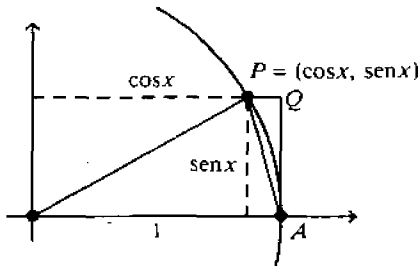
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1; \quad (4.16)$$

inoltre le funzioni  $\cos x$ ,  $\sin x$  sono derivabili per ogni  $x$  e si ha

$$D \cos x = -\sin x, \quad D \sin x = \cos x. \quad (4.17)$$

**DIMOSTRAZIONE** Con riferimento alla Figura 4.15, siccome la corda  $PA$  è minore dell'arco  $PA$ , che a sua volta è minore di  $PQ + QA$  (se  $|x| < \pi/2$ ):

$$\sqrt{(1 - \cos x)^2 + \sin^2 x} \leq |x| \leq (1 - \cos x) + |\sin x|. \quad (4.18)$$



**Figura 4.15** Diseguaglianza (4.18).

Quadrando e dividendo per  $2|x|$  la prima di queste si ha

$$\frac{1 - \cos x}{|x|} \leq \frac{1}{2}|x|,$$

da cui segue

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \quad (4.19)$$

Invece dalla seconda delle (4.18)

$$1 - \frac{1 - \cos x}{|x|} \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1,$$

e dunque, da (4.19), tenendo conto che  $\left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$  segue

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| = 1.$$

Si noti che la (4.19) e la (4.16) equivalgono alla derivabilità di  $\cos x$  e di  $\operatorname{sen} x$  per  $x = 0$  (con derivate 0 e 1, rispettivamente). La derivabilità, e quindi la continuità, delle funzioni coseno e seno in ogni punto  $x_0$  segue subito dalle formule di addizione e dalla derivabilità in 0; per esempio, per il seno abbiamo

$$\operatorname{sen}(x_0 + h) = \operatorname{sen} x_0 \cos h + \cos x_0 \operatorname{sen} h$$

da cui

$$\frac{\operatorname{sen}(x_0 + h) - \operatorname{sen} x_0}{h} = \operatorname{sen} x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

e dalle (4.19), (4.16) si ricava  $D \operatorname{sen} x_0 = \cos x_0$ .

Analogamente dalla formula di addizione per il coseno si ha  $D \cos x_0 = -\operatorname{sen} x_0$ .  $\square$

**PROPOSIZIONE 4.15** Per ogni numero reale  $x$  si ha

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (4.20)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots. \quad (4.21)$$

**DIMOSTRAZIONE** Si indichino con  $C(x)$  e  $S(x)$  le somme delle serie (2.13), (2.14)

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Dal teorema di derivazione per serie sappiamo che (Formula (3.40))

$$DC(x) = -S(x), \quad DS(x) = C(x) \quad (4.22)$$

e d'altra parte

$$C(0) = 1, \quad S(0) = 0. \quad (4.23)$$

Dimostriamo che vi è un'unica coppia di funzioni che verifica le equazioni (4.22) e le condizioni (4.23); la tesi seguirà dal fatto che anche le funzioni trigonometriche elementari  $\cos x$ ,  $\operatorname{sen} x$  verificano tali relazioni (le (4.22) sono date dalle (4.17), mentre le (4.23) seguono dalla definizione).

Siano allora  $C_1$ ,  $S_1$  e  $C_2$ ,  $S_2$  due coppie di funzioni che verificano le (4.22), (4.23); posto

$$c(x) = C_1(x) - C_2(x), \quad s(x) = S_1(x) - S_2(x)$$

si ha

$$c'(x) = -s(x), \quad s'(x) = c(x), \quad c(0) = s(0) = 0. \quad (4.24)$$

Ma da (4.24), tenendo conto che  $D[f(x)]^2 = 2f(x)f'(x)$  (Esercizio 3.4.7, pag. 137),

$$D(c^2 + s^2) = 2(cc' + ss') = 2(-cs + sc) = 0,$$

ove si è scritto brevemente  $c$  per  $c(x)$  e  $s$  per  $s(x)$ . Ma allora la funzione  $c^2(x) + s^2(x)$  avendo derivata identicamente nulla è costante; tuttavia visto che  $c^2(0) + s^2(0) = 0$  tale costante non può essere che 0. Se ne conclude  $c^2(x) + s^2(x) = 0$  per ogni  $x$  e questo comporta

$$C_1(x) = C_2(x), \quad S_1(x) = S_2(x). \quad \square$$

## ALCUNI LIMITI NOTEVOLI

Riassumiamo qui, per comodità del lettore, alcuni importanti limiti di funzioni:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad (4.25)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad (4.26)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad (4.27)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1, \quad (4.28)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{1/y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (4.29)$$

Di questi, il primo e il quarto sono stati dimostrati da poco; il secondo segue dal primo osservando che  $1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}$ :

$$\frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen}^2 x/2}{(x/2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sen} x/2}{x/2}\right)^2 \rightarrow \frac{1}{2}$$

per  $x \rightarrow 0$ .

Il limite (4.27) segue immediatamente dallo sviluppo in serie di  $e^x$ ; si noti che dalla (4.14) segue anche per  $a > 0$

$$\frac{a^x - 1}{x} = \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \ln a$$

e dunque in generale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a. \quad (4.30)$$

Il limite (4.29) si ottiene dalla definizione di potenza a esponente reale (4.14) e dalla continuità dell'esponenziale

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{1/y} = \lim_{y \rightarrow 0} e^{\ln(1+y)/y} = e^{\lim_{y \rightarrow 0} \ln(1+y)/y} = e^1 = e;$$

ponendo  $y = \frac{1}{x}$  e osservando che per  $x \rightarrow +\infty$  si ha  $y \rightarrow 0^+$ , mentre per  $x \rightarrow -\infty$  si ha  $y \rightarrow 0^-$ , si ottengono anche le altre due espressioni nella (4.29) (da confrontare col limite (1.41), pag. 52!)

## ESERCIZI

**4.2.1** Trovare, se esistono, i limiti per  $x \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \pi/4$ ,  $x \rightarrow +\infty$  delle seguenti funzioni:

$$\frac{\operatorname{sen} 3x}{x}; \quad \frac{\operatorname{sen} x^2}{x}; \quad \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}^2 x}; \quad \frac{\cos 2x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{sen} x}.$$

**4.2.2** Trovare i limiti per  $x \rightarrow 0$  delle seguenti funzioni:

$$\frac{\cos 2x}{1 + \operatorname{sen} x}, \quad \frac{x \operatorname{sen} x}{2 \operatorname{sen} 2x^2}, \quad \frac{\operatorname{tg} x}{x}$$

e ricavarne i limiti per  $n \rightarrow +\infty$  delle successioni

$$\frac{\cos \frac{2}{n}}{1 + \operatorname{sen} \frac{1}{n}}, \quad \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n}}{2n \operatorname{sen} \frac{2}{n^2}}, \quad n \operatorname{tg} \frac{1}{n}.$$

4.2.3 Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right); \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( 1 + \operatorname{sen} \frac{1}{x} \right); \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 \left( \operatorname{sen} \frac{1}{n} - \operatorname{tg} \frac{1}{n} \right).$$

4.2.4 Trovare i limiti per  $x \rightarrow 0$  delle funzioni seguenti:

$$\frac{\ln(1+10x)}{x}; \quad \frac{1-e^x}{\operatorname{sen} x}; \quad \frac{\ln(\cos x)}{x^2}; \quad \frac{(1-\cos 3x)^2}{x^2(1-\cos x)}.$$

4.2.5 Dire se esistono i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x} + 3}{e^{1/x} + 1}; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{1-x}}}.$$

4.2.6 Si consideri l'equazione di 2° grado  $ax^2 + bx + c = 0$  e si dica cosa avviene delle sue radici quando il coefficiente  $a$  tende a 0 mentre  $b$  e  $c$  rimangono fissi (con  $b \neq 0$ ).

4.2.7 Provare che per ogni intero  $n$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty.$$

[Confrontare  $\sum x^n/n!$  col suo termine  $(n+1)$ -esimo.]

4.2.8 Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{2}{x} \right)^x; \quad \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x}; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x^3} \right)^{x/(x+1)}.$$

4.2.9 Sia  $x$  la misura di un angolo in gradi sessagesimali, e non in radianti. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

4.2.10 Calcolare, se esistono,

$$\begin{array}{lll} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{3x+2}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \operatorname{sen} x)}{x}; \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{1 - e^{2x}}; & \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x + 1) \operatorname{sen} \frac{2}{x^2}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{1 - \cos x}; \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{7}{x} \right)^{2x}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen}^2 x}{x^2}; & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \sqrt{|x|}}{|x|}. \end{array}$$

4.2.11 Studiare la convergenza delle seguenti serie mediante serie asintoticamente equivalenti note:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen} \left( \frac{2n}{1+n^3} \right); & \text{(b)} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{tg} \left( \frac{n}{1+n^2} \right); \\ \text{(c)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \ln \frac{n^2}{n^2-1}; & \text{(d)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left( 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right). \end{array}$$

**4.2.12** Dimostrare che se  $0 < |x| < 1$  allora

$$\left| 1 - \frac{\operatorname{sen} x}{x} \right| < \frac{x^2}{1 - x^2}.$$

**4.2.13** La sensazione sonora viene misurata in decibel (dB) utilizzando la funzione  $S = 10 \cdot \operatorname{Log}(I/10^{-12})$ , dove  $I$ , misurata in watt/m<sup>2</sup>, è l'intensità del suono e il logaritmo è in base 10.

Calcolare la sensazione sonora in

- (a) una conversazione ordinaria:  $I = 10^{-8}$  w/m<sup>2</sup>;
- (b) una conversazione ad alta voce:  $I = 10^{-6}$  w/m<sup>2</sup>;
- (c) traffico diurno:  $I = 10^{-4}$  w/m<sup>2</sup>.

Calcolare il rapporto tra l'intensità di un urlo da 80dB e un bisbiglio di 20dB.

**4.2.14** Il decadimento delle sostanze radioattive avviene secondo la legge  $\frac{ds}{dt} = -ks$ , dove  $s$  indica la quantità di sostanza presente all'istante  $t$ .

L'isotopo I<sup>131</sup> dello iodio, importante nell'uso medico, ha un tempo di dimezzamento di 8,08 giorni (cioè dopo 8,08 giorni ne rimarrà la metà di quello che si aveva all'inizio).

- (a) Determinare la costante di decadimento  $k$ .
- (b) Calcolare quanto iodio si avrà dopo 25 giorni se all'inizio se ne avevano 100 grammi.
- (c) Se un campione di iodio, con radioattività di 250 curie (proporzionale alla quantità di iodio che compone il campione), lascia il laboratorio alle otto di mattina e arriva all'ospedale, in cui viene utilizzato, l'indomani a mezzogiorno, calcolare la sua radioattività al momento dell'utilizzazione.

**4.2.15** Una banca avvisa che pagherà una rateo di interesse annuo del 5,5% composto semestralmente, mentre una seconda banca avvisa che pagherà un interesse del 5,25% con continuità. Se avete un capitale  $C$  da investire, quanto avreste dopo un anno nella prima e nella seconda banca? In quale delle due deciderete di depositare il capitale?

**4.2.16** Si stima che la siccità colpisca una piantagione di patate facendone seccare, nell'unità di tempo, un numero proporzionale al numero totale di piante ancora vive. Se in 25 giorni è seccato il 45% delle iniziali 200 piante, calcolare il numero di piante vive in funzione del tempo.

### 4.3 Proprietà delle funzioni continue

Come già detto, una funzione si dice continua in un intervallo chiuso  $[a, b]$  se è continua in ogni punto interno e se è continua a destra in  $a$  e a sinistra in  $b$ , cioè se

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad x_0 \in (a, b), \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

Le funzioni continue sugli intervalli chiusi sono dotate di importanti proprietà che, apparendo piuttosto intuitive, sono state a lungo fraintese nello sviluppo del calcolo infinitesimale, al punto da indurre matematici illustri a ritenere che non abbisognassero



di dimostrazione alcuna. Questo paragrafo è dedicato principalmente allo studio di queste proprietà, che sono notevoli anche perché la classe delle funzioni continue è la più ampia classe di funzioni che ne gode.

## FUNZIONI CONTINUE SUGLI INTERVALLI CHIUSI

Ricordiamo che una funzione reale  $f(x)$  definita su un insieme  $I$  ha massimo in  $I$  se vi è un  $x_0 \in I$  tale che

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{per ogni } x \in I;$$

il numero  $f(x_0)$  è il *massimo* di  $f$  in  $I$  e  $x_0$  è il *punto di massimo*. Una definizione analoga si ha per il minimo. Talvolta si preferisce specificare, con lo stesso significato, *massimo assoluto* e *minimo assoluto*.

La funzione  $f(x) = 1/x$ , per esempio, definita su  $(0, +\infty)$  non è ivi dotata né di massimo né di minimo; tuttavia la stessa funzione su  $[1/2, +\infty)$  è dotata di massimo uguale a 2 (assunto nel punto  $x = 1/2$ ) ma non ha minimo; su  $(0, 3]$  ha poi minimo uguale a  $1/3$  (nel punto  $x = 3$ ) ma non ha massimo; su  $[1, 2]$  infine, ha sia massimo sia minimo, uguali, rispettivamente, a 1 e a  $1/2$ .

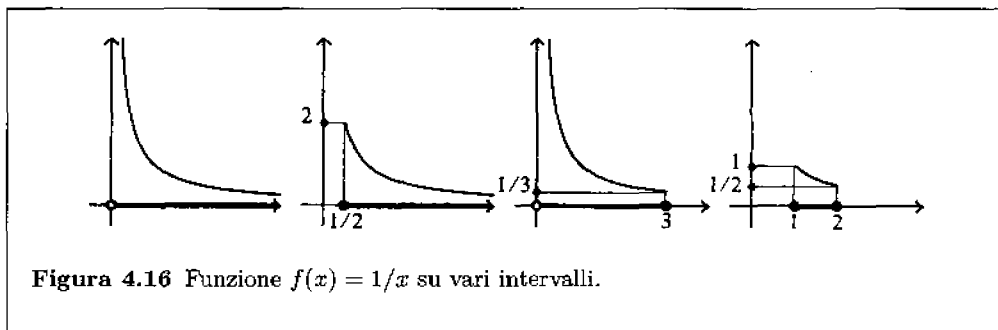


Figura 4.16 Funzione  $f(x) = 1/x$  su vari intervalli.

La situazione è chiarita da questo importante teorema.

**TEOREMA 4.16** (di Weierstrass). Ogni funzione continua su un intervallo chiuso  $[a, b]$  è ivi limitata e assume massimo e minimo.

**DIMOSTRAZIONE** Adottando la convenzione di porre uguale a  $+\infty$  l'estremo superiore degli insiemi superiormente illimitati, si ha che ogni insieme di numeri reali è dotato di estremo superiore, finito o infinito.

Sia ora  $f$  una funzione continua su  $[a, b]$  e poniamo

$$A = \sup_{x \in [a, b]} f(x);$$

dividiamo l'intervallo  $[a, b]$  in due parti uguali  $[a, c]$  e  $[c, b]$  tramite il punto medio  $c$  e osserviamo che per uno almeno di essi l'estremo superiore ivi assunto dalla  $f$  deve

essere uguale ad  $A^{(3)}$ . Si prenda in considerazione tale intervallo (assumendo quello di sinistra se entrambi soddisfano la condizione) e si iteri il procedimento.

Si determina in questo modo a ogni passo  $n = 1, 2, \dots$  un intervallo *chiuso*  $I_n$ , di ampiezza  $(b-a)/2^n$ , contenuto nei precedenti e tale che

$$\sup_{I_n} f(x) = \sup_{[a,b]} f(x) = A.$$

Per una ben nota proprietà dei numeri reali (vedi Appendice), esiste un unico punto  $x_0$  che appartiene a tutti gli  $I_n$ .

Si deve avere

$$A < +\infty, \quad f(x_0) = A; \quad (4.31)$$

infatti, dato un numero  $\varepsilon > 0$  dalla continuità di  $f$  si deduce che in un opportuno intorno di  $x_0$

$$f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

dunque  $f$  è limitata su uno degli intervalli  $I_n$  e  $f(x_0) + \varepsilon$  maggiore i valori assunti da  $f$  su  $I_n$ : in altre parole

$$f(x_0) \leq A < f(x_0) + \varepsilon. \quad (4.32)$$

Si ottiene subito allora che  $A < +\infty$ ; ma siccome  $\varepsilon$  è arbitrario, si ricava anche che  $f(x_0) = A$  e dunque  $x_0$  è punto di massimo per  $f$  su  $[a, b]$ .

Analogamente si dimostra che  $f$  è dotata di minimo su  $[a, b]$ .  $\square$

L'esempio visto sopra della funzione  $f(x) = 1/x$  mostra che le ipotesi del teorema di Weierstrass non possono essere indebolite. Gli intervalli chiusi  $[a, b]$  della retta sono casi molto particolari di insiemi  $C$  che in linguaggio "moderno" si definiscono *compatti per successioni* o in breve *compatti*, intendendo con questo che da ogni successione di  $C$  si può estrarre una sottosuccessione convergente. Il teorema di Weierstrass vale in generale per funzioni continue sui compatti.

Il risultato seguente, invece, fa uso di un'altra proprietà degli intervalli della retta reale: la *connessione*.

**TEOREMA 4.17 (di esistenza degli zeri).** Sia  $f$  una funzione continua in  $[a, b]$  tale che  $f(a) < 0$ ,  $f(b) > 0$ ; esiste allora (almeno) un punto  $x_0$  in  $(a, b)$  tale che  $f(x_0) = 0$ .

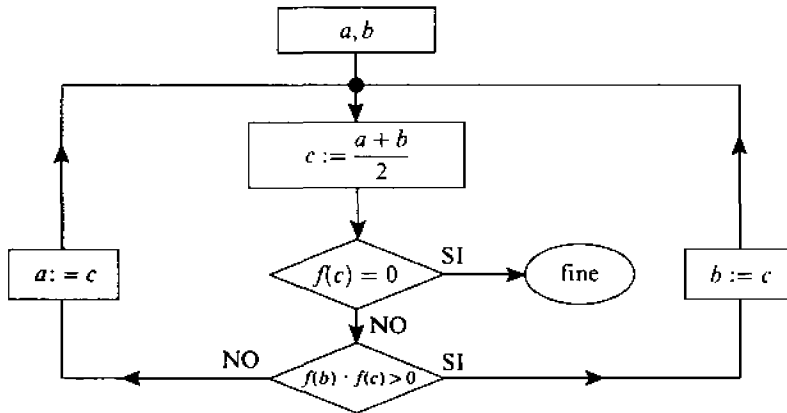
**DIMOSTRAZIONE** Anche in questo caso usiamo il metodo di bisezione: dividiamo  $[a, b]$  in due parti uguali  $[a, c]$ ,  $[c, b]$ . Se  $f(c) = 0$  si ha la tesi, altrimenti prendiamo in considerazione, dei due intervalli, quello per cui agli estremi la funzione ha valori di segno discorde. Iterando il procedimento, si costruisce a ogni passo un intervallo che al passo  $n$ -esimo ha ampiezza  $(b-a)/2^n$ , è contenuto nei precedenti ed è tale che ai suoi estremi la funzione ha segni opposti. Se in uno dei punti di suddivisione si trova  $f(c) = 0$  il procedimento ha termine dopo un numero finito di passi; altrimenti viene generata una successione di intervalli chiusi aventi un unico punto  $x_0$  in comune. Risulta  $f(x_0) = 0$

<sup>(3)</sup> Infatti se  $A_1 = \sup_{[a,c]} f(x)$ ,  $A_2 = \sup_{[c,b]} f(x)$  e se  $A = +\infty$  deve, ovviamente, essere  $A_1 = +\infty$  oppure

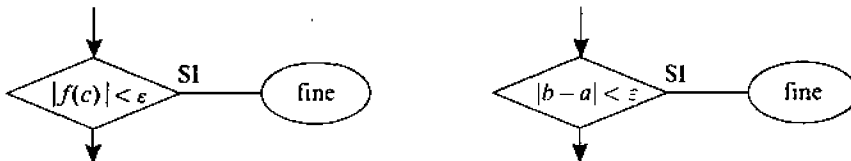
$A_2 = +\infty$ . Se invece  $A < \infty$  si ha  $A_1 \leq A$ ,  $A_2 \leq A$  e  $A \leq \max[A_1, A_2]$  perché  $\max[A_1, A_2]$  è un maggiorante dell'insieme dei valori assunti da  $f$  sull'intero intervallo  $[a, b]$ ; dunque  $A = \max[A_1, A_2]$  ed è uguale (almeno) a uno dei due.

perché, se, per esempio fosse  $f(x_0) > 0$ , per il teorema della permanenza del segno (Proposizione 4.6(d)) esisterebbe un intorno di  $x_0$  ove  $f$  è positiva, ma ciò sarebbe in contraddizione con la definizione degli intervalli.  $\square$

La dimostrazione può essere riassunta nel seguente diagramma a blocchi



Se si vuole porre il procedimento in forma algoritmica, in modo che termini dopo un numero finito di passi, basterà fornire la precisione richiesta e introdurre nel diagramma i seguenti controlli,



Vi sono tuttavia metodi più efficienti per la determinazione degli zeri delle funzioni.

**TEOREMA 4.18** (di esistenza dei valori intermedi). Sia  $f$  una funzione continua sull'intervallo  $[a, b]$ ; allora essa assume tutti i valori compresi fra il suo minimo  $m$  e il suo massimo  $M$  su  $[a, b]$ . L'immagine di  $f$  è dunque l'intervallo chiuso  $[m, M]$ .

**DIMOSTRAZIONE** Sia  $c$  un punto ove  $f(x)$  assume il valore minimo  $m$  e sia  $d$  un punto ove  $f$  assume il suo valore massimo  $M$ . Si supponga, per fissare le idee, che risulti  $c < d$ ; sia  $\xi$  un numero compreso fra  $m$  e  $M$ ; la funzione  $f(x) - \xi$  è continua sull'intervallo  $[c, d]$ , contenuto in  $[a, b]$ , ed è negativa nel primo estremo, positiva nel secondo. Dal teorema precedente si deduce allora che esiste  $x_0 \in [c, d]$  tale che  $f(x_0) - \xi = 0$ , cioè  $f(x_0) = \xi$ .  $\square$

## ESERCIZI

- 4.3.1** Provare che esiste un numero  $x_0$  con  $0 < x_0 < 1$  in cui si annulla la funzione  $f(x) = e^x - \sin x - 3x$ .
- 4.3.2** Provare che l'equazione  $3x^3 - 8x^2 + x + 3 = 0$  ha una radice negativa, una in  $(0, 1)$  e una terza maggiore di uno.

4.3.3 Verificare che l'equazione  $\operatorname{sen} x + x = \frac{1}{2}$  ha una sola soluzione in  $[0, \pi/4]$  e individuare il numero  $n$  di passi necessari per trovare, col metodo di bisezione, tale radice con un errore minore di  $10^{-6}$ .

4.3.4 Si dimostri che ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale.

4.3.5 Individuare dominio e immagine delle funzioni

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}; \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}; \quad f(x) = \operatorname{sen}(e^x);$$

$$f(x) = e^{\operatorname{sen} x}; \quad f(x) = \operatorname{sen} \sqrt{x}; \quad f(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}.$$

4.3.6 Data la funzione  $y = \operatorname{tg} x$ , sapendo che  $f(\frac{\pi}{4}) = 1$  e  $f(\frac{3}{4}\pi) = -1$ , è vero che vi è una  $x$  in  $[\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$  tale che sia  $f(x) = 0$ ?

4.3.7 Individuare i valori del parametro  $k$  per cui le seguenti equazioni ammettono una o più soluzioni

(a)  $x^2 - x - 1 = k;$

(b)  $\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} = k;$

(c)  $x^3 - k(x + 1) = 0.$

4.3.8 Se una funzione  $f(x)$  non è definita in un certo punto  $x_0$  ma è possibile definirla ivi opportunamente in modo da renderla continua, si dice che in  $x_0$  la funzione ha una *discontinuità eliminabile*. Eliminare le discontinuità nelle seguenti funzioni:

(a)  $\frac{1 - \cos x}{x^2};$       (b)  $\frac{\ln(1+x)}{x};$

(c)  $1 - x \operatorname{sen} \frac{1}{x};$       (d)  $\frac{e^x - e^{-x}}{x};$

(e)  $x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}.$

4.3.9 Ricordando l'Esercizio 4.1.16, dimostrare che, dato qualunque poligono e una qualsivoglia direzione, esiste una retta che ha questa direzione e dimezza l'area del poligono.

4.3.10 Data una retta  $ax + by + c = 0$  non passante per l'origine, sia  $P_t$  l'intersezione con la semiretta uscente dall'origine che forma un angolo  $t$  con il semiasse positivo delle ascisse. Provare che la funzione  $f(t) = OP_t$  è continua in un opportuno intervallo  $(t_1, t_2)$ .

4.3.11 Dato un poligono convesso si dimostri che, comunque si fissi un punto  $A$  del suo perimetro diverso dai vertici, è sempre possibile trovare un triangolo equilatero con un vertice in  $A$  inscritto nel poligono stesso. (Si usi il risultato dell'esercizio precedente).

**4.3.12** Si supponga che la temperatura all'equatore sia, a un dato istante, funzione continua della longitudine. Si dimostri che vi sono infinite coppie di località sull'equatore che hanno la stessa temperatura e che una almeno di tali coppie è formata da località agli antipodi.

## 4.4 Regole di derivazione

Come si è visto nel Paragrafo 3.2 la derivazione è una operazione che “produce” funzioni da altre funzioni. In questo paragrafo studieremo il comportamento della derivazione rispetto alle operazioni algebriche, alla composizione di funzioni e al passaggio alla funzione inversa; come si vedrà le regole sono così semplici e immediate da consentire di esprimere, tramite formule esplicite, le derivate di funzioni anche molto complesse. Per ogni funzione  $f$  definita in un intorno di un dato punto  $x$  si pone

$$R_f(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \quad h \neq 0;$$

ricordiamo che la derivata di  $f$  nel punto  $x$  è, se esiste, il limite per  $h \rightarrow 0$  del rapporto incrementale  $R_f(h)$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

**PROPOSIZIONE 4.19** Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni derivabili nei punti  $x$  di un intervallo  $(a,b)$ , allora  $f+g$ ,  $f \cdot g$  sono derivabili; se inoltre  $g(x) \neq 0$  anche le funzioni  $1/g$  e  $f/g$  sono derivabili e valgono le formule seguenti

- (a)  $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x),$
- (b)  $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$
- (c)  $(1/g)'(x) = -g'(x)/[g(x)]^2,$
- (d)  $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$

**DIMOSTRAZIONE** La (a) è una ovvia conseguenza della Proposizione 4.7(a) e d'altra parte è già stata dimostrata nell'Esempio 3.20 (d). Proviamo la (b). Se  $w = f \cdot g$  si ha

$$\begin{aligned} w(x+h) - w(x) &= f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = \\ &= g(x+h)[f(x+h) - f(x)] + f(x)[g(x+h) - g(x)] \end{aligned}$$

e, dividendo per  $h$

$$R_w(h) = g(x+h)R_f(h) + f(x)R_g(h). \quad (4.33)$$

Poiché  $g$  è derivabile essa è anche continua e, dunque, per  $h \rightarrow 0$  si ha  $g(x+h) \rightarrow g(x)$ . Passando al limite nella (4.33) si ottiene la tesi.

Sia ora  $w = 1/g$  e si supponga  $g(x) \neq 0$ . Per la proprietà di permanenza del segno (Proposizione 4.6(d)) se  $h$  è piccolo a sufficienza si avrà  $|g(x+h)| > \frac{|g(x)|}{2} > 0$ . Dunque la funzione  $w(x+h)$  è definita in un intorno di  $h=0$  e si ha

$$R_w(h) = \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)} \right] = -\frac{R_g(h)}{g(x)g(x+h)}$$

e per la continuità della funzione  $g$  si avrà  $\lim_{h \rightarrow 0} R_w(h) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}$ .

La (d) si ottiene poi da (b) e da (c) considerando

$$\frac{f}{g} = f \cdot \left(\frac{1}{g}\right),$$

infatti

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left[\left(\frac{1}{g}\right)'(x)\right] = \\ &= \frac{f'(x)}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}. \quad \square \end{aligned}$$

—≡—

**ESEMPI 4.20** (a) Se  $f(x) = x^{-n}$ ,  $n$  intero positivo,  $x \neq 0$ , si ha

$$f'(x) = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}. \quad (4.34)$$

(b) Se  $f(x) = e^x(x^2 + 3x)$ , per ogni  $x$  si ha

$$f'(x) = e^x(x^2 + 3x) + e^x(2x + 3) = e^x(x^2 + 5x + 3).$$

(c) Se  $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$  e  $x$  è diverso da  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  con  $k$  intero allora (si veda (4.17))

$$\begin{aligned} f'(x) &= D\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x. \quad (4.35) \end{aligned}$$

—≡—

**OSSERVAZIONE 4.21** La (a) della precedente Proposizione si estende a un numero  $n$  di addendi:

$$\left(\sum_{i=1}^n f_i\right)'(x) = \sum_{i=1}^n f_i'(x),$$

così anche la (b) si estende a  $n$  fattori:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_n)'(x) = \sum_{i=1}^n (f_1 \cdot f_2 \cdot \dots \cdot f_i' \cdot \dots \cdot f_n)(x).$$

**PROPOSIZIONE 4.22** (*Derivata della funzione composta*). Se  $f$  è una funzione definita su  $(a,b)$  derivabile in  $x \in (a,b)$  e  $g$  è una funzione definita su  $(c,d)$  derivabile in un punto  $y \in (c,d)$  ove  $y = f(x)$ , allora la funzione composta  $w = g \circ f$  è derivabile nel punto  $x$  e risulta

$$w'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x). \quad (4.36)$$

**DIMOSTRAZIONE** Posto  $k = f(x+h) - f(x)$ ,  $k$  è infinitesimo con  $h$  (Proposizione 3.19); poiché  $g$  è derivabile nel punto  $y$  si ha

$$g(y+k) - g(y) = kg'(y) + k\eta(k) \quad (4.37)$$

ove  $\eta(k)$  è un infinitesimo con  $k$  e dunque anche con  $h$  (Proposizione 3.15(d)). Ma siccome  $f$  è derivabile in  $x$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{h} = f'(x);$$

dividendo allora la (4.37) per  $h$ , tenendo conto che  $y+k = f(x+h)$ , si ottiene

$$\frac{g(f(x+h)) - g(f(x))}{h} = \frac{k}{h} [g'(f(x)) + \eta(k)]$$

e passando al limite per  $h \rightarrow 0$  si ha la tesi.  $\square$

La formula (4.36) diviene particolarmente espressiva usando la notazione di Leibniz per le derivate. Se  $w = g(y)$  e  $y = f(x)$  si può scrivere

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy} \cdot \frac{dy}{dx},$$

(come se si potesse semplificare per  $dy!$ ).

—=—

**ESEMPI 4.23** (a) Se  $w(x) = (\sin x)^2$  si avrà  $w'(x) = 2 \sin x \cdot \cos x$ .

(b) Se  $w(x) = e^{-x^2}$  allora  $w'(x) = e^{-x^2} \cdot (-2x)$ .

(c) Se  $\varphi(x) = (\sin \cos x^3)^{-2}$  allora  $\varphi'(x) = -2(\sin \cos x^3)^{-3} \cdot \cos \cos x^3 \cdot (-\sin x^3) \cdot 3x^2$ .

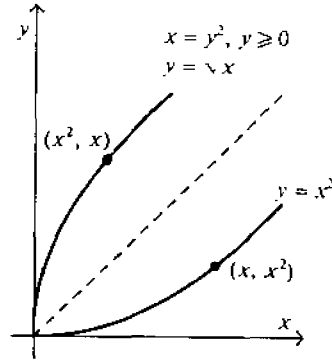
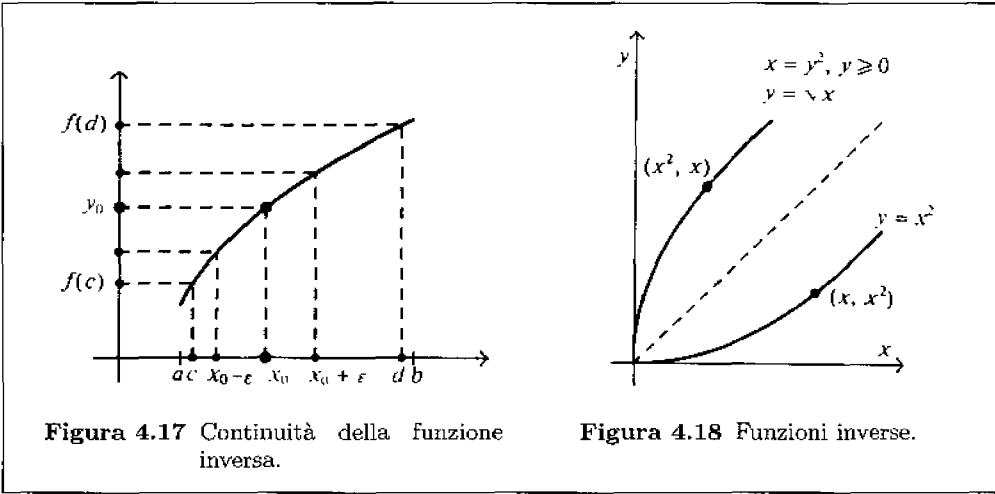
—=—

**PROPOSIZIONE 4.24** (*Derivata della funzione inversa*). Sia  $f$  una funzione strettamente monotona (crescente o decrescente, Definizione 3.4, pag. 93) in  $(a,b)$ , derivabile con  $f'(x) \neq 0$ . Allora la funzione inversa  $x = g(y) = f^{-1}(y)$  è derivabile e si ha

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}. \quad (4.38)$$

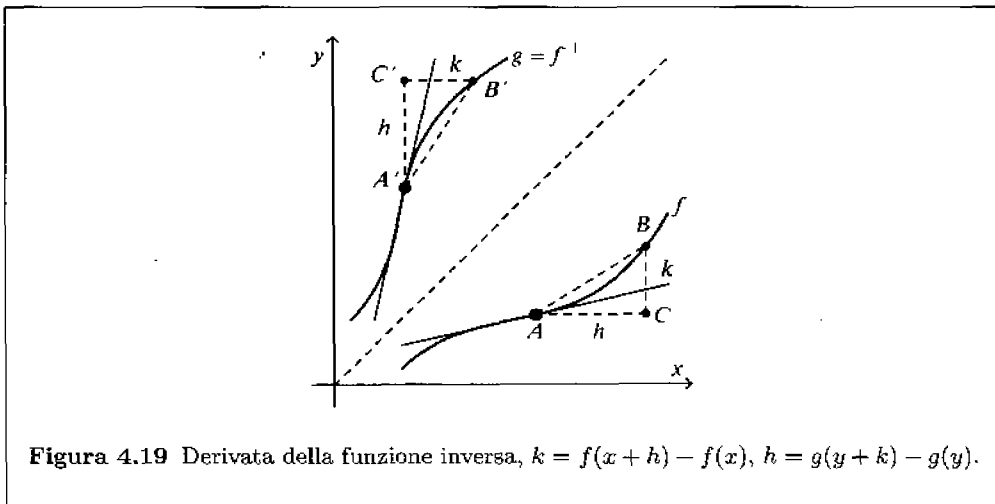
**DIMOSTRAZIONE** Sia  $[c,d]$  un intervallo chiuso contenuto in  $(a,b)$ . La funzione  $f(x)$  essendo derivabile è continua in  $[c,d]$  e dunque assume tutti i valori compresi fra il suo minimo e il suo massimo (Teorema 4.18). Siccome  $f$  è monotona (si supponga, per esempio, crescente), tali valori sono  $f(c)$  e  $f(d)$ . A ogni numero  $y$  compreso fra  $f(c)$  e  $f(d)$  risulta così associato un unico punto  $x$  di  $[c,d]$ ,  $x = g(y)$ , dunque la *funzione inversa*  $g$  (che può essere anche denotata con  $f^{-1}$ ) è definita su tutto l'intervallo  $[f(c), f(d)]$ . Proviamo che tale funzione è continua.

Sia  $y_0 \in (f(c), f(d))$  e sia  $x_0 = g(y_0)$ ; scelto  $\varepsilon > 0$  in modo che  $c \leq x_0 - \varepsilon < x_0 + \varepsilon \leq d$  ma per il resto arbitrario, a causa della monotonia di  $f$ , per tutti gli  $y$  tali che  $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$  si ha  $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$  il che prova la continuità di  $g$  in  $y_0$ . Con lievi modifiche, la dimostrazione si adatta al caso in cui  $y_0 = f(c)$  o  $y_0 = f(d)$ . Le relazioni  $y = f(x)$ ,  $x = g(y)$  sono equivalenti e sono rappresentate nel piano  $x, y$  dal medesimo grafico: i punti  $(x,y)$  per i quali  $y = f(x)$  sono esattamente gli stessi per



i quali  $x = g(y)$ . Se si vuol rappresentare la funzione  $g$  nel modo tradizionale, come  $y = g(x)$ , occorre scambiare fra loro il ruolo di  $x$  e di  $y$  e dunque il grafico di  $y = g(x)$  si ricava dal grafico di  $y = f(x)$  tramite una riflessione rispetto alla retta  $y = x$ . Nella Figura 4.18 sono rappresentati i grafici della funzione  $f(x) = x^2$  per  $x \geq 0$  e della sua funzione inversa  $g(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ .

La proprietà (4.38) che stiamo dimostrando ha una immediata interpretazione geometrica in termini di rette tangenti ai grafici delle due funzioni  $f$  e  $g$ . Siccome i due grafici sono simmetrici rispetto alla retta  $y = x$  i triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  (Figura 4.19) sono congruenti e quindi, il coefficiente angolare della retta per  $A$  e  $B$  è  $k/h$  mentre, il coefficiente angolare della retta per  $A'$  e  $B'$  è  $h/k$ . Facendo tendere  $k$  a zero anche  $h$  tende a zero, perché abbiamo appena dimostrato che la funzione inversa  $g$  è continua; la secante  $A'B'$  "tende" alla tangente in  $A'$  al grafico di  $g$  e la secante  $AB$  "tende" alla tangente in  $A$  al grafico di  $f$ : di qui la formula  $g'(y) = 1/f'(x)$ .





Più formalmente: se  $y = f(x)$  e  $y + k = f(x + h)$  si ha  $x = g(y)$ ,  $x + h = g(y + k)$  e

$$\frac{g(y + k) - g(y)}{k} = \frac{h}{f(x + h) - f(x)} = \frac{1}{\frac{f(x + h) - f(x)}{h}};$$

passando al limite per  $k \rightarrow 0$  in base alla continuità di  $g$  si ha che  $h \rightarrow 0$ , da cui la (4.38).  $\square$



**ESEMPI 4.25 (a)** La funzione  $f(x) = x^2$ ,  $x > 0$ , ha derivata positiva per ogni  $x > 0$ ; la sua funzione inversa è la funzione  $g(y) = \sqrt{y}$ . Dalla precedente proposizione segue allora

$$g'(y) = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \text{per ogni } y > 0.$$

**(b)** La funzione  $x \rightarrow \ln x$  è la funzione inversa della funzione esponenziale  $y \rightarrow e^y$  ed è definita per ogni  $x > 0$ . La derivata di  $e^y$  è la funzione stessa ed è, dunque, sempre diversa da zero. Si ha allora (si noti che abbiamo scambiato il ruolo di  $x$  e di  $y$ )

$$D \ln x = \frac{1}{D(e^y)} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$$

risultato già ottenuto nella Proposizione 4.11. Si osservi che, in generale, la funzione  $x \rightarrow \ln |x|$  definita per  $x \neq 0$  è derivabile e

$$D \ln |x| = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0; \quad (4.39)$$

basta osservare che per  $x < 0$  si ha  $\ln |x| = \ln(-x)$  e applicare la Proposizione 4.22.

**(c)** Per  $x > 0$  e  $\alpha$  reale qualunque si pone (si veda anche la Definizione 4.13)

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \quad x > 0.$$

Si può ora calcolare la derivata della funzione  $f(x) = x^\alpha$ , usufruendo della formula di derivazione della funzione composta:

$$D(x^\alpha) = D(e^{\alpha \ln x}) = e^{\alpha \ln x} \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1},$$

formula che estende proprietà già note per  $\alpha$  intero (ma si osservi che, per  $\alpha$  reale qualunque,  $x^\alpha$  è definita solo per  $x > 0$ ).

**(d)** Sia  $f(x) = \sin x$  ristretta a  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ;  $f$  è una funzione strettamente crescente; dunque invertibile; la sua inversa è definita in  $[-1, 1]$ , si chiama *arcoseno* e si indica con  $\arcsin$ . Si ha  $f'(x) = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - y^2} \neq 0$  se  $|y| < 1$  e quindi

$$D \arcsin y = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}, \quad |y| < 1.$$

In modo analogo si definiscono le funzioni arc cos, arc tg come inverse delle funzioni cos e tg ristrette, rispettivamente, a  $[0, \pi]$  e a  $(-\pi/2, \pi/2)$  e si verifica che

$$D \operatorname{arc} \cos y = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad |y| < 1,$$

$$D \operatorname{arc} \operatorname{tg} y = \frac{1}{1+y^2}.$$

Concludiamo il paragrafo con una tabella di derivate di alcune funzioni elementari.

Tabella 4.1

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$x^\alpha, \alpha$ intero	$\alpha x^{\alpha-1}$	$x^\alpha, \alpha$ qualunque, $x > 0$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$a^x, a > 0$	$a^x \ln a$	$\log_a x, a > 0, a \neq 1$	$\frac{1}{x \log a}$
sen $x$	cos $x$	cos $x$	$-\operatorname{sen} x$
tg $x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	arc sen $x,  x  < 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arc cos $x,  x  < 1$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	arc tg $x$	$\frac{1}{1+x^2}$

## ESERCIZI

4.4.1 Calcolare le derivate delle seguenti funzioni

(a)  $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 2x$ ,      (b)  $x^4 + (1/x^3)$ ,

(c)  $\frac{1}{6}(3 + 2x + x^2)$ ,      (d)  $\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$ ,

(e)  $(x^3 - 6x^2 + 3)/6$ ,      (f)  $-7x^4(\sqrt[3]{x})^3$ ,

(g)  $(\sqrt{x})^3 + (\sqrt[3]{x})^2$ ,      (h)  $\frac{(1-x^2)(x+1)}{3+x^2}$ ,

(i)  $\frac{(x+2)^3(x-1)}{3-x}$ ,      (l)  $\sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$ ,

(m)  $(x^3 + 4x^2)^3$ ,      (n)  $\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ .

4.4.2 Data la funzione  $y = (x^2 - 4)(x + 3)$ , trovare:

- la derivata della funzione,
- la pendenza delle rette tangenti alla curva in  $x = -1$  e  $x = 3$ ,
- l'equazione delle rette normali alla curva in  $x = -1$  e  $x = 3$ .

- 4.4.3** Data la funzione  $y = x/(x - 2)$ , trovare:  
 a) la derivata della funzione,  
 b) la pendenza della retta tangente alla curva in  $x = 1$ ,  
 c) l'equazione della retta tangente alla curva in  $x = 1$ ,  
 d) l'equazione della retta normale alla curva in  $x = 1$ .
- 4.4.4** Trovare le equazioni delle rette tangente e normale alla curva di equazione  $y = \sqrt[3]{x-1}$  nel punto di ascissa  $x = 1$ .
- 4.4.5** Determinare l'angolo formato dalle tangenti alle curve di equazioni  $y = 1 + \ln x$ ,  $y = \frac{1}{x}$  nel loro punto di intersezione.
- 4.4.6** Mostrare che le iperboli  $xy = a^2$  e  $x^2 - y^2 = b^2$  si intersecano perpendicolarmente.
- 4.4.7** Dimostrare che tutte le corde della parabola di equazione  $y = ax^2$  che sono viste dal vertice sotto un angolo retto appartengono a rette concorrenti in un punto.
- 4.4.8** Trovare l'equazione della retta tangente alla curva  $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 4$  in  $x = 1$ .
- 4.4.9** Trovare le derivate delle funzioni:

$$\begin{array}{lll} \operatorname{tg}^2 x, & \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}, & (x + \sqrt{x}) \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ x \ln x - x, & \ln^2 x, & e^x \cos x, \\ e^x / \cos x, & \cos e^x, & \operatorname{sen} \alpha x, \\ \ln \operatorname{sen} x, & \operatorname{sen} \ln x, & \operatorname{cotg} x^2, \\ e^{\operatorname{sen} x}, & \sqrt{1 + \sqrt{x}}, & \frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}, \\ \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}, & \arcsin(2 - x), & \arctan \frac{x}{1 - x^2}, \\ \frac{\sqrt{x-1}}{\ln x}, & 2^{x \operatorname{sen} x}, & \frac{\ln \operatorname{sen} x}{\cos x}. \end{array}$$

- 4.4.10** Usando l'identità  $x = e^{\ln x}$  ( $x > 0$ ), calcolare la derivata di  $f(x) = x^x$ .
- 4.4.11** Calcolare le derivate delle funzioni seguenti

$$\begin{array}{llll} (1/x)^{\cos x}, & (\arctan x)^{x^2+1}, & (\ln x)^{\ln x}, & (\operatorname{sen} x)^x \\ & (\ln x)^x, & (2x)^{\operatorname{sen} x}, & (1 + 1/x)^x. \end{array}$$

- 4.4.12** Dire se le funzioni  $e^{-|x|}$ ,  $x \cdot |x|$ ,  $|x \cdot \operatorname{sen} x|$ ,  $x |x - 1|$  sono continue per  $x = 0$  e se sono ivi derivabili.
- 4.4.13** La derivata di una funzione che descrive la dipendenza dal tempo (o da altra variabile) di certe grandezze geometriche, meccaniche o di altra natura si chiama sovente "tasso di variazione" della grandezza stessa.  
 (a) Provare che il tasso di variazione del volume di una sfera rispetto al raggio è uguale all'area della sua superficie.

(b) Il volume di una palla di neve decresce con una velocità proporzionale all'area della sua superficie. Sapendo che in un'ora il volume della palla si è dimezzato si dica quanto tempo impiega la palla per fondere completamente.

[Si supponga che la forma della palla sia in ogni istante sferica.]

(c) Il raggio di un pallone sferico aumenta al tasso di  $1/2$  cm al minuto ( $dr/dt = 1/2$ ). Sapendo che la dipendenza del volume dal raggio è  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , calcolare la variazione del volume in funzione del tempo quando il raggio è 15 cm.

(d) Una colonia di batteri cresce secondo la legge

$$N = 50\sqrt{t + 16} + 500$$

dove  $t$  è il tempo misurato in ore e  $N$  è il numero di batteri presente all'istante  $t$ .

Dopo quante ore dall'istante iniziale  $t = 0$  il tasso di crescita dei batteri si è dimezzato?

**4.4.14** Un aereo sta percorrendo, con velocità costante, una traiettoria rettilinea che dista 7000 metri da un radiofaro. Nel momento in cui la distanza dell'aereo dal radiofaro è di 25 km, tale distanza aumenta di 180 m al secondo. Dire qual è, in km/h, la velocità dell'aereo.

**4.4.15** Provare che le funzioni  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ,  $x > 1$ , e  $g(y) = \sqrt{y^2 + 1}$ ,  $y > 0$ , sono l'una l'inversa dell'altra. Calcolare  $f'$ ,  $g'$  e verificare che  $f'(x) = f'(g(y)) = 1/g'(y)$  e che  $g'(y) = g'(f(x)) = 1/f'(x)$ .

**4.4.16** Verificare che la funzione  $3x + \ln x$  è strettamente crescente. Detta  $g$  la funzione inversa, calcolare  $g'(3)$ .

**4.4.17** Verificare che la funzione  $y = \frac{1}{2}x^2 - x \ln x$  è invertibile sul suo dominio di definizione.

**4.4.18** Studiare dominio, immagine e invertibilità delle funzioni seguenti e scriverne le funzioni inverse

$$(a) \quad y = \arccos \frac{1}{1-x}, \quad (b) \quad y = \sqrt{e^{e^x} - e^{-x} + 2}.$$

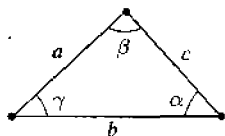
**4.4.19** Disegnare i grafici di  $f(x) = \sin(\arcsin x)$  e  $f(x) = \arcsin(\sin x)$ .

**4.4.20** Provare che

$$(a) \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \text{per } -1 \leq x \leq 1$$

$$(b) \quad \arctan x + \arctan \frac{1}{x} \text{ è uguale a } \frac{\pi}{2} \text{ per } x > 0, \text{ a } -\pi/2 \text{ per } x < 0.$$

**4.4.21** In un triangolo i lati  $a$  e  $b$  sono di lunghezza fissata; detti  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli rispettivamente opposti ai lati  $a, b, c$  si provino le seguenti relazioni:



$$\frac{dc}{d\gamma} = a \operatorname{sen} \beta; \quad c \frac{d\alpha}{d\gamma} = -a \cos \beta.$$

[Si utilizzino il teorema di Carnot e il teorema dei seni.]

**4.4.22** (*Formula di Leibniz*) Se  $f$  e  $g$  sono funzioni derivabili  $n$  volte, posto  $w(x) = f(x)g(x)$  si provi che

$$w^{(n)}(x) = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} f^{(r)}(x) g^{(n-r)}(x).$$

**4.4.23** Sia  $f(x) = x + \operatorname{sen}^2 x$ . Trovare i punti del grafico nei quali la tangente è parallela alla retta  $y = x$ .

## 4.5 Studio del grafico di una funzione

Esporremo ora alcuni importanti risultati del calcolo differenziale, i quali mostrano come la nozione di derivata possa essere utile nello studio delle proprietà qualitative e quantitative delle funzioni.

### MASSIMI E MINIMI, STUDIO LOCALE DEL GRAFICO

Una delle applicazioni più importanti del calcolo differenziale consiste nella ricerca dei massimi e dei minimi delle funzioni. Studiamo dapprima le proprietà "locali", cioè il comportamento qualitativo in una funzione in un intorno del punto in esame.

Se  $f$  è una funzione derivabile, un punto  $c$  tale che  $f'(c) = 0$  si dice *punto critico* o *punto stazionario* per la funzione  $f$ . Poiché in un punto critico la derivata è zero la retta tangente al grafico è parallela all'asse  $x$ . La Figura 4.20 mostra tre esempi di questa situazione.

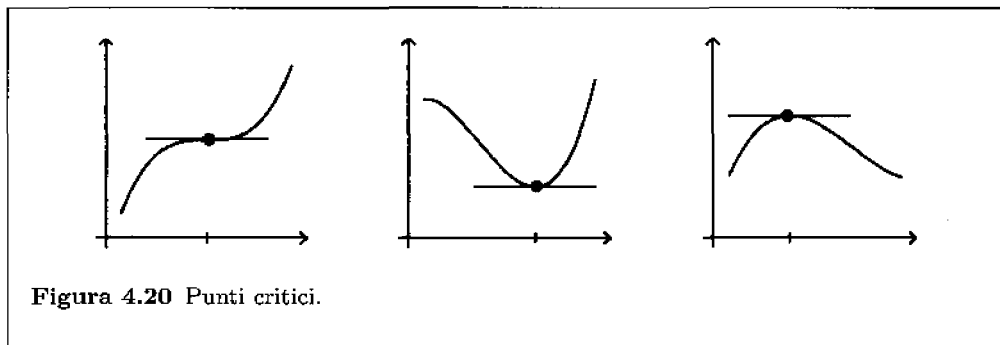


Figura 4.20 Punti critici.

Il primo esempio è quello di una funzione, quale  $f(x) = x^3$ , il cui grafico “attraversa” nel punto critico la tangente; negli altri esempi la funzione ha un “minimo” o un “massimo” nel punto critico. Formalizziamo ora queste situazioni.

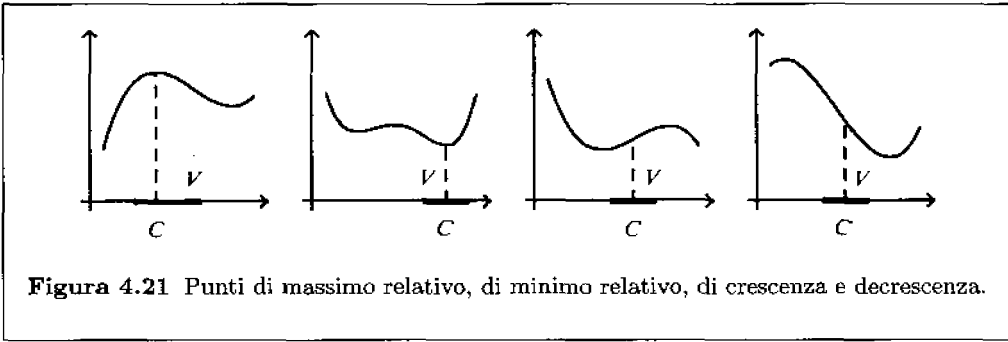
**DEFINIZIONE 4.26** Una funzione  $f$  ha un *massimo relativo* in un punto  $c$  interno al suo insieme di definizione se vi è un intorno  $V = (c - \sigma, c + \sigma)$  di  $c$ , tale che

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{per ogni } x \in V. \quad (4.40)$$

Si dice poi che  $f$  è *crescente* nel punto  $c$  se vi è un suo intorno  $V = (c - \sigma, c + \sigma)$ , tale che

$$\begin{cases} f(x) < f(c) & \text{per } c - \sigma < x < c, \\ f(x) > f(c) & \text{per } c < x < c + \sigma. \end{cases} \quad (4.41)$$

In modo analogo si definiscono i minimi relativi e i punti ove  $f$  è decrescente.



**Figura 4.21** Punti di massimo relativo, di minimo relativo, di crescita e decrescenza.

Si noti che la condizione di crescita (4.41) equivale alla positività del rapporto incrementale

$$R(h) = \frac{f(c+h) - f(c)}{h} > 0, \quad \text{per } 0 < |h| < \sigma; \quad (4.42)$$

in modo analogo si ha la condizione di decrescenza

$$R(h) < 0, \quad \text{per } 0 < |h| < \sigma. \quad (4.43)$$

È chiaro allora che se  $f$  è derivabile nel punto  $c$  il comportamento locale del suo grafico è strettamente legato al segno della sua derivata.

**PROPOSIZIONE 4.27** Sia  $f$  una funzione derivabile in un punto  $c$  interno al suo insieme di definizione.

(a) Se  $f'(c) > 0$  allora  $f$  è crescente in  $c$  (se invece  $f'(c) < 0$  allora  $f$  è decrescente in  $c$ ).

(b) Se  $f$  è crescente in  $c$  allora  $f'(c) \geq 0$  (se  $f$  è decrescente in  $c$  allora  $f'(c) \leq 0$ ).

(c) Se  $f$  ha in  $c$  un massimo oppure un minimo relativo allora  $c$  è punto critico per  $f$ , cioè  $f'(c) = 0$ .

**DIMOSTRAZIONE** (a) Ponendo  $\lambda = f'(c)$ , dalla definizione di derivata si ha che per  $|h|$  sufficientemente piccolo si ha

$$|R(h) - \lambda| = |R(h) - f'(c)| < \frac{\lambda}{2}.$$

che implica

$$R(h) > \lambda - \frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2} > 0.$$

La tesi segue allora dalla (4.42). La dimostrazione nel caso  $f'(c) < 0$  è identica.

(b) Se fosse  $f'(c) < 0$  allora, per la parte già dimostrata, la funzione  $f$  sarebbe decrescente in  $c$ .

(c) Non può risultare né  $f'(c) > 0$  né  $f'(c) < 0$  perché in tali casi  $f$  sarebbe crescente o decrescente in  $c$ . Necessariamente quindi  $f'(c) = 0$ .  $\square$

Si rammenti che in un punto critico una funzione può essere crescente (si pensi all'esempio  $f(x) = x^3$ , incontrato prima), oppure decrescente (per esempio  $f(x) = -x^3$ , sempre per  $x = 0$ ), cosicché dalla sola informazione  $f'(c) = 0$  non si può dedurre alcunché sul comportamento di  $f$  in  $c$ . Può addirittura capitare che sia  $f'(c) = 0$ , ma in  $c$  la funzione  $f$  non sia né crescente, né decrescente e neppure abbia in  $c$  massimo o un minimo relativo. Si tenga inoltre presente che una funzione può avere un massimo o un minimo relativo in un punto nel quale non è derivabile (per esempio,  $f(x) = 1 - x^{2/3}$ ).

## MASSIMI E MINIMI, STUDIO GLOBALE

Per studiare le proprietà globali del grafico di una funzione derivabile in un intervallo, risulteranno molto utili i teoremi sulle funzioni continue, descritti nel Paragrafo 4.3, e in particolare il teorema di Weierstrass.

Ricordiamo che se  $f$  è una funzione definita su un intervallo chiuso  $[a, b]$ , un punto  $c$  di  $[a, b]$  viene detto di *massimo assoluto* per  $f$  in  $[a, b]$  se

$$f(x) \leq f(c) \quad \text{per ogni } x \text{ di } [a, b]. \quad (4.44)$$

La funzione  $f$  si dice poi *crescente* in  $[a, b]$  se

$$f(x_1) \leq f(x_2) \quad \text{per ogni coppia } x_1, x_2 \text{ di } [a, b] \quad \text{con } x_1 < x_2; \quad (4.45)$$

e si dice *strettamente crescente* in  $[a, b]$  se in luogo di (4.45) si ha

$$f(x_1) < f(x_2) \quad \text{per ogni coppia } x_1, x_2 \text{ di } [a, b] \quad \text{con } x_1 < x_2.$$

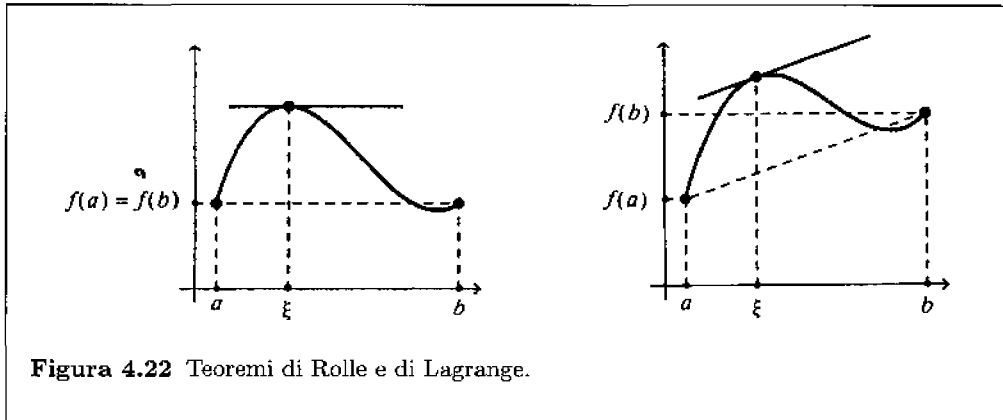
Si definiscono in modo analogo i punti di *minimo assoluto*, la *decrecenza* e la *decrecenza stretta*. Le funzioni crescenti oppure decrescenti in un intervallo si dicono *monotone*. Si noti la differenza fra queste nozioni e quelle descritte nella Definizione 4.26.

Esponiamo ora una importante conseguenza del teorema di Weierstrass.

**TEOREMA 4.28 (di Rolle).** Se  $f$  è una funzione derivabile in  $[a, b]$  tale che  $f(a) = f(b)$ , allora vi è in  $(a, b)$  almeno un punto  $\xi$  in cui la derivata di  $f$  si annulla<sup>(4)</sup>.

<sup>(4)</sup>Qui e nel seguito si assume, per motivi di semplicità espositiva, l'ipotesi di derivabilità di  $f$  nell'intervallo chiuso  $[a, b]$  anche quando la derivabilità agli estremi dell'intervallo non è necessaria.

**DIMOSTRAZIONE** La funzione  $f$  è continua in  $[a, b]$  e quindi assume, in tale intervallo, un valore massimo  $M$  e un valore minimo  $m$ . Se entrambi tali valori sono assunti agli estremi di  $[a, b]$  risulta  $m = M = f(a) = f(b)$ , dunque  $f$  è costante e la derivata è nulla in ogni punto dell'intervallo. In caso contrario esiste un punto  $\xi$  interno che è di massimo oppure di minimo; dalla Proposizione 4.27(c) segue allora  $f'(\xi) = 0$ .  $\square$



**Figura 4.22** Teoremi di Rolle e di Lagrange.

La Figura 4.22 mostra la facile interpretazione geometrica del teorema di Rolle: se  $f(a) = f(b)$  vi è un punto  $\xi$  in  $(a, b)$  tale che la retta tangente al grafico di  $f$  in  $\xi$  è orizzontale (quindi parallela alla retta per i punti  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ ).

La stessa figura lascia allora intuire la possibilità che questa proprietà continui a sussistere anche quando  $f(a) \neq f(b)$  e che vi sia (almeno) un punto  $\xi$  tale che la tangente al grafico di  $f$  nel punto di ascissa  $\xi$  risulti parallela alla "secante" per  $(a, f(a))$  e  $(b, f(b))$ . Infatti:

**TEOREMA 4.29** (*del valor medio, o di Lagrange*). Sia  $f$  una funzione derivabile in  $[a, b]$ ; esiste allora  $\xi \in (a, b)$  tale che

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a). \quad (4.46)$$

**DIMOSTRAZIONE** La Figura 4.22 mostra come ci si possa ricondurre al teorema di Rolle: basterà sottrarre a  $f$  la funzione lineare rappresentata dalla retta per  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$ , cioè la funzione

$$x \longrightarrow f(a) + (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Posto, così,

$$g(x) = f(x) - f(a) - (x - a) \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

si ha  $g(a) = g(b) = 0$ , quindi, per il teorema di Rolle, vi è  $\xi \in (a, b)$  tale che  $g'(\xi) = 0$ . Poiché

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

il punto  $\xi$  verifica la (4.46).  $\square$



Dal teorema del valor medio si ottiene il seguente risultato, utile nel determinare il comportamento qualitativo delle funzioni.

**PROPOSIZIONE 4.30** Sia  $f$  una funzione derivabile in  $[a,b]$ ; se per ogni  $x \in (a,b)$  si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &\geq 0 && \text{allora } f \text{ è crescente in } [a,b], \\ f'(x) &> 0 && \text{allora } f \text{ è strettamente crescente in } [a,b], \\ f'(x) &\leq 0 && \text{allora } f \text{ è decrescente in } [a,b], \\ f'(x) &< 0 && \text{allora } f \text{ è strettamente decrescente in } [a,b], \\ f'(x) &= 0 && \text{allora } f \text{ è costante in } [a,b]. \end{aligned}$$

**DIMOSTRAZIONE** Siano  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ ; applicando il teorema del valor medio alla funzione  $f$  sull'intervallo  $[x_1, x_2]$  si ricava che esiste  $\xi \in (x_1, x_2)$  tale che

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1);$$

da questa equazione, nei vari casi, segue la tesi. L'ultima proprietà era già stata ottenuta nel Teorema 3.27, pag. 117.  $\square$

Altre conseguenze del teorema del valor medio, di dimostrazione immediata, sono le seguenti.

**PROPOSIZIONE 4.31** Se  $f$  è derivabile in  $[a,b]$  allora:

(a) se  $c$  è un punto critico interno ad  $[a,b]$  e in  $c$  la funzione  $f'(x)$  cambia segno (cioè  $f'(x)$  ha segni discordi in un intorno destro e in un intorno sinistro di  $c$ ) allora  $c$  è punto di massimo oppure di minimo relativo per  $f$ .

(b) I punti di massimo e di minimo assoluti di  $f$  in  $[a,b]$  sono o estremi dell'intervallo stesso oppure punti critici di  $f$ .



## ALCUNE APPLICAZIONI

**ESEMPIO 4.32 (Legge della riflessione).** Con una semplice argomentazione di geometria elementare si riesce a dimostrare che, nella riflessione tramite uno specchio piano, i raggi incidente e riflesso formano lo stesso angolo con la perpendicolare allo specchio. La dimostrazione è basata sul cosiddetto *principio di Fermat*: in un qualunque mezzo lo cammino di un raggio di luce è determinato dalla condizione che il tempo di percorrenza del cammino stesso sia minimo. Essa è schematizzata nella Figura 4.23: qualunque altro percorso  $PAQ$  è più lungo di  $PRQ$  ove  $R$  è l'intersezione con lo specchio della congiungente  $Q$  con il punto  $P'$  simmetrico di  $P$ .

Se però lo specchio non è piano ma curvo, la geometria elementare non è più di alcun aiuto e per dimostrare la legge della riflessione (che rimane inalterata) serve il calcolo differenziale. Sia  $R$  il punto di riflessione (Figura 4.24); si scelga un sistema di riferimento cartesiano che abbia l'origine in  $R$  e l'asse  $x$  tangente allo specchio nel punto  $R$ . Rispetto a tale sistema di coordinate lo specchio avrà un'equazione del tipo  $y = f(x)$  con  $f(0) = 0$  e  $f'(0) = 0$ . Se  $A$  è il punto dello specchio che corrisponde all'ascissa  $x$ , in base al

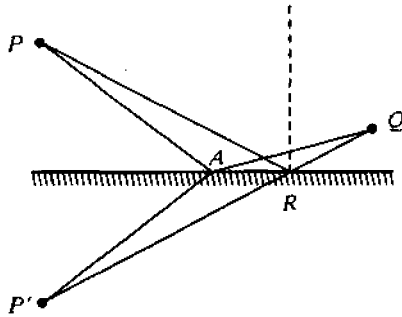


Figura 4.23 Riflessione su uno specchio piano.

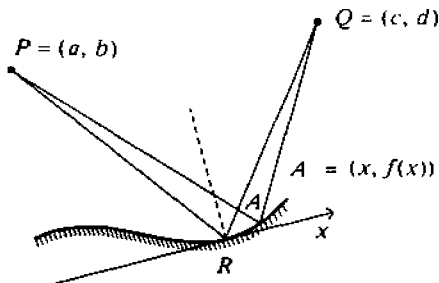


Figura 4.24 Riflessione su uno specchio curvo.

principio di Fermat, la grandezza  $l(x) = PA + AQ$  deve essere minima quando  $A = R$ , cioè per  $x = 0$ . Dovrà, dunque, essere  $l'(0) = 0$ . Ma se  $P = (a, b)$ ,  $Q = (c, d)$  si ha

$$l(x) = \sqrt{(x-a)^2 + (b-f(x))^2} + \sqrt{(c-x)^2 + (d-f(x))^2},$$

$$l'(x) = \frac{(x-a) - f'(x)(b-f(x))}{\sqrt{(x-a)^2 + (b-f(x))^2}} - \frac{(c-x) + f'(x)(d-f(x))}{\sqrt{(c-x)^2 + (d-f(x))^2}}$$

e siccome  $f(0) = f'(0) = 0$ , si ottiene

$$l'(0) = -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}}.$$

Dovendo essere  $l'(0) = 0$  se ne deduce che i seni degli angoli formati da  $PR$  e da  $QR$  con l'asse  $y$ , cioè con la perpendicolare allo specchio nel punto di riflessione, sono uguali. Si osservi che nel caso di specchi curvi, assegnati due punti  $P$  e  $Q$ , può succedere che vi sia più di un punto di riflessione.

**ESEMPIO 4.33 (Legge della rifrazione).** Studiamo ora la rifrazione dei raggi luminosi nel passaggio da un mezzo a un altro (per esempio, dall'aria all'acqua). Siano  $v_1$  e  $v_2$

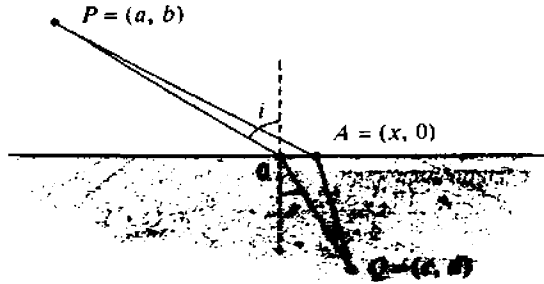


Figura 4.25 La rifrazione.

le velocità della luce nei due mezzi e poniamo l'asse  $x$  lungo la separatrice tra essi. Fra tutti i possibili cammini  $PAQ$ , che connettono i punti  $P$  e  $Q$ , la luce sceglie quello per il quale il tempo impiegato è minimo: tale tempo è

$$t(x) = \frac{PA}{v_1} + \frac{AQ}{v_2}$$

e se nuovamente,  $P = (a, b)$ ,  $Q = (c, d)$ ,  $A = (x, 0)$ , si dovrà avere  $f'(0) = 0$  (Figura 4.25). Ma

$$t(x) = \frac{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(c-x)^2 + d^2}}{v_2}$$

da cui

$$t'(x) = \frac{-a}{v_1 \sqrt{a^2 + b^2}} - \frac{c}{v_2 \sqrt{c^2 + d^2}}$$

e la condizione  $t'(0) = 0$  diviene

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2},$$

nota come *legge di Snell*: il rapporto fra i seni degli angoli di incidenza e di riflessione è uguale al rapporto tra le velocità di propagazione. Tale rapporto si chiama indice di rifrazione. Per esempio, se il primo mezzo è l'aria e il secondo è l'acqua, poiché la velocità della luce nell'acqua è minore di quello nell'aria, si avrà  $I = \frac{v_1}{v_2} > 1$ . Dunque,

$\sin r = \frac{\sin i}{I} \leq \frac{1}{I}$  e si comprende allora che  $r$  non potrà superare un certo angolo critico  $r_0$ , il che giustifica il fenomeno della riflessione totale.



**ESEMPIO 4.34 (Problema di Fermat).** Dati tre punti  $A, B, C$ , trovare un punto  $P$  nel piano tale che la quantità  $PA + PB + PC$  sia minima. Si tratta di un problema, non facile, posto da Fermat a Torricelli e risolto da quest'ultimo in più modi.

Si supponga risolto il problema e sia  $P$  un punto che rende minima la somma  $PA + PB + PC$  (esisterà un punto siffatto?). Con un sistema di assi cartesiani aventi origine in  $P$ , tramite una rotazione si può far sì che uno dei tre punti (diciamo  $A$ ) appartenga all'asse  $x$ . Si avrà, dunque,  $A = (a, 0)$ ,  $B = (c, d)$ ,  $C = (e, f)$  (Figura 4.26) e si supponga

che  $A, B, C$  siano distinti da  $P$  (questa ipotesi dove interviene in ciò che segue?). Se  $Q$  è un qualunque punto dell'asse  $x$  di ascissa  $x$ , posto  $q(x) = QA + QB + QC$ , dovrà risultare  $q'(0) = 0$  (Proposizione 4.31(b)).

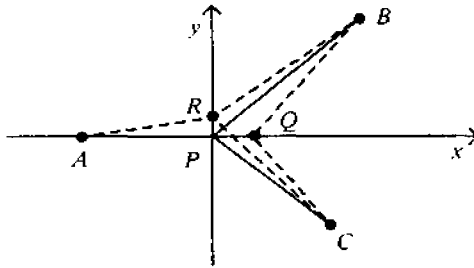


Figura 4.26

Si ha  $q(x) = (x-a) + \sqrt{(c-x)^2 + d^2} + \sqrt{(e-x)^2 + f^2}$  e l'equazione  $q'(0) = 0$  equivale a

$$\frac{c}{\sqrt{c^2 + d^2}} + \frac{e}{\sqrt{e^2 + f^2}} = 1. \quad (4.47)$$

Se  $R$  è un qualunque punto dell'asse  $y$  di ordinata  $y$ , posto  $r(y) = RA + RB + RC$ , si dovrà, analogamente, avere  $r'(0) = 0$ . Ma  $r(y) = \sqrt{a^2 + y^2} + \sqrt{c^2 + (d-y)^2} + \sqrt{e^2 + (f-y)^2}$  e quindi, la condizione  $r'(0) = 0$  diventa

$$\frac{d}{\sqrt{c^2 + d^2}} + \frac{f}{\sqrt{e^2 + f^2}} = 0. \quad (4.48)$$

Se  $\alpha$  e  $\beta$  indicano gli angoli formati da  $BP$  e da  $CP$  con l'asse  $x$  la (4.48) equivale a  $\sin \alpha = \sin \beta$ , mentre la (4.47) equivale a  $\cos \alpha + \cos \beta = 1$ . Da queste equazioni si ricava  $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$  e dunque, gli angoli  $APB, BPC, CPA$  misurano tutti e tre  $120^\circ$ .

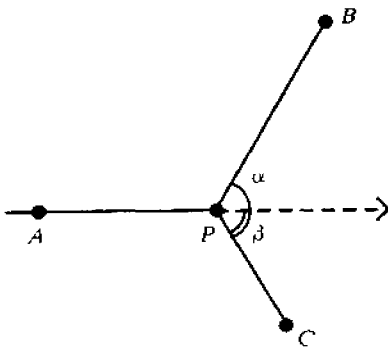


Figura 4.27

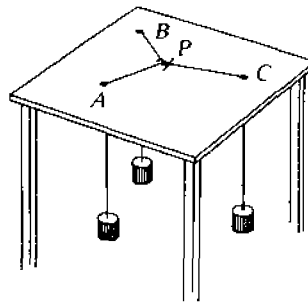


Figura 4.28

Si noti che dati tre punti  $A, B, C$  non è affatto detto che esista un punto  $P$  che realizzi tale situazione. Per esempio, se uno degli angoli del triangolo  $ABC$  è  $\geq 120^\circ$  non esiste

alcun punto  $P$  che "vede" i lati del triangolo sotto angoli di  $120^\circ$ ; in questa circostanza tutte le considerazioni svolte sono prive di significato (cosa si potrà concludere?). Se però un tal punto esiste allora questo fornirà la soluzione del problema (se esiste sarà unico?). La Figura 4.28 cerca di dare una interpretazione meccanica del risultato.



## LA CONVESSITÀ

Se una funzione  $f(x)$  è derivabile la sua derivata  $f'(x)$  può essere una funzione continua: in questo caso la funzione  $f$  si dice di classe  $C^1$ . Analogamente si dicono di classe  $C^k$  (o, brevemente, di classe  $k$ ) quelle funzioni  $f(x)$  che sono dotate di derivata fino all'ordine  $k$  e quest'ultima derivata  $f^{(k)}(x)$  è una funzione continua (a fortiori sono continue tutte le precedenti derivate).

Si consideri, per esempio,  $f(x) = 1 + x + x^2 + |x|^{5/2}$ : si ha  $f'(x) = 1 + 2x + \frac{5}{2}x \cdot |x|^{1/2}$ ,

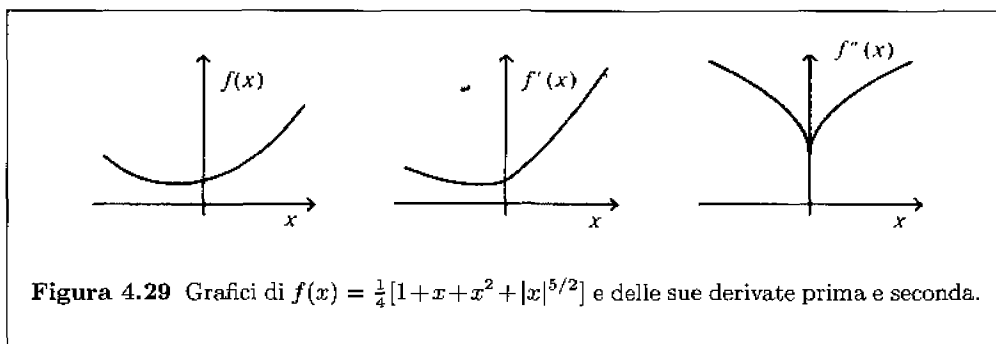


Figura 4.29 Grafici di  $f(x) = \frac{1}{4}[1 + x + x^2 + |x|^{5/2}]$  e delle sue derivate prima e seconda.

$f''(x) = 2 + \frac{15}{4}|x|^{1/2}$ , dunque  $f$  è di classe  $C^2$  ma, nel punto 0, non esiste la derivata terza. Modificando in modo ovvio questo esempio si possono, per ogni intero  $k$ , trovare funzioni  $f$  di classe  $C^k$  con  $f^{(k)}$  non derivabile.

Si potrà scrivere anche  $f \in C^k[a, b]$  per significare che la funzione  $f$  è derivabile  $k$  volte con derivate continue nell'intervallo chiuso  $[a, b]$ . Nel seguito considereremo sovente funzioni di classe  $C^k$  anche quando la continuità della derivata  $k$ -esima non è strettamente necessaria.

Come per la derivata prima è possibile una interpretazione geometrica, in termini del grafico di  $f$ , della derivata seconda. Si osservi che ogni funzione affine  $f(x) = mx + b$  ha derivata seconda nulla; dunque le funzioni che hanno, in un determinato intorno, derivata seconda non nulla, hanno un grafico che in tale intorno non è rettilineo. Questo fatto suggerisce che il valore di  $f''(x)$  misuri, in un certo senso, la deviazione del grafico di  $f$  dalla sua retta tangente.

**PROPOSIZIONE 4.35** Se  $f \in C^2[a, b]$  allora esiste  $\xi \in (a, b)$  tale che

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + f''(\xi) \frac{(b - a)^2}{2}. \quad (4.49)$$

**DIMOSTRAZIONE** Sia  $M$  il numero definito dalla relazione

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + M(b - a)^2;$$

si ponga, per  $a \leq x \leq b$ ,

$$g(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x - a) + M(x - a)^2],$$

e si osservi che si ha

$$g''(x) = f''(x) - 2M,$$

cosicché il teorema sarà provato se si riesce a trovare un punto  $\xi$  ove  $g''(\xi) = 0$ . A tale scopo si noti che:  $g(a) = g'(a) = 0$ , mentre per la scelta di  $M$  risulta  $g(b) = 0$ ; dal teorema di Rolle segue che esiste  $\eta \in (a, b)$  ove  $g'(\eta) = 0$ . Applicando nuovamente il teorema di Rolle alla funzione  $g'$  sull'intervallo  $[a, \eta]$  (risulta  $g'(a) = g'(\eta) = 0$ ) si conclude che esiste  $\xi \in [a, \eta]$  tale che  $g''(\xi) = 0$ , come si voleva.  $\square$

La formula (4.49) costituisce una naturale estensione della (4.46) data dal teorema del valor medio, ma il suo principale interesse è "locale". Si noti, anzitutto, che nel corso della dimostrazione non si è fatto alcun uso (se non formale) del fatto che  $a$  è il primo estremo dell'intervallo, cosicché la (4.49) continua a valere anche su intervalli del tipo  $[b, a]$ . Se ora  $x_0$  e  $x$  sono due punti interni all'intervallo in cui  $f$  è  $C^2$ , applicando la (4.49) all'intervallo  $[x_0, x]$  (oppure  $[x, x_0]$ ) si ha

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(\xi) \frac{(x - x_0)^2}{2}, \quad (4.50)$$

ove  $\xi$  è un opportuno punto compreso fra  $x$  e  $x_0$ . Utilizzando ora la continuità di  $f''$ , si avrà che  $f''(\xi)$  potrà scriversi come somma di  $f''(x_0)$  e di una funzione  $\omega(x - x_0)$  infinitesima con  $x - x_0$ , cioè

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \omega(x - x_0). \quad (4.51)$$

Ma anche, ponendo  $h = x - x_0$ :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0) \frac{h^2}{2} + \frac{1}{2}h^2 \omega(h). \quad (4.52)$$

Tali relazioni costituiscono la naturale estensione della formula (3.31), pag. 106, ed esprimono la possibilità di approssimare localmente il grafico di una funzione di classe  $C^2$  con un polinomio di secondo grado.

Dalla proposizione precedente si possono dedurre alcune conseguenze che consentono di precisare la Proposizione 4.31 (beninteso per funzioni dotate di derivata seconda).

**PROPOSIZIONE 4.36** Se  $f \in C^2[a, b]$  e nel punto  $x_0 \in (a, b)$  si ha

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0,$$

allora  $x_0$  è un punto di minimo locale per  $f$ ; se invece

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0,$$

allora  $x_0$  è un punto di massimo locale per  $f$ .

**DIMOSTRAZIONE** Si supponga  $f''(x_0) > 0$ ; poiché  $f''$  è continua, esiste un intorno  $I$  di  $x_0$  tale che  $f''(x) > 0$ ,  $x \in I$ . Siccome  $f'(x_0) = 0$  dalla (4.50) si ha

$$f(x) > f(x_0) \quad \text{per } x \in I, \quad x \neq x_0,$$

dunque  $x_0$  è un punto di minimo locale per  $f$ . In modo analogo si prova la condizione per il massimo.  $\square$

Come nel caso delle condizioni locali sulla derivata prima, questo risultato non si può invertire (per esempio, la funzione  $f(x) = x^4$  ha minimo locale in 0 ma  $f'(0) = f''(0) = 0$ ).

Si ha tuttavia la seguente proprietà, di ovvia dimostrazione.

**PROPOSIZIONE 4.37** Se  $x_0 \in (a, b)$  è punto di minimo locale per  $f \in C^2[a, b]$  allora

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \geq 0;$$

in modo analogo, se  $x_0 \in (a, b)$  è di massimo locale, si ha

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) \leq 0.$$

Passiamo ora allo studio delle proprietà globali di  $f$  legate alla derivata seconda. Si è visto come il significato della derivata prima sia connesso alle proprietà di crescita e di decrescenza; si vedrà come il segno della derivata seconda sia collegato invece a un'altra importante proprietà geometrica, quella di *convessità*.

**DEFINIZIONE 4.38** Una funzione  $f$  definita su  $[a, b]$  si dice *convessa* nell'intervallo  $[a, b]$  se, per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \in [a, b]$  e per ogni  $t \in [0, 1]$ , risulta

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \leq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1)). \quad (4.53)$$

La (4.53) ha un'immediata interpretazione geometrica: posto  $x = x_1 + t(x_2 - x_1)$  essa si può riscrivere nel seguente modo

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1). \quad (4.54)$$

Si noti ora che l'equazione della retta passante per i punti di coordinate  $(x_1, f(x_1))$ ,  $(x_2, f(x_2))$  è proprio

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

e quindi la condizione (4.54) equivale ad affermare che il grafico di  $f$  nell'intervallo  $(x_1, x_2)$  sta *al di sotto della corda corrispondente* (si veda la Figura 4.30).

Ricordando che, in geometria piana, si dice *convessa* una figura che per ogni coppia di suoi punti contiene il segmento che li unisce, la Definizione 4.38 può essere riformulata dicendo che una funzione  $f(x)$  è convessa in un intervallo  $[a, b]$  se e solo se il suo *epigrafo* è convesso. L'epigrafo di  $f$  su  $[a, b]$  è l'insieme

$$E_f = \{(x, y) : a \leq x \leq b, \quad \vec{y} \geq f(x)\}$$

costituito dai punti che hanno ordinata maggiore o uguale a  $f(x)$  per ogni  $x \in [a, b]$  (si veda la Figura 4.31).

Il seguente teorema caratterizza le funzioni convesse "regolari", nel senso che possiedono le derivate prima e seconda.

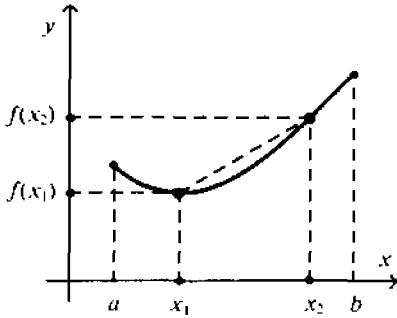


Figura 4.30 Funzione convessa.

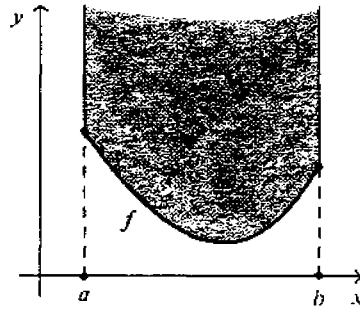


Figura 4.31 Epigrafo.

**TEOREMA 4.39** Sia  $f \in C^2[a, b]$ ;  $f$  è convessa in  $[a, b]$  se e solo se  $f''(x) \geq 0$  per ogni  $x$  di  $(a, b)$ <sup>(5)</sup>.

**DIMOSTRAZIONE** Osserviamo innanzitutto che  $f$  è convessa su  $[a, b]$  se e solo se per ogni terna  $u, v, w \in [a, b]$  con  $-u < v < w$  si ha

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v}. \quad (4.55)$$

Infatti, se  $f$  è convessa, ponendo  $v = (1 - t)u + tw$  ove  $0 < t = \frac{v-u}{w-u} < 1$ , si ha  $f(v) \leq (1 - t)f(u) + tf(w)$ , vale a dire

$$f(v) \leq \frac{w-v}{w-u} f(u) + \frac{v-u}{w-u} f(w), \quad (4.56)$$

che equivale alla (4.55), come si vede con qualche calcolo. Viceversa se la (4.55) è soddisfatta per ogni  $u, v, w$  con  $u < v < w$ , lo è anche la (4.56), e quindi, dalla definizione di convessità, si ha che  $f$  è convessa su  $[a, b]$ .

Dalla (4.55) seguono due fatti importanti:

- (a) La funzione  $f$  è convessa se e solo se il rapporto incrementale  $R_f(h)$  nel punto  $x_0$  è una funzione crescente di  $h$ .
- (b) La funzione  $f$  è convessa se e solo se la derivata  $f'(x)$  è una funzione crescente<sup>(6)</sup>.

La prova di (a) è ovvia; dimostriamo (b): dalla prima disuguaglianza (4.55) si ricava  $f'(u) \leq \frac{f(w) - f(u)}{w - u}$ , mentre dalla seconda segue  $\frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leq f'(w)$ . Pertanto  $f'(u) \leq f'(w)$ . Viceversa, se la derivata  $f'$  è crescente, scelti comunque  $u, v, w \in [a, b]$  con  $u < v < w$ , si ha dal teorema del valor medio:

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} = f'(\xi), \quad \frac{f(w) - f(v)}{w - v} = f'(\eta)$$

<sup>(5)</sup>Si noti che  $f$  può essere convessa pur senza possedere derivata seconda e neppure derivata prima (per esempio,  $f(x) = |x|$  è convessa). Tuttavia se  $f$  è convessa in  $[a, b]$  allora è continua in ogni punto interno.

<sup>(6)</sup>Si noti che la proprietà (a) è soddisfatta senza richiedere  $f \in C^1$ , la (b) è soddisfatta richiedendo solo  $f \in C^1$ .



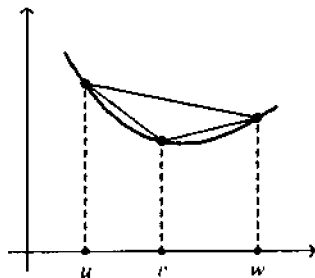


Figura 4.32

ove  $u < \xi < v < \eta < w$ , e quindi, da  $f'(\xi) \leq f'(\eta)$ , si deduce

$$\frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leq \frac{f(w) - f(v)}{w - v},$$

il che implica la (4.56) e quindi la convessità di  $f$ .

La tesi del teorema segue allora applicando, alla funzione  $f'$ , la Proposizione 4.30.  $\square$

Si definisce *concava* una funzione  $f(x)$  tale che per ogni coppia di punti  $x_1, x_2 \in [a, b]$  e per ogni  $t \in [0, 1]$  risulta

$$f(x_1 + t(x_2 - x_1)) \geq f(x_1) + t(f(x_2) - f(x_1)).$$

Se  $f$  è concava allora la funzione  $-f$  è convessa e quindi è del tutto naturale formulare l'analogo del Teorema 4.39 per le funzioni concave e interpretare il significato geometrico della concavità di una funzione.

## FUNZIONI IPERBOLICHE

In molte applicazioni si fa uso di particolari combinazioni di funzioni esponenziali. È comodo, allora, introdurre tali combinazioni come funzioni a sé stanti. Si pone perciò:

$$\begin{aligned} \sinh t &= \frac{e^t - e^{-t}}{2}, & t \in \mathbb{R} \\ \cosh t &= \frac{e^t + e^{-t}}{2}, & t \in \mathbb{R} \\ \operatorname{tgh} t &= \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{\sinh t}{\cosh t}, & t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tali funzioni si chiamano, rispettivamente, *seno iperbolico*, *coseno iperbolico* e *tangente iperbolica*.

La denominazione di queste funzioni è dovuta alle strette analogie che le legano alle usuali funzioni trigonometriche.

Innanzitutto si verifica subito che per ogni  $t$  si ha

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1 \tag{4.57}$$

dunque, al variare di  $t$  in  $\mathbb{R}$  i punti del piano di coordinate  $x = \cosh t$ ,  $y = \sinh t$  descrivono il ramo destro dell'iperbole di equazione  $x^2 - y^2 = 1$  (così, come i punti

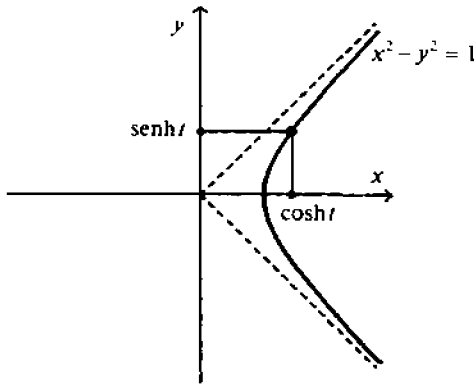


Figura 4.33

di coordinate  $x = \cosh t$ ,  $y = \sinh t$  descrivono, al variare di  $t$  in  $\mathbb{R}$ , la circonferenza di equazione  $x^2 + y^2 = 1$ .

Inoltre è facile verificare che

$$D \sinh t = \cosh t,$$

$$D \cosh t = \sinh t,$$

$$D \operatorname{tgh} t = \frac{1}{\cosh^2 t},$$

dunque le funzioni  $t \rightarrow \cosh t$  e  $t \rightarrow \sinh t$  sono soluzioni dell'equazione differenziale  $y'' - y = 0$  (mentre seno e coseno risolvono  $y'' + y = 0$ ).

È facile studiare il segno, la crescenza e la convessità delle funzioni iperboliche e ottenere, quindi, i loro grafici, riportati nelle Figure 4.34 e 4.35.

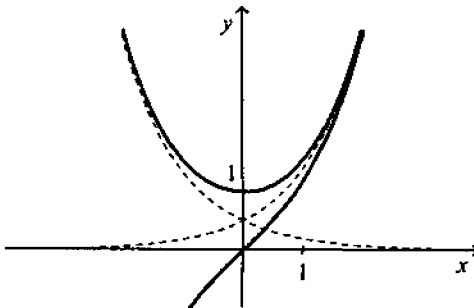


Figura 4.34 Seno e coseno iperboliche.

Poiché  $D \sinh t > 0$  la funzione  $y = \sinh t$  è invertibile, la sua funzione inversa si indica con  $t = \operatorname{seth} \sinh y$  ("settore seno iperbolico"; tale denominazione sarà giustificata tra breve). Similmente si definisce  $t = \operatorname{seth} \cosh y$  come la funzione inversa di  $y = \cosh t$ ,  $t > 0$ .

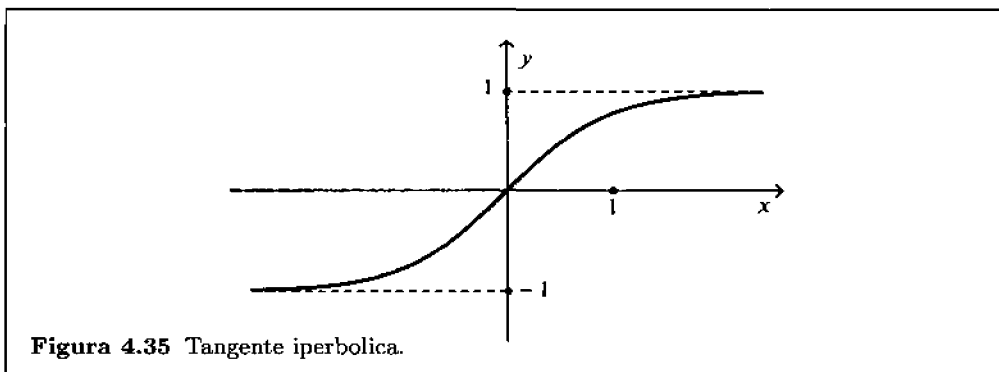


Figura 4.35 Tangente iperbolica.

Si osservi che dalla formula di Eulero (2.20), pag. 70, si deduce facilmente che  $\cosh t = \cos(it)$ ,  $\sinh t = \frac{1}{i} \sin(it)$ , da cui segue in particolare:

$$\cosh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \text{per ogni } t \text{ reale,}$$

il che, del resto, poteva dedursi direttamente dalla definizione.

Vi è un'ulteriore analogia geometrica tra le funzioni trigonometriche e iperboliche. Indichiamo con  $O$ ,  $A$  i punti  $(0,0)$  e  $(1,0)$  del piano, e sia  $t \in \mathbb{R}$ : se  $P = (x,y)$  con  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ , allora  $\frac{1}{2}t$  è l'area del settore circolare  $AOP$ ; similmente, se  $P = (x,y)$  con  $x = \cosh t$ ,  $y = \sinh t$  allora  $\frac{1}{2}t$  è l'area del settore iperbolico  $AOP$ . Questo fatto sarà dimostrato nel Capitolo 10 (Esempio 10.2(b), pag. 395).

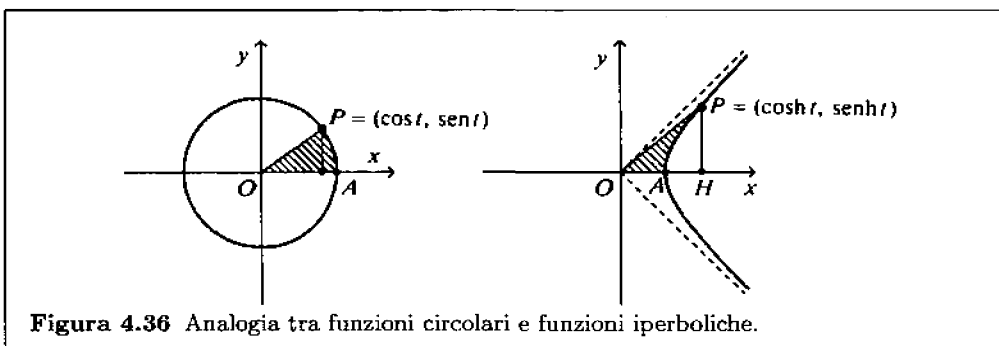


Figura 4.36 Analogia tra funzioni circolari e funzioni iperboliche.

## STUDIO DEL GRAFICO DI UNA FUNZIONE

Fra i teoremi del calcolo differenziale visti finora, ve ne sono alcuni che spiccano senz'altro per le possibilità applicative: "se una funzione ha derivata positiva è crescente", "se ha derivata seconda positiva è convessa"; "se in un punto critico la derivata cambia segno, il punto è di massimo o di minimo relativo", ... e via dicendo. Le affermazioni che abbiamo grossolanamente richiamato consentono di ridurre problemi del tutto inaffrontabili con metodi tradizionali (lo studio della crescita, della convessità, la determinazione dei massimi e dei minimi) a problemi algebrici (lo studio del segno, la determinazione degli zeri) e la chiave di volta di questa riduzione di complessità è l'operazione di derivazione.

Siccome abbiamo anche visto che vi sono regole semplici ed efficaci per ottenere la derivata di una funzione assegnata analiticamente, sembra che gli strumenti del calcolo differenziale consentano di affrontare, con successo, lo studio di qualunque funzione. Ciò è vero solo in parte perché, il più delle volte, come il lettore avrà ben compreso svolgendo qualche esercizio, l'espressione analitica della derivata è alquanto più complessa di quella della funzione da cui proviene e ciò rende tutt'altro che semplice la determinazione del segno o degli zeri della derivata.

Un metodo più ingenuo per lo studio del grafico di una funzione consiste nel tabularne un gran numero di valori, cosa oggi relativamente semplice usando una calcolatrice programmabile e riportandoli, poi, su un foglio in un riferimento cartesiano. Attualmente si trovano sul mercato molti programmi che consentono di tracciare il grafico di una funzione usando un personal computer e anche diverse calcolatrici tascabili hanno capacità grafiche. Occorre, però, prestare molta attenzione a non accettare acriticamente i risultati di questi pur comodi strumenti. Basterà un esempio per convincere che si possono prendere grossi abbagli: la Figura 4.37 mostra il grafico

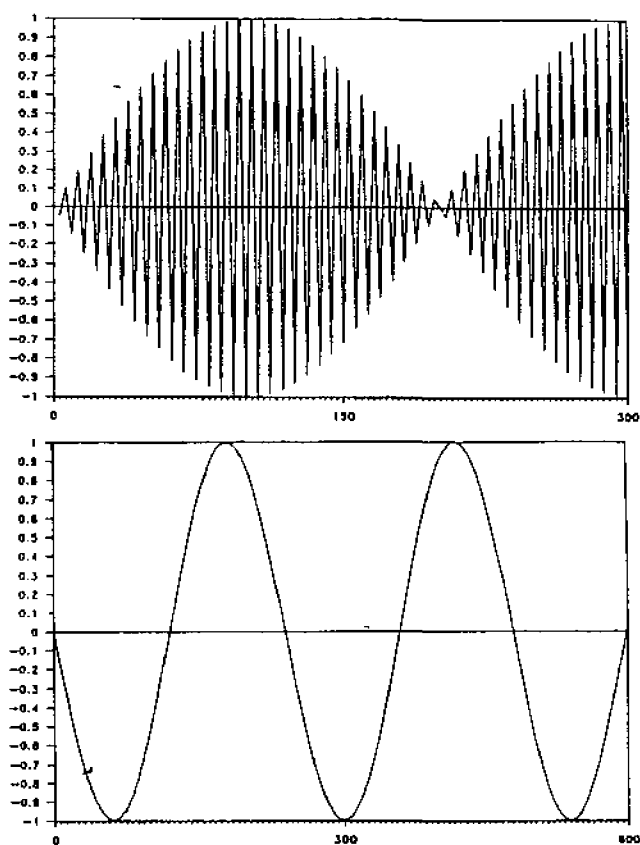
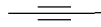


Figura 4.37 Grafici erronei della funzione  $f(x) = \sin x$  su  $[0, 300]$  e su  $[0, 600]$ .

della funzione  $f(x) = \operatorname{sen} x$ , come viene disegnato da uno dei più diffusi fogli elettronici, sugli intervalli  $[0,300]$  e  $[0,600]$ . Lasciamo al lettore ogni commento!

Vediamo ora, tramite qualche esempio, quali sono i problemi principali che bisogna risolvere per tracciare il grafico di una funzione usando gli strumenti del calcolo differenziale.



**ESEMPIO 4.40** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{1 + \ln x}{x} \quad (4.58)$$

e si osservi, innanzi tutto, che l'insieme di definizione è  $x > 0$ . È opportuno studiare subito il comportamento per  $x \rightarrow 0$  e per  $x \rightarrow +\infty$ . Si ha ovviamente

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + \ln x}{x} = -\infty;$$

in casi come questo si dice che la funzione ha un *asintoto verticale* per  $x = 0$ .

Ricordando poi che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x = +\infty$  e ponendo  $x = \ln t$ , si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t/\ln t = +\infty$  e, quindi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \ln x}{x} = 0.$$

Si dirà allora che la funzione ha la retta  $y = 0$  come *asintoto orizzontale*.

Vi sono poi funzioni dotate di *asintoti obliqui*: alcuni esempi sono mostrati nell'Esercizio 4.5.3

Osserviamo, poi, che  $f(x) = 0$  se e solo se  $x = \frac{1}{e}$ . La funzione è derivabile per  $x > 0$  e si ha

$$f'(x) = \frac{\frac{x}{x} - (1 + \ln x)}{x^2} = -\frac{\ln x}{x^2},$$

la derivata è, dunque, positiva per  $0 < x < 1$ , negativa per  $x > 1$ . Ne segue che  $f(x)$  è crescente in  $(0,1)$  e decrescente in  $(1, +\infty)$ ; il punto  $x = 1$  è allora un punto di massimo relativo e in esso la funzione vale  $f(1) = 1$ . Ci si convince subito che si tratta di un massimo assoluto.

Calcolando la derivata seconda si trova

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}x^2 + 2x \ln x}{x^4} = \frac{2 \ln x - 1}{x^3};$$

$f''$  è positiva per  $\ln x > 1/2$ , cioè per  $x > \sqrt{e}$ , negativa per  $0 < x < \sqrt{e}$ . Attraversando il punto  $x = \sqrt{e}$  la funzione cessa, dunque, di essere concava (lo è su  $(0, \sqrt{e})$ ) e diviene convessa (su  $(\sqrt{e}, +\infty)$ ); i punti siffatti si dicono *punti di flesso*, in essi il grafico di  $f$  "attraversa" la retta tangente.

Ormai gli elementi raccolti sono sufficienti a tracciare un grafico approssimativo di  $f$  (Figura 4.38).

Con facili considerazioni sulle simmetrie rispetto agli assi, si studiano allora anche i grafici delle funzioni

$$f(x) = \frac{1 + \ln |x|}{|x|}, \quad f(x) = \left| \frac{1 + \ln x}{x} \right|, \quad (4.59)$$

(si veda la Figura 4.39).

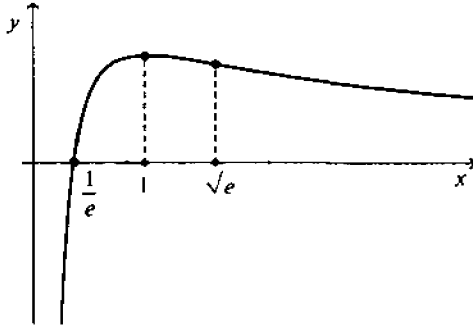


Figura 4.38 Grafico della funzione (4.58).

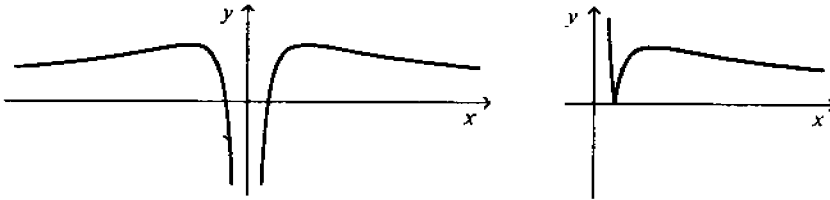


Figura 4.39 Grafici delle funzioni (4.59).

**ESEMPIO 4.41** Si consideri ora la funzione

$$f(x) = \frac{|e^x - 1|}{1 + |x|}; \quad (4.60)$$

essa è definita per ogni  $x$ , si ha  $f(0) = 0$  mentre per  $x \neq 0$  risulta  $f(x) > 0$ . Si ha, poi,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

La Figura 4.40 mostra le informazioni finora ottenute.

Inoltre

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{1 + x} \text{ se } x \geq 0, \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{x - 1} \text{ se } x \leq 0,$$

quindi

$$f'(x) = \frac{xe^x + 1}{(1 + x)^2} \text{ se } x > 0, \quad f'(x) = \frac{xe^x - 2e^x + 1}{(x - 1)^2} \text{ se } x < 0. \quad (4.61)$$

Nel punto  $x = 0$  la funzione non è derivabile in quanto

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1$$

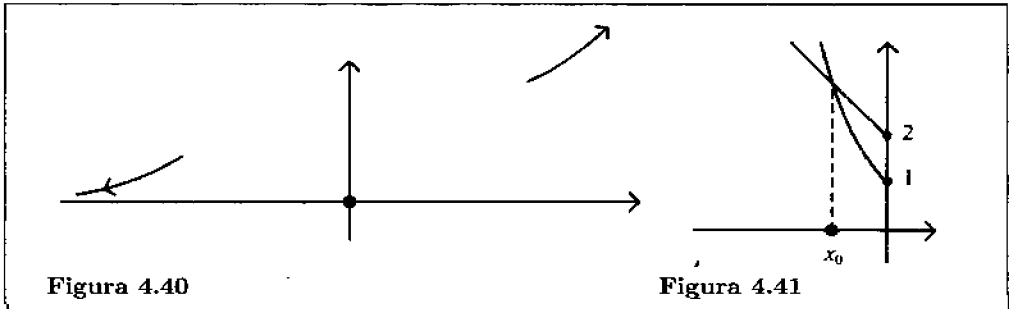
(si ricordi il limite notevole (4.27)).

Dalla (4.61) si ricava che per  $x > 0$  la derivata è positiva e quindi la funzione è crescente, mentre per  $x < 0$  la derivata è positiva quando  $(x-2)e^x + 1 > 0$ , cioè quando  $e^{-x} > 2-x$ . Disegniamo il grafico delle due funzioni  $e^{-x}$  e  $2-x$  per  $x < 0$  (Figura 4.41): poiché la differenza

$$F(x) = e^{-x} - (2-x)$$

ha derivata  $F'(x) = -e^{-x} + 1$  negativa (per  $x < 0$  si ha  $e^{-x} > 1$ ), vi è un unico  $x_0$  per il quale  $e^{-x_0} = 2 - x_0$ .

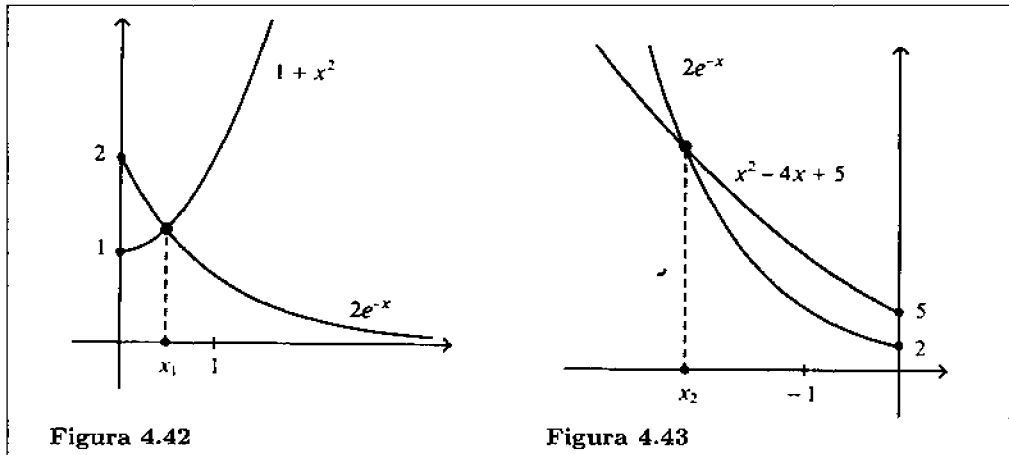
Per  $x < x_0$  si avrà  $e^{-x} > 2-x$  e quindi la funzione  $f(x)$  sarà crescente, per  $x_0 < x < 0$  varrà invece la disuguaglianza opposta e allora  $f(x)$  sarà decrescente. Il punto  $x_0$  è di massimo relativo per  $f$ .



Poiché inoltre  $F(-2) = e^2 - 4 > 0$ ,  $F(-1) = e - 3 < 0$  il punto  $x_0$  è compreso fra  $-2$  e  $-1$ . Esaminando la derivata seconda  $f''(x)$  si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{(1+x^2)e^x - 2}{(1+x)^3} & \text{se } x > 0 \\ \frac{(x^2 - 4x + 5)e^x - 2}{(x-1)^3} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Per  $x > 0$  la derivata seconda ha lo stesso segno di  $(1+x^2) - 2e^{-x}$ , dunque, (Figura 4.42) è dapprima negativa, si annulla in un punto  $x_1$  compreso fra  $0$  e  $1$  e, per valori maggiori di  $x_1$ , è positiva.



Per  $x < 0$  la derivata seconda ha lo stesso segno di  $2e^{-x} - (x^2 - 4x + 5)$ , allo stesso modo si vede che essa cambia segno in un unico punto  $x_2$  compreso fra  $-3$  e  $-2$  (Figura 4.43). I punti  $x_1$  e  $x_2$  sono di flesso per la funzione  $f(x)$ . Gli elementi trovati consentono di tracciare il grafico qualitativo di  $f$  illustrato nella Figura 4.44.

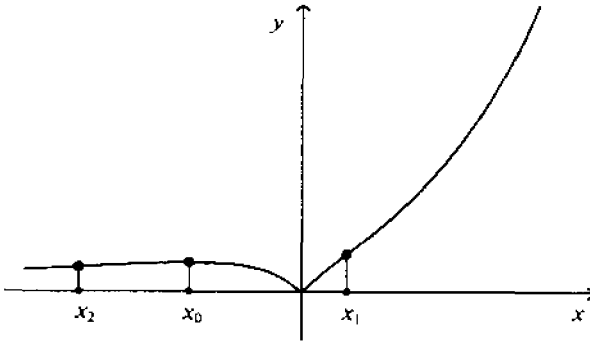


Figura 4.44 Grafico della funzione (4.60).



## ESERCIZI

4.5.1 Si consideri la funzione  $y = f(x)$  il cui grafico è riportato nella Figura 4.45 e si disegnino i grafici di

$$y = f(|x|)$$

$$y = |f(x)|$$

$$y = e^{f(x)}$$

$$y = f(x) + f(-x).$$

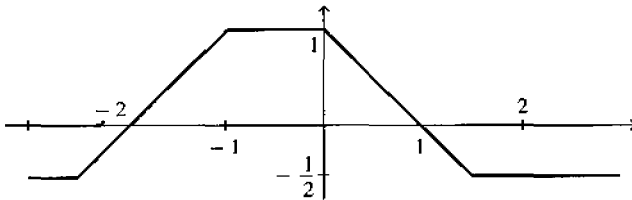


Figura 4.45



4.5.2 Individuare eventuali massimi e minimi nelle seguenti funzioni:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & f(x) = x^4 - 4x + 5; \\
 \text{(b)} & f(x) = \left(5 + \frac{1}{x^2}\right)^2 - \frac{8}{x^3}; \\
 \text{(c)} & f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+x^2}; \\
 \text{(d)} & f(x) = \sqrt{1 + \operatorname{sen} e^x}; \\
 \text{(e)} & f(x) = \ln x - \ln^2 x; \\
 \text{(f)} & f(x) = \frac{\ln x}{1 + \ln x}; \\
 \text{(g)} & f(x) = \arcsin \frac{x}{x+1}.
 \end{array}$$

4.5.3 Se per una funzione  $f(x)$  esistono finiti i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q,$$

allora si dice che la retta di equazione

$$y = mx + q$$

è *asintoto obliquo* per  $x \rightarrow +\infty$ .

Provare che le seguenti funzioni hanno, per  $x \rightarrow +\infty$  e per  $x \rightarrow -\infty$ , asintoti obliqui e determinarli.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x + 1 + \frac{1}{x}, & f(x) &= \frac{x^3 + 3}{x^2 - 1}, & f(x) &= \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}, \\
 f(x) &= \frac{\sqrt[3]{x^5 + 3x}}{\sqrt[3]{x^2 + 3}}, & f(x) &= \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x}}.
 \end{aligned}$$

4.5.4 Studiare il grafico delle seguenti funzioni (considerando: insiemi di definizione, limiti alla frontiera, monotonia, convessità, punti di massimo e di minimo relativo, punti di flesso, valore di  $f'$  nei punti limite e nei punti di flesso, asintoti):

$$\begin{array}{ll}
 \text{(a)} & f(x) = \frac{x-3}{x^2-1}, \\
 \text{(b)} & f(x) = \frac{|x-3|}{x^2-1}, \\
 \text{(c)} & f(x) = \frac{2|x|-x^2+x}{x+1}, \\
 \text{(d)} & f(x) = \frac{|1-\ln x|}{x}, \\
 \text{(e)} & f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}, \\
 \text{(f)} & f(x) = \operatorname{sen}^2 x, \\
 \text{(g)} & f(x) = x^2(\ln x - 1), \\
 \text{(h)} & f(x) = \ln(e^x - x), \\
 \text{(i)} & f(x) = x + \sqrt{x^2 + x}, \\
 \text{(l)} & f(x) = |x|^{\frac{2}{3}}(x-1)^2, \\
 \text{(m)} & f(x) = \frac{\sqrt{|x|-1}}{x^2+1}, \\
 \text{(n)} & f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^3-1}{x}}, \\
 \text{(o)} & f(x) = e^{x^2/(x-1)}, \\
 \text{(p)} & f(x) = \left|\frac{x}{x-1}\right|, \\
 \text{(q)} & f(x) = \arcsen \frac{x^2-1}{x^2+1}, \\
 \text{(r)} & f(x) = \sqrt[5]{x(x^2-1)^2}, \\
 \text{(s)} & f(x) = x \tanh \frac{1}{x}.
 \end{array}$$

- 4.5.5 Una sostanza radioattiva produce, nell'unità di tempo, un numero  $N$  di neutroni proporzionale al suo volume e ne dissipa una parte proporzionale alla sua superficie; supponendo che il campione sia sferico, di raggio  $r$ , si ha

$$\frac{dN}{dt} = \alpha r^3 - \beta r^2.$$

Calcolare il raggio minimo che consente alla reazione nucleare di autosostenersi (massa critica nei reattori nucleari e nelle bombe atomiche).

- 4.5.6 Fra tutti i rettangoli inscritti in una circonferenza, determinare quello di area massima.
- 4.5.7 In un cerchio di raggio  $R$ , alla corda di lunghezza  $l$ , corrisponde una "freccia" (vedi Figura 4.46) che misura  $h$ . Ricavare  $l$  in funzione di  $h$  e studiarne la variazione.

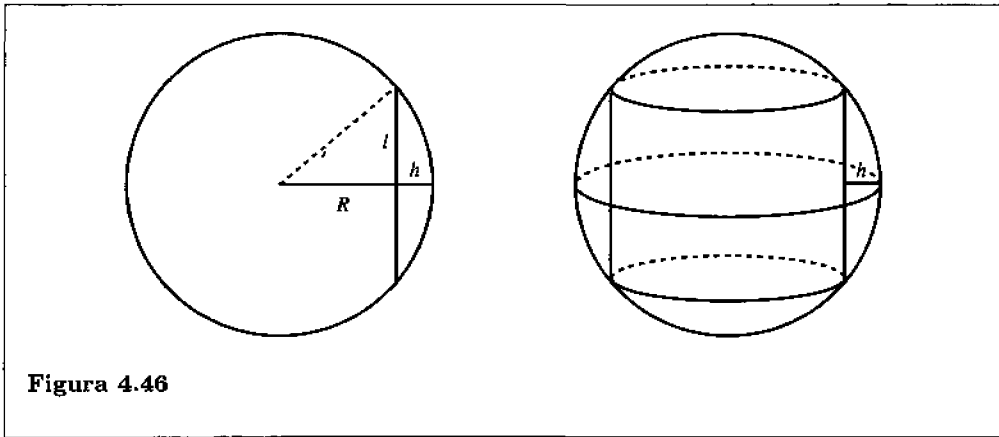


Figura 4.46

Nella sfera di uguale raggio, è inscritto il cilindro di altezza  $l$ ; studiare la variazione del suo volume in funzione di  $h$ .

- 4.5.8 Fra tutti i coni circolari circoscritti ad una sfera, determinare quello di superficie laterale minima.
- 4.5.9 Si vuole praticare un'apertura a forma di rettangolo sormontato da un triangolo equilatero. Trovare le dimensioni necessarie per ottenere  
(a) con perimetro dato, la massima apertura;  
(b) con apertura assegnata, il perimetro minimo.
- 4.5.10 Un laboratorio conduce una serie di test per studiare il passaggio nel sangue di una sostanza iniettata per via intramuscolare. Il modello matematico ipotizzato fornisce la concentrazione  $Y$  della sostanza in funzione del tempo  $t$  nella forma

$$Y = \frac{2t}{t^2 + 4}, \quad t > 0.$$

- (a) Determinare la percentuale di sostanza presente nel sangue nell'istante dell'iniezione, dopo una, due e tre ore.

(b) Determinare gli intervalli di tempo in cui la concentrazione cresce e diminuisce.

(c) Determinare quando si ha il picco della concentrazione e quale è il valore massimo raggiunto.

4.5.11 La concentrazione di una sostanza chimica nel sangue di un persona, dopo un tempo  $t$  da quando è stata introdotta, può essere descritta dalla funzione  $Y(t) = \frac{2t}{16 + t^3}$ . Quando si ha la concentrazione massima? Confrontare il modello matematico qui utilizzato con quello indicato nel precedente esercizio.

4.5.12 Il flusso luminoso in un punto è direttamente proporzionale al quoziente tra l'intensità della sorgente luminosa e il quadrato della distanza del punto dalla sorgente. Due sorgenti di intensità relative  $A$  e  $B$  distano  $d$  l'una dall'altra. In quale punto della loro congiungente il flusso luminoso sarà minimo?

4.5.13 Da una nave, che viaggia verso nord ad una velocità  $V$ , si avvista un naufrago. La nave si troverà alla distanza minima  $d$  dal naufrago quando avrà percorso un tratto lungo  $l$ . Durante questo percorso viene calata in mare una scialuppa che può viaggiare a velocità  $v$ . In quale punto del percorso si dovrà calare la scialuppa per raggiungere nel minor tempo possibile il naufrago?

4.5.14 Sia  $m$  un assegnato numero reale. Si dica per quali valori del parametro  $q$  l'equazione

$$e^x = mx + q$$

ha due, una o nessuna soluzione.

4.5.15 Sia  $\alpha$  tale che la funzione  $f(x) = \alpha x - \frac{x^3}{1+x^2}$  risulti crescente. Provare che  $\alpha \geq \frac{9}{8}$ .

4.5.16 Verificare che i grafici delle funzioni  $y = \pm e^{-x}$  sono tangenti al grafico di  $y = e^{-x} \sin x$  nei suoi punti di flesso.

4.5.17 Provare che l'equazione  $x^2 = x \cdot \sin x + \cos x$  ha due sole soluzioni reali.

4.5.18 Dimostrare che per  $x \geq 0$  è verificata la disequazione  $x - \sin x < \frac{x^3}{6}$ .

4.5.19 Trovare il massimo valore della costante positiva  $K$  per cui si ha

$$K \ln x \leq \sqrt{x} \quad \text{per ogni } x > 0.$$

4.5.20 Dimostrare che le seguenti funzioni sono crescenti per  $x \geq 0$ :

$$(a) \quad f(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x, \quad (b) \quad f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} - \cos x,$$

$$(c) \quad f(x) = -x + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \sin x, \quad (d) \quad f(x) = x - \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} - \sin x$$

e desumerne la validità delle disequazioni

$$x - \frac{x^3}{3!} \leq \operatorname{sen} x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!},$$

$$1 - \frac{x^2}{2!} \leq \operatorname{cos} x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}.$$

**4.5.21** Dimostrare che esiste un solo numero reale  $x_0$  per cui si annulla la funzione

$$f(x) = \frac{x-1}{1+x^2} + \arctan x.$$

**4.5.22** Provare che

$$\ln(1 + \operatorname{sen} x) \leq \arctan x \quad \text{per} \quad 0 \leq x \leq \pi/2,$$

$$\frac{2x}{2-x^2} > \operatorname{sen} x \quad \text{per} \quad 0 < x < \sqrt{2}.$$

**4.5.23** Provare che

$$e^{-x} + \operatorname{sen} x > 1 \quad \text{per} \quad 0 < x < \pi/2,$$

$$xe^{1/x} > 1 \quad \text{per} \quad x > 0.$$

**4.5.24** Trovare un punto sull'ellisse di equazione  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  tale che sia minima la distanza dal punto di coordinate  $(a,0)$ . Discutere al variare del parametro  $a$ .

**4.5.25** Trovare i punti dell'iperbole di equazione  $x^2 - y^2 = 1$  che sono più vicini al punto di coordinate  $(a,0)$ . Discutere al variare del parametro  $a$ .

**4.5.26** Determinare un settore circolare di perimetro assegnato e di area massima.

**4.5.27** Disegnare un grafico approssimativo delle funzioni

$$f(x) = \frac{a + \operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}, \quad 0 < x < 2\pi$$

al variare del parametro  $a > 0$ .

**4.5.28** Sia  $f \in C^1([a,b])$  e si supponga che  $f$  abbia  $n+1$  zeri distinti in  $[a,b]$ .

(a) Si provi che  $f'$  ha almeno  $n$  zeri distinti in  $[a,b]$ .

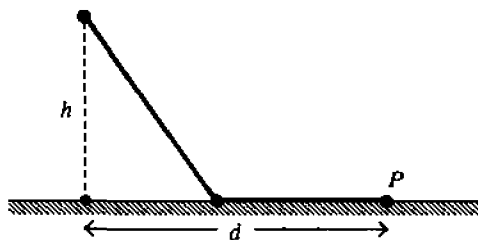
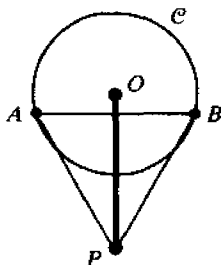
(b) Si provi che per ogni  $\lambda$  reale la funzione  $g(x) = f'(x) - \lambda f(x)$  ha almeno  $n$  zeri distinti in  $[a,b]$ .

[Si consideri l'identità  $f' - \lambda f = e^{\lambda x} D(e^{-\lambda x} f(x))$ ].

**4.5.29** Data una circonferenza  $\Gamma$  di raggio  $R$  e centro nel punto  $(a,0)$  con  $0 < a < R$ , si vuole determinare il punto  $P = (x,y)$  di  $\Gamma$  che minimizza la distanza dall'origine  $d = \sqrt{x^2 + y^2}$ , o equivalentemente il suo quadrato  $d^2$ . Poiché l'equazione della circonferenza è  $(x-a)^2 + y^2 = R^2$  la funzione da minimizzare è  $d^2 = R^2 - a^2 + 2ax$  e la sua derivata rispetto a  $x$  non ha zeri. Come mai?

**4.5.30** Un foglio di carta rettangolare di cm  $20 \times 30$  viene piegato in modo che un vertice vada a toccare un lato opposto. Come si deve fare affinché la lunghezza della piegatura sia massima?

- 4.5.31 Sia  $\mathcal{C}$  una circonferenza di centro  $O$  e sia  $ABP$  un triangolo equilatero avente i punti  $A, B$  su  $\mathcal{C}$ . Determinare il valore massimo di  $PO$ .



- 4.5.32 Un tale si trova in barca a distanza  $h$  da un tratto di costa rettilinea. La sua velocità di spostamento, a remi è  $v$ , mentre a piedi è  $v'$ . Egli deve raggiungere un punto  $P$  sulla linea di costa che dista  $d$  dal punto della costa di minima distanza dalla barca. Si determini il percorso di tempo minimo, al variare dei parametri  $d, h, v, v'$ .
- 4.5.33 Dire per quali valori positivi di  $a$  l'equazione  $a^x = x$  ha soluzioni, specificando quante sono. Provare, inoltre, che l'equazione  $a^{(a^x)} = x$  ha lo stesso numero di soluzioni dell'equazione data.
- 4.5.34 Studiare dominio, immagine e monotonia delle seguenti funzioni. Scrivere, quando è possibile, la funzione inversa.

$$(a) \quad f(x) = \frac{x-3}{x+3}; \quad (b) \quad f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x;$$

$$(c) \quad f(x) = \arctan \frac{x}{x+3}; \quad (d) \quad f(x) = \operatorname{sen}(2-x^2).$$

- 4.5.35 Dimostrare le formule di addizione delle funzioni iperboliche:

$$\begin{aligned} \cosh(a+b) &= \cosh a \cdot \cosh b + \sinh a \cdot \sinh b, \\ \sinh(a+b) &= \sinh a \cdot \cosh b + \cosh a \cdot \sinh b. \end{aligned}$$

- 4.5.36 Scrivere esplicitamente le funzioni inverse di  $\sinh t$  su  $\mathbb{R}$  e di  $\cosh t$  per  $t > 0$ .

## 4.6 Polinomi e serie di Taylor

Le serie di potenze finora considerate sono del tipo

$$\sum a_n x^n;$$

naturalmente tutto quanto detto a tale proposito, si estende alle serie di potenze della forma

$$\sum b_n (x - x_0)^n, \quad (4.62)$$

ove  $x_0$  è un numero fissato, detto *centro* della serie di potenze (4.62) (Osservazione 2.9, pag. 74). L'intervallo di convergenza della serie (4.62) ha centro in  $x_0$  e, se il raggio

di convergenza  $R$  è non nullo e  $f(x)$  è la somma della serie, si avrà (formula (3.41), pag. 115):

$$b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Si potrà allora scrivere per ogni  $n$

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \\ + f^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_n(x), \end{aligned} \quad (4.63)$$

ove  $R_n(x) = (x - x_0)^n \omega(x - x_0)$ , con  $\omega$  infinitesimo per  $x \rightarrow x_0$ .

Per le funzioni che sono somma di una serie di potenze, vale, dunque, una formula che generalizza la (4.51).

In effetti la (4.63) è vera per ogni funzione di classe  $C^n$ .

**TEOREMA 4.42** Sia  $f$  una funzione di classe  $C^n$  in  $[a, b]$ , e sia  $x_0$  un fissato punto di  $(a, b)$ ; per ogni  $x \in (a, b)$  esiste allora  $\xi \in (a, b)$  tale che

$$\begin{aligned} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots \\ \dots + f^{(n-1)}(x_0) \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(\xi) \frac{(x - x_0)^n}{n!} \end{aligned} \quad (4.64)$$

(si noti che  $\xi$  dipende ovviamente da  $x$ ).

La (4.64) prende il nome di *formula di Taylor* e, tenendo conto della continuità di  $f^{(n)}$ , si può porre nella forma

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_n(x) \quad (4.65)$$

ove

$$R_n(x) = (x - x_0)^n \omega(x - x_0)$$

con  $\omega$  infinitesimo per  $x \rightarrow x_0$ .

**DIMOSTRAZIONE** La dimostrazione è una naturale (seppur non ovvia) estensione di quella della Proposizione 4.35, riguardante il caso  $n = 2$ . Fissato il punto  $x$  sia  $M$  il numero definito dalla relazione

$$f(x) = Q(x) + M(x - x_0)^n,$$

ove  $Q(t)$  è il polinomio

$$Q(t) = f(x_0) + f'(x_0)(t - x_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (t - x_0)^{n-1}.$$

Ponendo

$$g(t) = f(t) - Q(t) - M(t - x_0)^n$$

si ha

$$g^{(n)}(t) = f^{(n)}(t) - n!M.$$

Per provare la tesi occorre verificare che  $M = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$  per un certo punto  $\xi$ ; ciò dunque equivale a provare che per un certo  $\xi$  si ha  $g^{(n)}(\xi) = 0$ .

Siccome  $Q^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$  per  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , si ha

$$g(x_0) = g'(x_0) = \dots = g^{(n-1)}(x_0) = 0;$$

ma la scelta del numero  $M$  comporta  $g(x) = 0$  e dunque, per il teorema di Rolle, si ha  $g'(x_1) = 0$  in un certo punto  $x_1$  compreso fra  $x_0$  e  $x$ . Nuovamente per il teorema di Rolle, si ha allora  $g''(x_2) = 0$  per un certo punto  $x_2$  compreso fra  $x_0$  e  $x_1$ . Dopo  $n$  passi si conclude che  $g^{(n)}(x_n) = 0$  per un certo  $x_n$  compreso fra  $x_0$  e  $x_{n-1}$ . Il teorema pertanto è dimostrato.

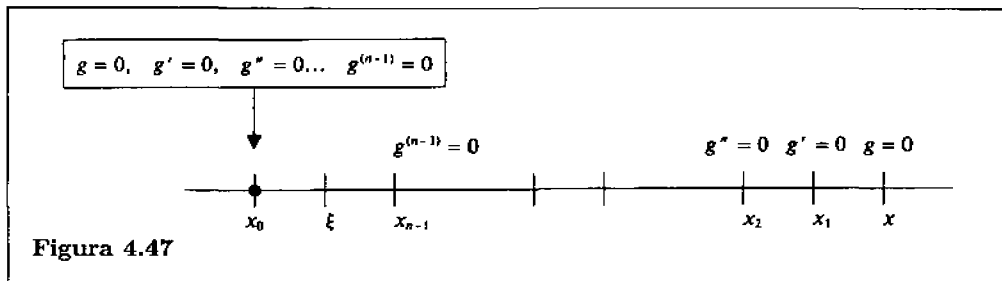


Figura 4.47

Le formule di Taylor (4.63) e (4.64) costituiscono una generalizzazione delle formule (4.49), (4.50) e (3.31) pag. 106, (4.46) le quali forniscono lo sviluppo di Taylor, rispettivamente, al secondo e al primo ordine. Il polinomio

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

si dice *polinomio di Taylor* di ordine  $n$  della funzione  $f$  nel punto  $x_0$ , mentre

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) \quad (4.66)$$

si dice *termine complementare* o resto.

I polinomi sono tra le funzioni più semplici che si incontrano in analisi; il problema di approssimare una data funzione con un polinomio è molto importante, anche dal punto di vista numerico. Infatti i polinomi sono funzioni i cui valori si possono calcolare in maniera molto efficiente, se ne possono facilmente ricavare le derivate, studiare l'andamento, determinare (meno facilmente) gli zeri ecc.

A seconda dell'uso che si vuol fare della approssimazione vi sono vari modi per approssimare una data funzione con un polinomio di grado  $n$ . In ogni caso occorre imporre (almeno)  $n + 1$  condizioni, per poter determinare gli  $n + 1$  coefficienti del polinomio.

La approssimazione di  $f(x)$  con il suo polinomio di Taylor  $P_n(x)$  è una *approssimazione locale*: essa corrisponde a imporre le  $n + 1$  condizioni

$$P_n(x_0) = f(x_0), \quad P_n'(x_0) = f'(x_0), \dots, \quad P_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0);$$

tale approssimazione è, in generale, molto accurata nelle vicinanze del "punto iniziale"  $x_0$ , ma lo è, assai meno, lontano da  $x_0$ . Nelle Figure 4.48-4.53 sono riportati i grafici dei primi polinomi di Taylor di alcune funzioni elementari.

L'efficacia teorica della formula di Taylor dipende dall'espressione che si dà del termine complementare  $R_n(x)$  il quale, come si vedrà in seguito, può assumere forme molto diverse.

Nel caso in cui  $f(x)$  ammette in  $(a, b)$  derivate di ogni ordine è naturale associare a  $f(x)$  la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad (4.67)$$

della quale il polinomio di Taylor, di ordine  $n$ , costituisce la somma parziale  $n$ -esima. Tale serie prende il nome di *serie di Taylor* di  $f(x)$  di punto iniziale  $x_0$ ; nel caso in cui  $x_0 = 0$  essa prende anche il nome di *serie di Mac Laurin*.

In queste condizioni è naturale chiedersi se la serie (4.67) risulta convergente e se, in tale caso, la sua somma è la funzione  $f(x)$  che ne "genera" i coefficienti. Quando ciò avviene si dirà che  $f(x)$  è *svilupabile in serie di Taylor* (o di Mac Laurin).

Sappiamo che una generica funzione  $f$ , dotata di tutte le derivate, non è svilupabile in serie di Taylor (Osservazione 3.26, pag. 116); d'altra parte sappiamo anche che ogni funzione analitica è, per definizione, somma di una serie di potenze e tale serie, in base alle (3.41), pag. 115, altro non è che la serie di Taylor della funzione stessa. È chiaro tuttavia che  $f(x)$  è svilupabile (in un intorno di  $x_0$ ) in serie di Taylor se e solo se per ogni  $x$  di tale intorno il termine complementare  $R_n(x)$  tende a zero per  $n \rightarrow \infty$ <sup>(7)</sup>. Dal Teorema 4.42 segue allora un criterio *sufficiente* per la svilupabilità in serie di una funzione.

**PROPOSIZIONE 4.43** Se esistono due costanti  $M$  e  $K$  tali che, per ogni  $x$  di  $(a, b)$  e ogni  $n$

$$|f^{(n)}(x)| \leq MK^n, \quad (4.68)$$

allora, comunque si prenda  $x_0 \in (a, b)$ , la funzione  $f(x)$  è svilupabile in serie di Taylor di centro  $x_0$ .

**DIMOSTRAZIONE** Da (4.65) e (4.64) si ha

$$R_n(x) = \frac{(x - x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

e quindi

$$|R_n(x)| \leq M \frac{[K(x - x_0)]^{n+1}}{(n+1)!};$$

poiché  $\frac{[K(x - x_0)]^n}{n!}$  è il termine generale della serie esponenziale, la quale è convergente, esso è infinitesimo per tutti gli  $x$ , dunque  $R_n(x)$  tende a zero per ogni  $x$  di  $(a, b)$ .  $\square$

Il criterio espresso dalla condizione (4.68) è semplice ma non ha grande efficacia e solo poche delle serie di potenze che sono state incontrate finora verificano le condizioni da esso imposte<sup>(8)</sup>. Nel seguito si troveranno forme più convenienti del resto  $R_n$  che danno luogo a stime meno grossolane.

<sup>(7)</sup> Si noti che  $R_n(x)$ , a dispetto della notazione (peraltro ormai tradizionale), non è il resto  $n$ -esimo della serie di potenze (4.67).

<sup>(8)</sup> Per esempio, le serie (4.20) e (4.21) verificano tale condizione; abbiamo, dunque, un altro modo per verificare che le somme di tali serie sono le funzioni seno e coseno.



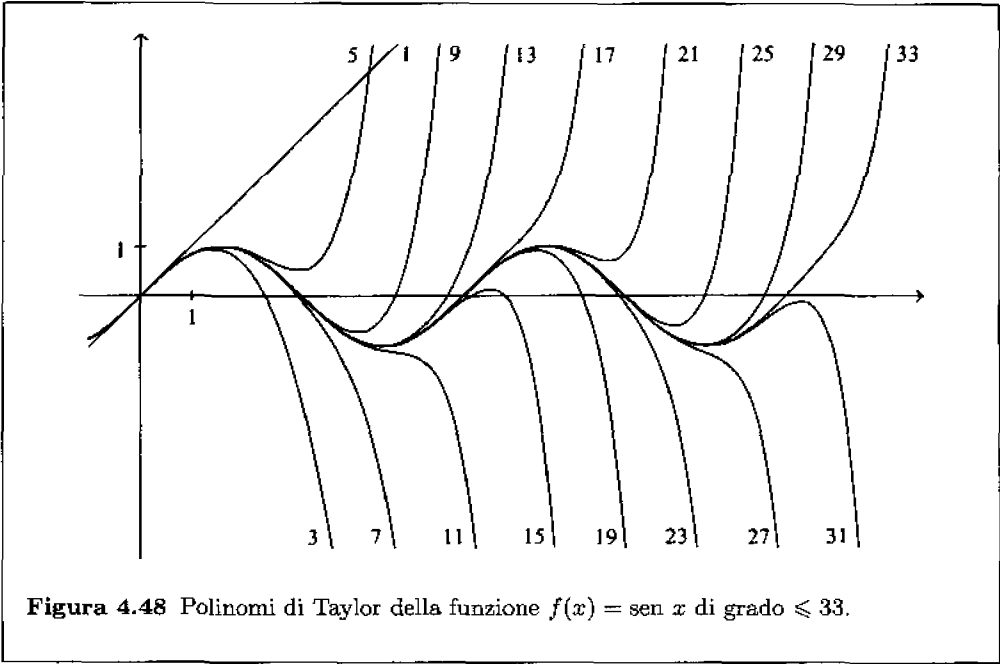


Figura 4.48 Polinomi di Taylor della funzione  $f(x) = \sin x$  di grado  $\leq 33$ .

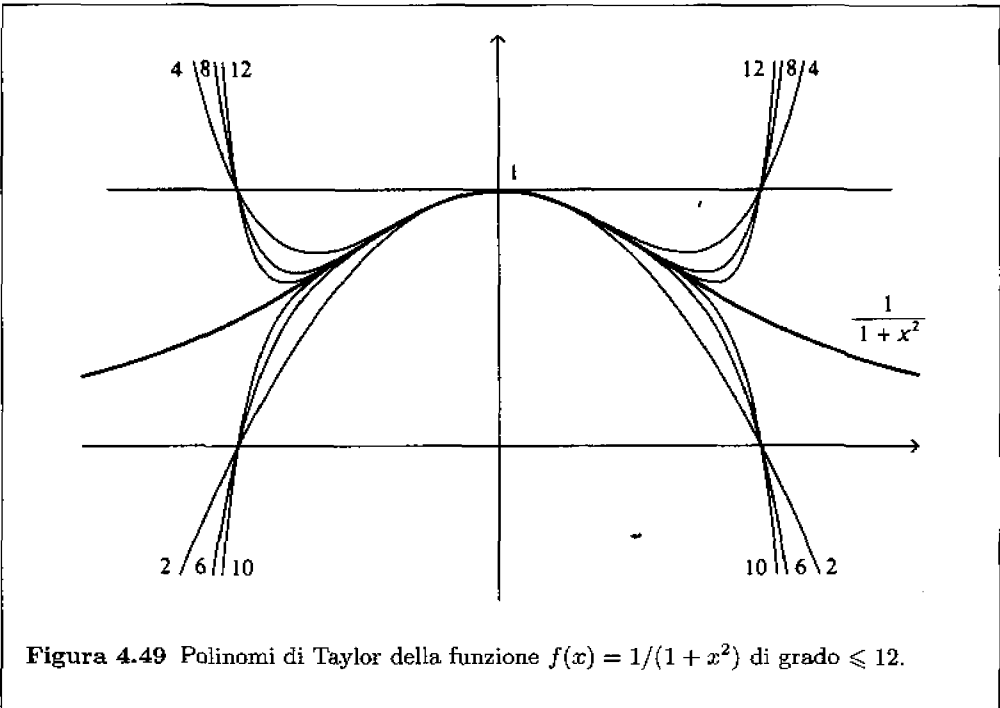
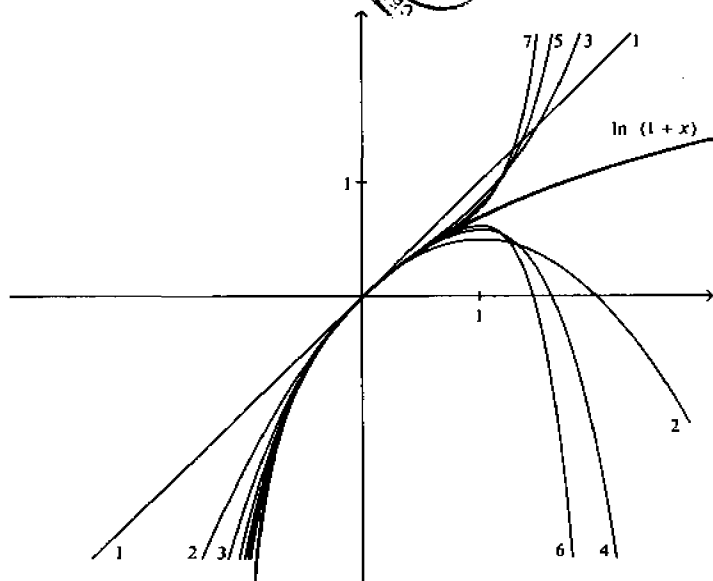
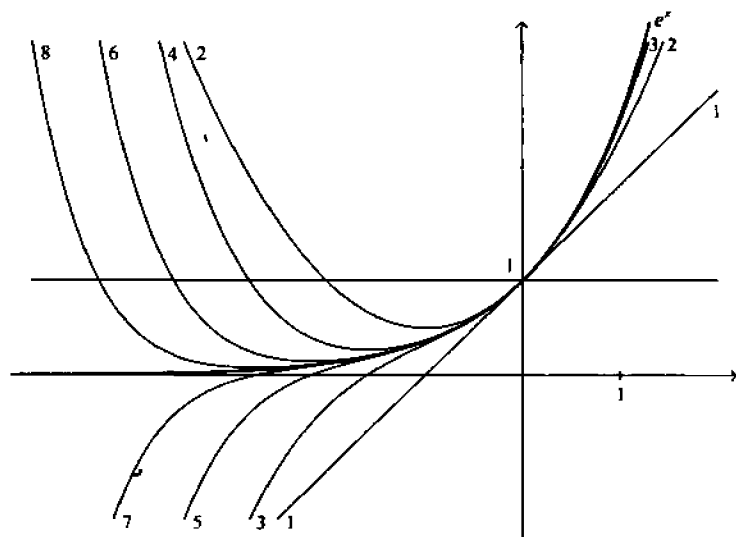


Figura 4.49 Polinomi di Taylor della funzione  $f(x) = 1/(1+x^2)$  di grado  $\leq 12$ .



**Figura 4.50** Polinomi di Taylor della funzione  $f(x) = \ln(1+x)$  di grado  $\leq 7$ .



**Figura 4.51** Polinomi di Taylor della funzione  $f(x) = e^x$  di grado  $\leq 8$ .

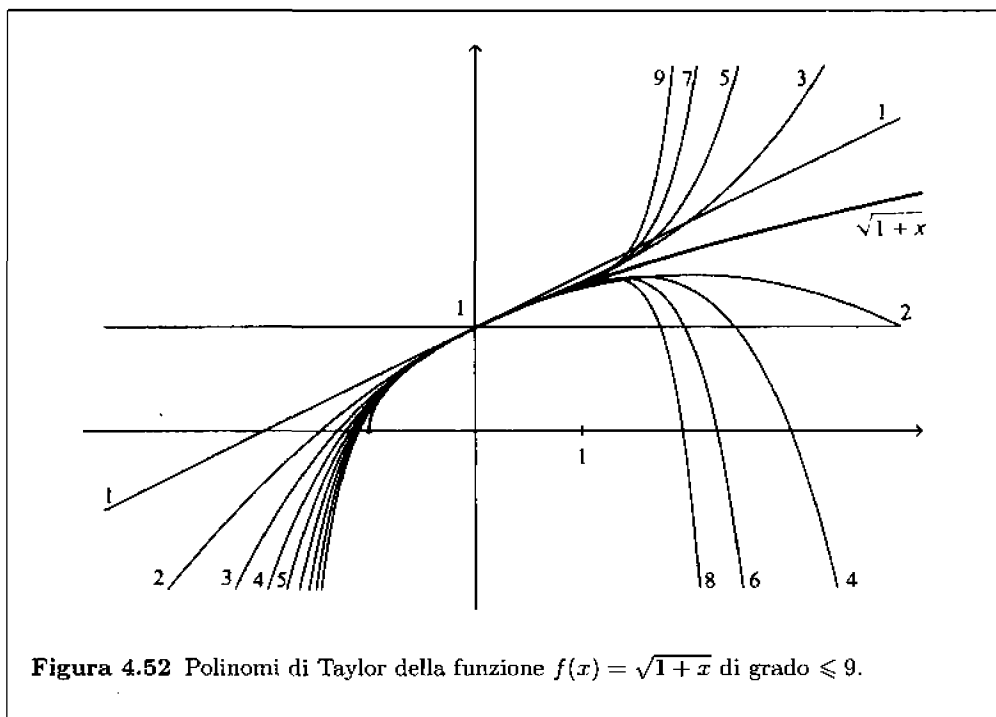


Figura 4.52 Polinomi di Taylor della funzione  $f(x) = \sqrt{1+x}$  di grado  $\leq 9$ .

## INFINITESIMI E INFINITI

Come sappiamo, una funzione  $f$  è infinitesima per  $x \rightarrow x_0$  se  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ . Allo studio dell'“infinitamente piccolo” si è sempre naturalmente affiancata l'analisi dell'“infinitamente grande”; in effetti si vedrà che molte proprietà, tipiche delle funzioni infinitesime, si traducono in corrispondenti proprietà per funzioni “infinite”: una funzione  $f$  è un *infinito* per  $x \rightarrow x_0$  se  $1/|f(x)|$  è infinitesima per  $x \rightarrow x_0$ . In altre parole  $f$  è un infinito per  $x \rightarrow x_0$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un opportuno  $\delta_\varepsilon > 0$  tale che

$$\text{se } 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \quad \text{allora} \quad |f(x)| > \frac{1}{\varepsilon}.$$

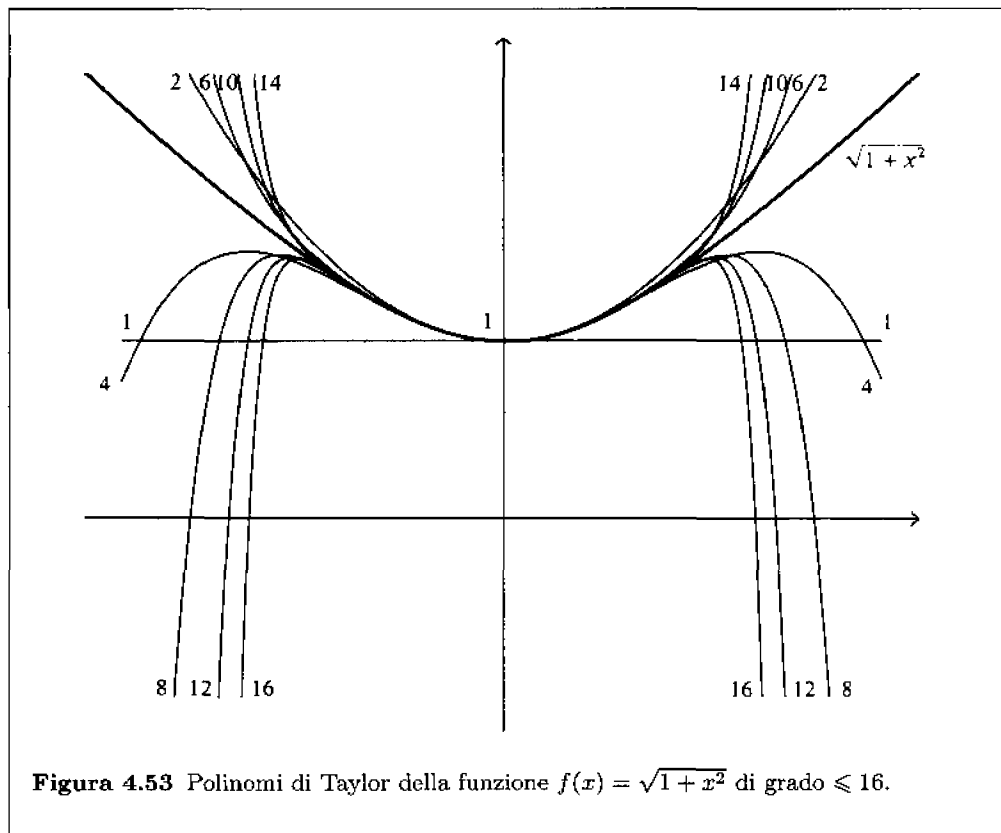
Spesso nella pratica occorre valutare il limite del rapporto di due funzioni infinitesime, oppure infinite, per  $x \rightarrow x_0$ ; è conveniente, pertanto, introdurre un simbolismo che permetta di confrontare rapidamente l'“ordine di grandezza” dell'una rispetto all'altra. Tale simbolismo, dovuto al fisico E. Landau, si esprime nel modo seguente.

**DEFINIZIONE 4.44** Per due funzioni  $f, g$  la notazione

$$f = O(g) \quad (\text{per } x \rightarrow x_0)$$

significa che

$$|f(x)| \leq k|g(x)| \quad \text{in un intorno di } x_0$$



**Figura 4.53** Polinomi di Taylor della funzione  $f(x) = \sqrt{1+x^2}$  di grado  $\leq 16$ .

ove  $k > 0$  è una costante; la notazione

$$f = o(g) \quad (\text{per } x \rightarrow x_0)$$

significa che

$$f(x) = \omega(x)g(x) \quad \text{in un intorno di } x_0,$$

ove  $\omega(x)$  è un infinitesimo; infine la notazione

$$f \sim g \quad (\text{per } x \rightarrow x_0)$$

significa che il rapporto  $\frac{f}{g}$  è definito in un intorno di  $x_0$  (salvo al più in  $x_0$ ) e che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Nei tre casi si legge, rispettivamente:

$f$  è *O grande* di  $g$  (per  $x \rightarrow x_0$ ),

$f$  è *o piccolo* di  $g$  (per  $x \rightarrow x_0$ ),

$f$  è *asintoticamente equivalente* a  $g$  (per  $x \rightarrow x_0$ ).

**OSSERVAZIONE 4.45** La relazione  $\sim$  è riflessiva, simmetrica e transitiva, cioè è una relazione di equivalenza. La relazione  $= O$  è invece riflessiva e transitiva, ma non simmetrica, mentre la relazione  $= o$  è soltanto transitiva<sup>(9)</sup>.

Notiamo infine, che vi sono funzioni tra le quali non intercorre alcuna delle relazioni  $\sim$ ,  $= o$ ,  $= O$ ; in particolare, esistono infinitesimi simultanei *non confrontabili* tra loro.



**ESEMPI 4.46**

(a)  $\sin x \sim x \sim \operatorname{tg} x$  per  $x \rightarrow 0$ ;

(b)  $\cos x - 1 = o(x)$ ,  $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2}$  per  $x \rightarrow 0$ ;

(c) se  $f$  è derivabile in  $x_0$  e  $f(x_0) = 0$  allora

$$f \begin{cases} \sim f'(x_0)(x - x_0), & \text{se } f'(x_0) \neq 0, \\ = o(x - x_0), & \text{se } f'(x_0) = 0; \end{cases}$$

(d) per ogni intero  $n$ ,  $e^{-1/x^2} = o(x^n)$  per  $x \rightarrow 0$  [posto  $t = \frac{1}{x^2}$ , si utilizzi l'Esercizio 4.2.7];

(e)  $\operatorname{tg} x \sim -\frac{1}{x - \pi/2}$  per  $x \rightarrow \frac{\pi^-}{2}$

$$\left[ \text{infatti } (x - \pi/2)\operatorname{tg} x = \frac{x - \pi/2}{\cos x} \operatorname{sen} x \rightarrow \frac{1}{[D \cos x]_{x=\pi/2}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -1 \text{ per } x \rightarrow \frac{\pi^-}{2} \right];$$

(f)  $\sqrt{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  e  $x$  sono infinitesimi non confrontabili per  $x \rightarrow 0^+$ .



**OSSERVAZIONE 4.47** La validità di una delle relazioni  $\sim$ ,  $= o$ ,  $= O$  tra  $f$  e  $g$  dà informazioni sul comportamento del rapporto  $f/g$  in un intorno di  $x_0$  (purché esso sia ivi definito). Infatti in tal caso:

$$f \sim g \text{ equivale a } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

$$f = o(g) \text{ equivale a } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

$$f = O(g) \text{ equivale a } \frac{f(x)}{g(x)} \text{ è limitata in un intorno di } x_0.$$

Si noti inoltre che in particolare:

$f = O(1)$  significa che  $f$  è limitata in un intorno di  $x_0$ ,

$f = o(1)$  significa che  $f$  è infinitesima in un intorno di  $x_0$ .

<sup>(9)</sup>I simboli  $O$  e  $o$  sono inseparabili dal segno  $=$  che li precede: ha senso scrivere  $\operatorname{sen} x = O(x)$  ma non  $O(x) = \operatorname{sen} x$ ; tuttavia allorché  $f(x) - g(x) = O(h(x))$  si scrive anche  $f(x) = g(x) + O(h(x))$ .

Si consideri ora il caso di due infinitesimi simultanei  $\alpha, \beta$ : se  $\alpha = o(\beta)$  per  $x \rightarrow x_0$  si dice che  $\alpha$  è un infinitesimo *di ordine superiore* rispetto a  $\beta$  (per  $x \rightarrow x_0$ ).

Nel confrontare due infinitesimi è utile avere a disposizione un infinitesimo "campione" che serve come termine di confronto: una scelta naturale è quella di prendere come campione l'infinitesimo  $x - x_0$ , ma tale scelta non è obbligatoria né, talvolta, opportuna. Indicando con  $\varepsilon(x)$  l'infinitesimo campione prescelto, se risulta

$$\alpha \sim K\varepsilon^r \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \quad (K \neq 0, r > 0),$$

si dice che  $\alpha$  è *di ordine*  $r$  rispetto a  $\varepsilon$ . L'infinitesimo  $K\varepsilon^r$  si chiama allora *parte principale* dell'infinitesimo  $\alpha$ . Per esempio, assumendo  $x$  come infinitesimo campione per  $x \rightarrow 0$ ,

$$\begin{array}{ll} \text{sen } x + x^2 & \text{ha parte principale } x, \\ x(1 - \cos x) & \text{ha parte principale } \frac{x^3}{2}, \\ x \ln x & \text{non ha parte principale, in quanto } x \ln x = o(x^r) \\ & \text{per ogni } r \text{ con } 0 < r < 1 \text{ (per } x \rightarrow 0^+) \end{array}$$

Si noti che se  $\alpha$  è un infinitesimo per  $x \rightarrow x_0$  la parte principale di  $\alpha$  rispetto all'infinitesimo campione  $x - x_0$  è data dal primo termine non nullo dello sviluppo di Taylor di  $\alpha$  di centro  $x_0$  (se tale sviluppo esiste).

Il seguente importante risultato è di frequente applicazione nel calcolo del limite del rapporto di due infinitesimi.

**TEOREMA 4.48** (*Principio di sostituzione degli infinitesimi*). Il limite del rapporto di due infinitesimi simultanei è uguale al limite del rapporto delle loro parti principali.

**DIMOSTRAZIONE** Sia  $\alpha \sim K\varepsilon^r, \beta \sim H\varepsilon^s$ . Allora

$$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)}{K\varepsilon(x)^r} \left[ \frac{K}{H} \varepsilon(x)^{r-s} \right] \frac{H\varepsilon(x)^s}{\beta(x)}$$

e quindi

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{K}{H} \varepsilon(x)^{r-s}. \quad \square$$

Dal principio di sostituzione degli infinitesimi segue che, in pratica, nel calcolo del limite del rapporto di due infinitesimi simultanei è possibile aggiungere, oppure sottrarre, a ciascuno di essi infinitesimi di ordine superiore: cioè, se  $\alpha_1 = o(\alpha)$  e  $\beta_1 = o(\beta)$  per  $x \rightarrow x_0$ , allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x) + \alpha_1(x)}{\beta(x) + \beta_1(x)}.$$

**ESEMPI 4.49** (a) Sia da calcolare  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x}$ ; determiniamo le parti principali degli infinitesimi che compaiono al numeratore e al denominatore. Usufruendo degli sviluppi in serie di  $\sin x$  e  $\cos x$  e della formula di Taylor (4.65)

$$x(1 - \cos x) = x \left[ 1 - \left( 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) \right] = \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$x - \sin x = x - \left[ x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \right] = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Dunque, in base al principio di sostituzione

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 - \cos x)}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/2}{x^3/6} = 3.$$

(b) Usufruendo degli sviluppi in serie noti e del principio di sostituzione degli infinitesimi si ottengono, immediatamente, i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \operatorname{tg} x}{x^3} = -\frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{1 - \cos x} = -\frac{1}{2}.$$

Definizioni e proprietà del tutto analoghe si ottengono nel caso di limiti per  $x \rightarrow \pm\infty$ ; in tal caso l'infinitesimo campione più naturale è  $\frac{1}{x}$ . Per esempio, per  $x \rightarrow +\infty$  si può constatare che esistono infinitesimi di ordine superiore a qualunque potenza  $1/x^r$ , quali la funzione  $e^{-x}$ , e infinitesimi di ordine inferiore a qualunque potenza positiva  $1/x^r$ , quali la funzione  $1/\ln x$ . Questi fatti si possono verificare in base allo sviluppo in serie di  $e^x$ , ma si possono ottenere più rapidamente usufruendo della regola di De L'Hôpital che esporremo tra breve.

Lo studio degli infiniti si sviluppa in modo perfettamente analogo a quello degli infinitesimi, ricorrendo all'uso delle relazioni  $\sim, = o, = O$ . In particolare, se

$$A = o(B) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

si dice che  $A$  è un infinito di ordine inferiore a  $B$  (per  $x \rightarrow x_0$ ); si noti la differenza di linguaggio rispetto al caso di due infinitesimi.

Come per gli infinitesimi, si assumono degli infiniti campione, tra i quali i più naturali sono

$$\frac{1}{|x - x_0|} \quad \text{per } x \rightarrow x_0, \quad |x| \quad \text{per } x \rightarrow \pm\infty.$$

Si dice che un infinito  $A(x)$  è di ordine  $r$ , rispetto all'infinito campione  $\omega(x)$  se

$$A \sim K\omega(x)^r \quad \text{per } x \rightarrow x_0 \quad (K \neq 0, r > 0);$$

in tal caso  $K\omega^r$  è detta *parte principale* dell'infinito  $A$ .

Vale un principio di sostituzione degli infiniti assolutamente analogo, *ma non identico*, a quello per infinitesimi:

**TEOREMA 4.50** (*Principio di sostituzione degli infiniti*). Il limite del rapporto di due infiniti simultanei è uguale al limite del rapporto delle loro parti principali (se esso

esiste); si possono, dunque, aggiungere o sottrarre a numeratore e a denominatore infiniti di ordine *inferiore*.

—  
—  
—

**ESEMPI 4.51 (a)** Per  $x \rightarrow +\infty$  si ha

$$\sqrt{1+x^2} \sim x, \quad \cotg \frac{2}{x} \sim \frac{1}{2}x$$

e pertanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{x}}{\cotg \frac{2}{x}} = 2$$

**(b)** Sempre per  $x \rightarrow +\infty$  si ha  $\ln x = o(x^r)$ ,  $x^r = o(e^x)$  per ogni  $r > 0$ , dunque

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + x^3}{3e^x - 5x^{10} + \ln x} = \frac{1}{3}.$$

—  
—  
—

## LA REGOLA DI DE L'HÔPITAL

Nel calcolo di limiti di rapporti tra infinitesimi o infiniti simultanei, ha frequente applicazione il seguente criterio.

**PROPOSIZIONE 4.52 (Regola di De L'Hôpital).** Siano  $f, g$  due funzioni derivabili tali che:

- 1)  $f, g$  sono infinitesimi simultanei oppure infiniti simultanei per  $x \rightarrow x_0$ ,
- 2)  $g'(x)$  è diversa da 0 in un intorno di  $x_0$ ,
- 3) esiste (finito o infinito) il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Allora esiste il

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

e si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**DIMOSTRAZIONE** Ci limitiamo a dimostrare il caso più semplice in cui  $f, g$  sono funzioni di classe  $C^1$  infinitesime per  $x \rightarrow x_0$  e  $g'(x_0) \neq 0$ . In tal caso dalla formula di Taylor

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\omega(x-x_0)}{g'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\eta(x-x_0)} = \frac{f'(x_0) + \omega(x-x_0)}{g'(x_0) + \eta(x-x_0)}$$

con  $\omega, \eta$  infinitesimi per  $x \rightarrow x_0$ ; la tesi segue allora dal principio di sostituzione degli infinitesimi.  $\square$



Nella pratica la “sostituzione” di  $f(x)/g(x)$  con  $f'(x)/g'(x)$  porta spesso a una ulteriore “forma indeterminata”, cioè al rapporto fra due infinitesimi o fra due infiniti. In questi casi si può iterare l'applicazione della regola di De L'Hôpital, sempre che ne siano verificate le ipotesi, e ridursi a calcolare i limiti per  $x \rightarrow x_0$  di  $\frac{f''(x)}{g''(x)}$ ,  $\frac{f'''(x)}{g'''(x)}$  e così via.

La regola di De L'Hôpital continua a sussistere anche quando i limiti sono da calcolarsi per  $x \rightarrow +\infty$  o per  $x \rightarrow -\infty$ , oppure si tratta di limiti per  $x \rightarrow x_0^+$  oppure per  $x \rightarrow x_0^-$ .



**ESEMPI 4.53** (a) Il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2}$$

si presenta nella “forma indeterminata”  $\frac{0}{0}$ . Applicando la regola di De L'Hôpital si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x}{2x}$$

che è ancora una forma indeterminata  $\frac{0}{0}$ . Applicando nuovamente la regola si trova:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-4 \cos 2x + \cos x}{2} = -\frac{3}{2}.$$

(b) Sia da calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{x+1}{x-1}.$$

Scriviamo

$$x \ln \frac{x+1}{x-1} = \frac{\ln \frac{x+1}{x-1}}{1/x},$$

applicando la regola:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{x+1}{x-1}}{1/x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1) - \ln(x-1)}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 1} = 2. \end{aligned}$$



Vi sono svariate funzioni i cui limiti possono essere trovati tramite opportuni “artifici” che riconducono il problema a una forma alla quale è applicabile la regola di De L'Hôpital. Alcuni di questi artifici sono presenti negli Esercizi 4.6.22, 4.6.23.

## ESERCIZI

**4.6.1** La lunghezza dello spigolo di un cubo può differire da 2 cm di  $\pm 0,01$  cm. Qual è il massimo errore possibile se si calcola:

- (a) il volume del cubo;
- (b) la superficie del cubo.

**4.6.2** Si vuole costruire una scatola cubica di legno con volume interno di  $15 \text{ cm}^3$ . Lo spessore del legno è di  $0,1 \text{ cm}$ . Trovare quanto legno occorre fornendo una stima dell'errore al primo ordine.

**4.6.3** Applicando il teorema di Lagrange alla funzione  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  sull'intervallo  $[1,2]$ , ottenere una stima per  $\sqrt[3]{2}$ .

**4.6.4** Valutare l'errore che si commette scrivendo

$$e = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}, \quad \text{sen} \frac{1}{10} = \frac{1}{10} - \frac{1}{3!10^3}.$$

**4.6.5** Scrivere lo sviluppo in serie di  $\ln \frac{n+1}{n}$  e ricavarne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right).$$

**4.6.6** Calcolare, fino al termine  $x^5$  incluso, gli sviluppi delle seguenti funzioni

$$\begin{array}{lll} x \cdot \text{tg} x, & \text{sen}^2 x, & x \text{sen}^2 x \text{tg} x, \\ x \ln(1+x), & \frac{1}{x^2}, & \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}, \\ \cosh x, & 3^{x+1}, & \ln((1+x)(1-x)). \end{array}$$

**4.6.7** Calcolare, usando la formula di Taylor, i seguenti limiti:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x \text{tg} x} - \frac{1}{\text{sen}^2 x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x - x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left( \frac{\text{sen} x}{x} - \frac{x}{\text{sen} x} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh^2 x - 1 - x^2}{x^4}.$$

**4.6.8** Dimostrare che la serie  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n} \text{tg} \frac{\pi}{2n}$  è convergente.

**4.6.9** Data la parabola di equazione  $y = x^2$  si trovino due punti  $P, Q$  sulla parabola in modo che il segmento  $PQ$  sia perpendicolare alla parabola e abbia lunghezza minima.

**4.6.10** Verificare la convergenza delle serie:

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{(n^2+1)^n}{(n+1)^2}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) x^n, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n) x^n.$$

**4.6.11** Scrivere la serie geometrica di ragione  $-(x-1)^2$  e ricavare la serie di Mac Laurin di  $\arctan(x-1)$ .

**4.6.12** Siano  $\alpha$  e  $\beta$  due angoli con  $0 < \alpha < \beta < \pi/2$ ; si dimostri che

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Aristarco di Samo, a cui era nota questa disequazione, la utilizzò per ricavare la seguente stima:

$$\frac{1}{60} < \operatorname{sen} 1^\circ < \frac{1}{45},$$

che gli servì per valutare le distanze Sole-Terra-Luna. Come la ricavò? Utilizzare gli sviluppi in serie per approssimare  $\operatorname{sen} 1^\circ$  con tre decimali.

**4.6.13** Sia  $f \in C^2[a, b]$  e sia  $S(h)$  il rapporto incrementale simmetrico

$$S(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h};$$

si verifichi che  $S(h) - f'(x) = O(h)$  per  $h \rightarrow 0$ .

**4.6.14** Calcolare l'ordine di infinitesimo di  $n \operatorname{sen} \frac{1}{n} - 1$ .

**4.6.15** Determinare un numero reale  $\alpha$  tale che per  $x \rightarrow 0$  si abbia

$$\arctan^5 x - 2 \operatorname{sen}^5 x + x^5 \sim \alpha x^9.$$

**4.6.16** Determinare un numero reale  $\alpha$  e un intero positivo  $n$  in modo che per  $x \rightarrow 0$  si abbia  $\ln(\operatorname{sen} x/x) + (1/6)x^2 \sim \alpha x^n$ .

**4.6.17** Determinare la parte principale di  $\operatorname{tg} x^3 - \operatorname{tg}^3 x$  rispetto a  $x$  per  $x \rightarrow 0$ .

**4.6.18** Determinare, se esiste, un  $c$  reale per cui, al tendere di  $x$  a 0,

$$\operatorname{sen} x^2 - \operatorname{sen}^2 x - c(1 - \cos x)^2 \sim K \operatorname{tg}^2(x^3) \quad \text{per un qualche } K.$$

**4.6.19** Valutare l'ordine d'infinitesimo rispetto a  $x$  in 0 della funzione

$$(1+x)^{1/x} - e.$$

**4.6.20** Calcolare i limiti

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{1 - \cos x}; & \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{x^2}}{x^2}; \\ \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \operatorname{sen} x}{x^3}; & \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cosh x - 1}{x}; \\ \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} \sqrt{x}}{x}; & \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{x^3}; \\ \text{(g)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x}{(1 - \cos x)^2}; & \text{(h)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{e^{-x}}; \\ \text{(i)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 (\ln x)^2}{e^x}. & \end{array}$$

**4.6.21** Provare che per ogni intero positivo  $n$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0.$$

**4.6.22** Volendo determinare il limite di funzioni del tipo  $y = [f(x)]^{g(x)}$  vi sono tre casi non ovvi: quando  $f(x) \rightarrow 1$  e  $g(x) \rightarrow \infty$ , quando  $f(x) \rightarrow \infty$  e  $g(x) \rightarrow 0$  e quando sia  $f(x)$  che  $g(x)$  sono infinitesime. Si parla di forme indeterminate del tipo  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $0^0$ . In questi casi è conveniente cercare il limite del logaritmo di  $y$ :

$$\ln y = g(x) \ln f(x) = \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}},$$

forma alla quale si può applicare la regola di De L'Hôpital. Usare questo artificio per calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + e^{3x})^{1/x}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

**4.6.23** Talvolta il calcolo di un limite si presenta nella forma  $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - g(x)]$  ove sia  $f$  sia  $g$  sono degli infiniti. In questi casi è talora conveniente scrivere la funzione nella forma

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

alla quale si può applicare la regola di De L'Hôpital. Usare questo artificio per calcolare

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right); & \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} \right); \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{x^2 + 2} - x); & \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} - \ln \frac{1}{x} \right). \end{aligned}$$

**4.6.24** Calcolare i limiti

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}; & \quad \text{(b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}; \\ \text{(c)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{1 - e^{2x}}; & \quad \text{(d)} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{1 - e^{2x}}; \\ \text{(e)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x; & \quad \text{(f)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x \cdot \ln(1-x); \\ \text{(g)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{tg} x) e^{1/x}. \end{aligned}$$

**4.6.25** Determinare il massimo intero  $k$  per cui

$$\ln(e^x + x) - \ln(e^x - x) = O(x^k) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

## Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

---

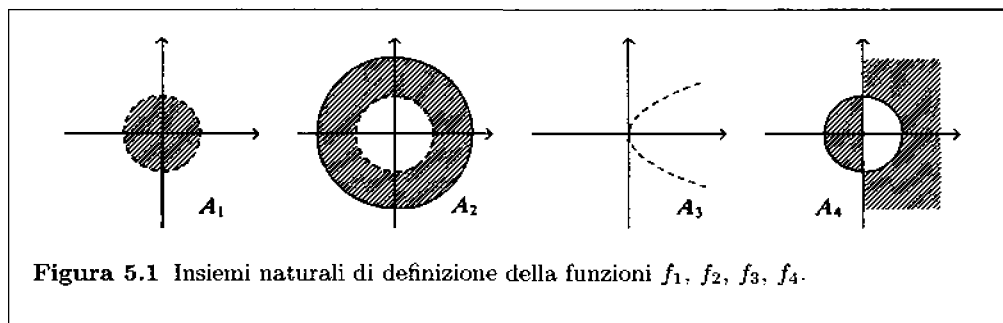
Molto spesso le funzioni atte a descrivere situazioni reali dipendono da più di una variabile. Per esempio, la pressione di una certa quantità di gas contenuto in un recipiente dipende dal volume del recipiente stesso ma anche dalla temperatura; la pressione è *funzione*  $p(x, y)$  di due variabili indipendenti, il volume  $x$  e la temperatura  $y$ , e fornirà un numero  $p(x, y)$  al variare della coppia ordinata  $x, y$  in un certo insieme. A ogni coppia ordinata di numeri si può associare un punto del piano, a una terna di numeri reali si può associare un punto nello spazio e non c'è motivo, almeno da un punto di vista algebrico, per fermarsi qui. Se  $n$  è un intero fissato si chiama  $\mathbb{R}^n$  l'insieme di tutte le  $n$ -ple di numeri reali  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ; ciascun elemento di  $\mathbb{R}^n$  si dirà *vettore* o *punto*.

Le nozioni di limite, di continuità, di derivabilità sono fondamentali anche nello studio delle funzioni di due o più variabili indipendenti; tuttavia in dimensione maggiore di 1 intervengono fenomeni nuovi che non si riscontrano nel caso delle funzioni di una variabile.

Ci si limiterà, prevalentemente, allo studio delle funzioni di due variabili, che sono suscettibili di una semplice interpretazione geometrica. I risultati che seguono si possono comunque estendere al caso di funzioni di tre o più variabili indipendenti, poiché le difficoltà sono essenzialmente di notazione piuttosto che di metodo.

### FUNZIONI DI DUE O PIÙ VARIABILI

A differenza di ciò che accade con le funzioni di una variabile, in due o più variabili il dominio naturale, su cui una funzione è definita, può essere di tipo molto vario. Per esempio, la funzione  $f_1(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$  ha come dominio  $A_1$  il cerchio  $x^2 + y^2 < 1$ , la funzione  $f_2(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(x^2 + y^2 - 1)$  è definita in una corona circolare  $A_2$  compresa fra le circonferenze  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ ; quella esterna esterno fa parte del dominio, quella interna no. Ancora: la funzione  $f_3(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$  ha come dominio  $A_3$  tutti i punti del piano eccezion fatta per i punti della parabola  $x = y^2$ ; invece la funzione  $f_4(x, y) = \sqrt{x(x^2 + y^2 - 1)}$  è definita in un semicerchio e in un semipiano privato di un semicerchio (Figura 5.1).



Proprio a causa di questa gran varietà di situazioni è preferibile introdurre un po' di terminologia riguardante i sottoinsiemi del piano.

Una coppia ordinata  $(x, y)$  di numeri reali viene rappresentata geometricamente nel piano cartesiano dal punto  $P$  che ha coordinate  $x, y$ . La *distanza* fra due punti  $P = (x, y)$  e  $P' = (x', y')$  è data da

$$d(P, P') = \overline{PP'} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2};$$

si può così considerare l'*intorno* di raggio  $r$  di un punto  $P_0 = (x_0, y_0)$ , costituito da tutti i punti  $P = (x, y)$  che hanno distanza da  $P_0$  inferiore a  $r$ , cioè tali che<sup>(1)</sup>

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < r^2.$$

Un insieme  $A$  di punti del piano si dice *limitato* se è contenuto in un cerchio; un punto  $P_0 = (x_0, y_0)$  si dice *interno* ad  $A$  se vi è un suo intorno contenuto in  $A$ , mentre si dice *esterno* ad  $A$  se vi è un suo intorno che non contiene alcun punto di  $A$ . I punti che non sono né interni né esterni costituiscono la *frontiera* di  $A$ ; ogni intorno di un punto di frontiera contiene, dunque, sia punti di  $A$  sia punti che non appartengono ad  $A$ .

L'insieme  $A$  si dice *aperto* se ogni suo punto è punto interno ad  $A$ , mentre si dice *chiuso* se contiene tutti i suoi punti di frontiera.

Vediamo, come si applicano queste definizioni agli insiemi  $A_1, A_2, A_3, A_4$  considerati pocanzi. Gli insiemi  $A_1$  e  $A_2$  sono limitati, mentre  $A_3$  e  $A_4$  non lo sono. La frontiera di  $A_1$  è la circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$ , quella di  $A_2$  è costituita dalle due circonferenze  $x^2 + y^2 = 1$  e  $x^2 + y^2 = 4$ , la frontiera di  $A_3$  è la parabola  $x = y^2$  e quella di  $A_4$  è costituita dalla circonferenza  $x^2 + y^2 = 1$  e dall'asse  $y$ . Gli insiemi  $A_1, A_3$  sono aperti,  $A_4$  è chiuso,  $A_2$  non è né aperto né chiuso. Il piano intero è sia aperto che chiuso.

Saremo interessati, prevalentemente, a insiemi di uno di questi tipi:

- insiemi aperti;
- insiemi chiusi formati da un aperto e dalla sua frontiera;
- insiemi costituiti dalla frontiera di un aperto.

Inoltre, gli insiemi che si considereranno hanno, per lo più, frontiera costituita da una o più curve e da eccezionali punti isolati.

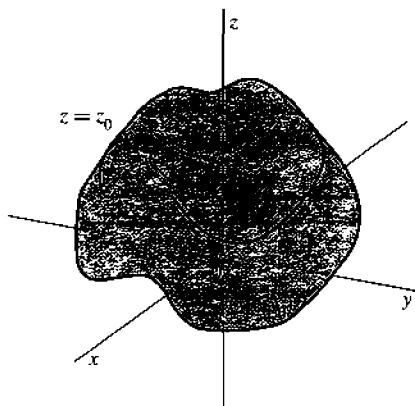
<sup>(1)</sup>Talvolta al posto degli intorni circolari conviene utilizzare gli intorni quadrati:  $\{(x, y); |x - x_0| < r, |y - y_0| < r\}$ .

Si dice *regione* un insieme aperto oppure un insieme costituito da un aperto e da una parte della sua frontiera (o anche da tutta). Una regione del piano è l'analogo di un intervallo della retta: essa può essere aperta, chiusa, aperta e chiusa o né aperta né chiusa. Gli insiemi  $A_1, A_2, A_3, A_4$ , considerati prima, sono regioni.

Tutte le definizioni si estendono in modo ovvio al caso dello spazio tridimensionale e a  $\mathbb{R}^n$ ; basterà definire in modo simile la distanza (per esempio, in  $\mathbb{R}^3$  se  $P = (x, y, z)$  e  $P' = (x', y', z')$  si avrà  $d(P, P') = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ ) e di conseguenza la nozione di *intorno*.

La rappresentazione grafica delle funzioni di più variabili è molto più problematica di quella, a tutti abituale, per le funzioni di una variabile. Nel caso di due variabili però, almeno in linea di principio, si può dare una interpretazione geometrica analoga: se la funzione  $f(x, y)$  è definita su una regione  $A$  si possono considerare i punti  $P$  che, in un sistema cartesiano ortogonale  $(x, y, z)$  nello spazio, hanno coordinate  $(x, y, f(x, y))$ . Al variare di  $(x, y)$  in  $A$  il punto  $P$  descrive una superficie nello spazio che si dice grafico della funzione  $f$ .

Si può pensare che l'equazione  $z = f(x, y)$  rappresenti la quota dei punti di una collina sopra il piano  $z = 0$  (Figura 5.2). Tagliando la superficie che rappresenta la funzione con un piano orizzontale  $z = z_0$  si ottiene una *linea o curva di livello* della funzione. Se si proietta sul piano  $x, y$  tale curva di livello si ottiene una rappresentazione di  $f$  sul piano  $x, y$  in cui tutti i punti  $(x, y)$  dove  $f$  assume lo stesso valore sono connessi da una curva.

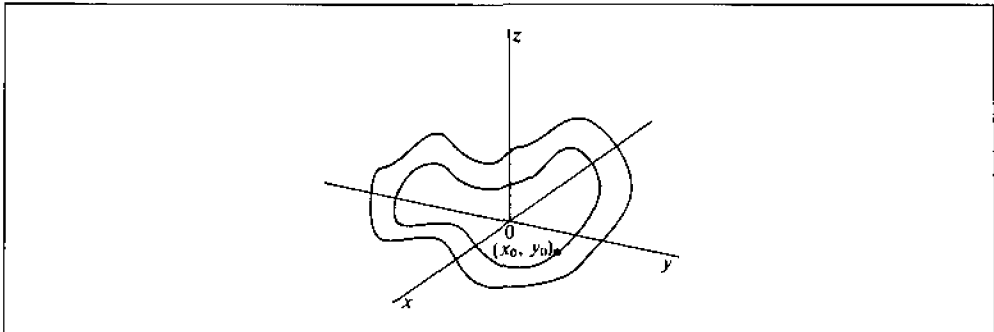


**Figura 5.2** Curve di livello sulla superficie  $z = f(x, y)$ .

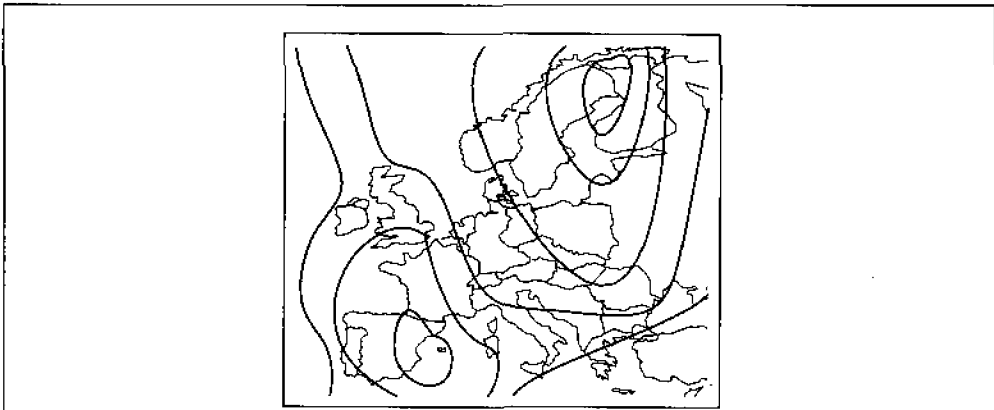
Si tratta del metodo abituale per rappresentare le isobare su una carta meteorologica o le isoipse su una carta topografica.

D'altra parte, spesso in geometria analitica si rappresentano alcune superfici tramite funzioni di due variabili; per esempio la funzione

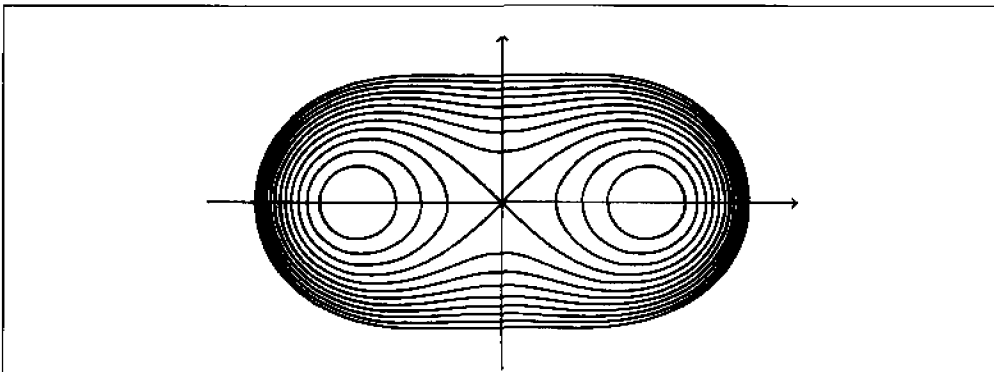
$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$



**Figura 5.3** Curve di livello di  $z = f(x,y)$  nel dominio della funzione.



**Figura 5.4** Curve isobare (di equal pressione atmosferica).



**Figura 5.5** Curve di livello della funzione  $z = (x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2)$ .



corrisponde alla *semisfera* di centro l'origine e raggio unitario che giace nel semispazio  $z \geq 0$ ; la funzione  $z = x^2 + y^2$  corrisponde al *paraboloide di rivoluzione* che si ottiene facendo ruotare la parabola di equazione  $z = x^2$  attorno all'asse  $z$ ; la funzione  $z = x^2 - y^2$  corrisponde al *paraboloide iperbolico* (Figura 5.6); la funzione  $z = ax + by + c$  corrisponde a un piano passante per i punti di coordinate  $(0,0,c)$ ,  $(-\frac{c}{a}, 0, 0)$ ,  $(0, -\frac{c}{b}, 0)$  ecc.

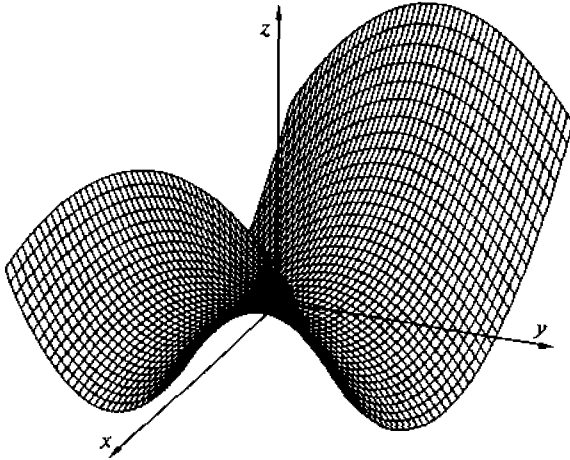


Figura 5.6 Paraboloide iperbolico.

Alle funzioni di due (o più) variabili si estendono in modo naturale le nozioni di limite e di continuità e le proprietà relative. In particolare, se  $f(x,y)$  è una funzione definita in un insieme  $A$ , si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l$$

se per ogni intorno  $U$  di  $l$  vi è un intorno  $V$  di  $(x_0,y_0)$  tale che, se  $(x,y)$  sta in  $V$  (e in  $A$ ) ed è diverso da  $(x_0,y_0)$  allora  $f(x,y)$  appartiene a  $U$  (Figura 5.7).

L'adozione del termine intorno, consente l'unificazione del concetto di limite per funzioni di una, due, tre o quante si voglia, variabili indipendenti.

Occorre mettere in evidenza che se  $f(x,y) \rightarrow l$  per  $(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)$  allora il limite deve essere lo stesso *qualunque sia il modo con cui  $(x,y)$  tende al punto  $(x_0,y_0)$* . Per le funzioni di una variabile,  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow x_0$  significa che il limite esiste ed è lo stesso per  $x \rightarrow x_0^+$  e per  $x \rightarrow x_0^-$ . Per le funzioni di due variabili  $(x,y)$  può avvicinarsi a  $(x_0,y_0)$  in un numero infinito di modi. Se si riescono a trovare due cammini che tendono a  $(x_0,y_0)$  e danno luogo a limiti diversi, allora la funzione non ha limite.

**ESEMPLI 5.1 (a)** Sia  $f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ ; studiamone il comportamento per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ . Se ci si avvicina a  $(0,0)$  lungo l'asse  $y$  la funzione vale 0, se ci si avvicina

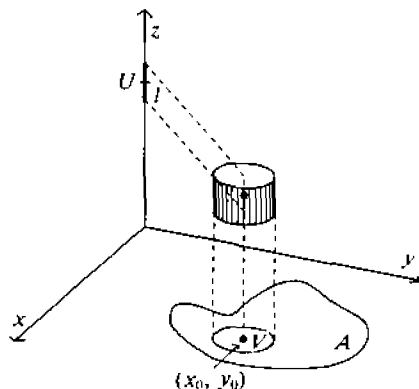


Figura 5.7

lungo la bisettrice  $y = x$  la funzione vale  $1/2$ : pertanto la funzione non ha limite per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$ .

(b) Si consideri  $f(x,y) = \frac{2x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$ . In questo caso torna comodo passare a coordinate polari  $x = r \cos \vartheta$ ,  $y = r \sin \vartheta$ , (Figura 5.8). Si ha  $f(x,y) = r(2 \cos^3 \vartheta - \sin^3 \vartheta)$  e dunque  $|f(x,y)| \leq 3r$ ; se  $r = \sqrt{x^2 + y^2} < \frac{\epsilon}{3}$  segue  $|f(x,y)| < \epsilon$  il che dimostra che per  $(x,y) \rightarrow (0,0)$  si ha  $f(x,y) \rightarrow 0$ .

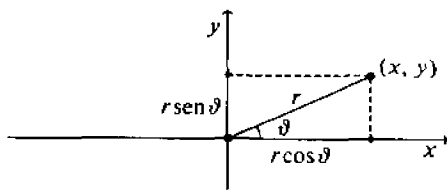


Figura 5.8



Una funzione  $f(x,y)$  si dice *continua* in un punto  $(x_0, y_0)$  se è ivi definita e

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Alle funzioni continue di due (o più) variabili si estendono i teoremi e le proprietà delle funzioni continue in una variabile. In particolare continua a valere il *teorema di Weierstrass*: se  $f$  è una funzione continua su un insieme  $A$  limitato e chiuso allora  $f$  è ivi dotata di massimo e di minimo.

## DERIVATE PARZIALI

Come ben sappiamo ciò che soggiace al concetto di derivata è il “tasso di variazione” di una certa grandezza. Nel caso di una funzione  $F$  di una sola variabile tale tasso di variazione, in un punto  $t_0$ , si calcola come

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t_0 + h) - F(t_0)}{h} = F'(t_0)$$

(beninteso, se tale limite esiste). Se si immagina che  $t_0$  denoti un istante temporale, allora questa definizione è perfettamente consona alla sua denominazione; si ottiene il tasso di variazione istantanea in  $t_0$  come limite delle “variazioni medie” di  $F$  attorno all'istante  $t_0$ .

Quando però si passa a funzioni di più variabili, la situazione si complica, in quanto ci si può muovere da un dato punto  $P_0$  a un altro punto  $P$  in molte direzioni ed è intuitivamente chiaro che la variazione  $F(P) - F(P_0)$  dipenderà, oltre che dalla distanza fra  $P$  e  $P_0$ , anche dalla direzione. Un approccio ragionevole alla nozione di differenziabilità per funzioni di più variabili inizia proprio col chiarire cosa si intende per *derivata direzionale*.

Nel caso di una sola variabile si hanno a disposizione solo due direzioni, destra e sinistra (oppure prima e dopo). Nel caso di una funzione di due variabili si potrà individuare la direzione tramite un angolo; nel caso di tre o più variabili sarà opportuno individuare la direzione in modo più sintetico; si dirà che una direzione è un punto  $e$  che ha distanza unitaria dall'origine. Per esempio, se vogliamo spostarci dal punto  $P_0$  ad un altro punto nella direzione  $e$ , ci dovremo muovere lungo un segmento che va da  $P_0$  a  $P_0 + e$ . In generale, la semiretta che parte da  $P_0$  nella direzione  $e$  sarà data da tutti i punti del tipo  $P_0 + t e$ , con  $t \geq 0$ .

Il caso più semplice si ha quando la direzione è parallela agli assi coordinati e ciò porta alla seguente definizione di *derivata parziale*.

Sia  $f(x, y)$  una funzione delle due variabili  $x, y$  definita in un intorno del punto  $(x_0, y_0)$ ; se la funzione (della sola variabile  $x$ )  $x \rightarrow f(x, y_0)$  è derivabile in  $x_0$  si dice che  $f(x, y)$  ha *derivata parziale rispetto a  $x$*  nel punto  $(x_0, y_0)$ ; analogamente, se la funzione  $y \rightarrow f(x_0, y)$  è derivabile in  $y_0$ , si dice che  $f(x, y)$  ha *derivata parziale rispetto a  $y$*  nel punto  $(x_0, y_0)$ . Le derivate parziali in  $(x_0, y_0)$  sono, dunque, date dai limiti seguenti

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \quad \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

e si indicano con una delle seguenti notazioni

$$f_x(x_0, y_0), \quad D_x f(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0);$$

$$f_y(x_0, y_0), \quad D_y f(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Le derivate parziali di una funzione, se esistono in tutta una regione, sono nuovamente funzioni di  $x, y$  e si indicano brevemente con i simboli

$$f_x, \quad f_y, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Le regole di calcolo per le derivate parziali sono esattamente quelle viste per funzioni di una variabile, purché si considerino costanti tutte le variabili diverse da quella rispetto alla quale si deriva.

—≡—

**ESEMPIO 5.2** Sia  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

le funzioni  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  sono ancora derivabili parzialmente e si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= -\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

—≡—

Per le funzioni di una variabile, l'esistenza della derivata comporta notevoli proprietà: per esempio, una funzione derivabile è continua ed esiste la retta tangente al grafico della funzione.

Per funzioni di più variabili invece l'esistenza delle derivate parziali prime non è di per sé di così grande importanza; una funzione può essere dotata di derivate parziali senza che esista il piano tangente al suo grafico e addirittura senza che sia continua.

—≡—

**ESEMPIO 5.3** Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \left( \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0); \end{cases} \quad (5.1)$$

$f(x,y)$  ha derivate parziali rispetto a  $x$  e a  $y$  in ogni punto  $(x_0, y_0)$ ; in particolare si ha

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - 0}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,k) - 0}{k} = 0.$$

Tuttavia,  $f(x,y)$  non è continua in  $(0,0)$ : infatti, nei punti di coordinate  $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$ ,  $n = 1, 2, \dots$  (i quali appartengono definitivamente a qualunque intorno dell'origine), la funzione assume il valore  $1/4$ . Si noti che questa funzione, calcolata sulle parabole di equazione  $y = \alpha x^2$ , ha il valore costante

$$f(x, \alpha x^2) = \left( \frac{\alpha}{1 + \alpha^2} \right)^2$$

che, al variare di  $\alpha$ , assume tutti i valori dell'intervallo  $[0, 1/4]$ .

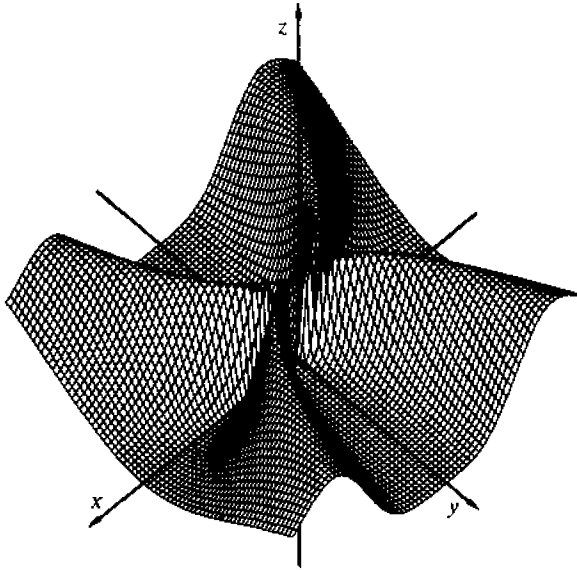


Figura 5.9 Grafico della funzione (5.1).



A causa di queste difficoltà, le derivate parziali non sono la naturale estensione a funzioni di più variabili della nozione di derivata. Si osservi d'altra parte che, se esistono le derivate parziali in  $(x_0, y_0)$ , posto  $\varrho = \sqrt{h^2 + k^2}$  si ha per  $\varrho \rightarrow 0^+$

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) = hf_x(x_0, y_0) + o(\varrho), \quad (5.2)$$

$$f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = kf_y(x_0, y_0) + o(\varrho), \quad (5.3)$$

ma dalle (5.2), (5.3) non è possibile dedurre

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) + o(\varrho), \quad (5.4)$$

la quale esprimerebbe la possibilità di approssimare l'incremento della funzione con una combinazione lineare degli incrementi nelle due direzioni, e, dunque, di approssimare il grafico di  $f$ , nell'intorno di  $(x_0, y_0)$ , con una funzione affine (il cui grafico è il candidato "piano tangente").

Appare dunque naturale assumere la proprietà (5.4) come estensione al caso di due variabili della nozione di derivabilità:

**DEFINIZIONE 5.4** Una funzione  $f(x, y)$  si dice *differenziabile* nel punto  $(x_0, y_0)$  se è ivi dotata di derivate parziali e risulta

$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = hf_x(x_0, y_0) + kf_y(x_0, y_0) + o(\varrho)$  per  $\varrho = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$  (nell'Esercizio 5.0.5 viene considerata una variante di questa definizione).

Poiché  $h$  e  $k$  sono infinitesimi con  $\varrho$  si ha ovviamente che *ogni funzione differenziabile è continua*; il viceversa è falso (si veda l'Esercizio 5.0.6).

**TEOREMA 5.5** (*Condizione sufficiente per la differenziabilità*). Se  $f(x, y)$  è dotata di derivate parziali in un intorno  $I$  del punto  $(x_0, y_0)$  e queste sono continue in  $(x_0, y_0)$ , allora  $f$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$ .

**DIMOSTRAZIONE** Si scriva l'incremento della funzione nel modo seguente

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \\ &= f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)\end{aligned}$$

e si applichi il teorema del valor medio alle funzioni (di una variabile)  $x \rightarrow f(x, y_0 + k)$ ,  $y \rightarrow f(x_0, y)$ :

$$\Delta f = hf_x(\xi, y_0 + k) + kf_y(x_0, \eta)$$

ove  $\xi, \eta$  sono punti compresi tra  $x_0$  e  $x_0 + h$ , e tra  $y_0$  e  $y_0 + k$  rispettivamente; poiché  $f_x$  e  $f_y$  sono continue si ha per  $\rho = \sqrt{h^2 + k^2} \rightarrow 0$ :

$$f_x(\xi, y_0 + k) = f_x(x_0, y_0) + o(1), \quad f_y(x_0, \eta) = f_y(x_0, y_0) + o(1)$$

da cui la tesi. □

Le funzioni dotate di derivate parziali continue si dicono di classe  $C^1$ ; le funzioni  $C^1$  sono dunque differenziabili.

## DERIVATA DIREZIONALE

Le funzioni differenziabili non solo sono dotate delle derivate parziali rispetto a  $x$  e a  $y$ , ma hanno derivata in ogni direzione; se  $e_1, e_2$  sono due numeri tali che  $e_1^2 + e_2^2 = 1$ , la coppia  $(e_1, e_2)$  individua nel piano una direzione (quella del vettore  $\mathbf{e}$  di componenti  $e_1$  ed  $e_2$ ); se  $(x_0, y_0)$  è un punto fissato, i punti che hanno coordinate

$$(x_0 + te_1, y_0 + te_2) \tag{5.5}$$

descrivono, al variare di  $t$ , i punti di una retta che passa per  $(x_0, y_0)$  e ha la direzione di  $\mathbf{e}$ . Si dice *derivata direzionale* di  $f$  in  $(x_0, y_0)$  nella direzione  $\mathbf{e}$  e si indica con  $D_{\mathbf{e}}f(x_0, y_0)$  o con  $\frac{df}{d\mathbf{e}}$  la derivata rispetto a  $t$  della funzione  $t \rightarrow f(x_0 + te_1, y_0 + te_2)$  calcolata per  $t = 0$  (se esiste). Dunque dovrà risultare

$$f(x_0 + te_1, y_0 + te_2) - f(x_0, y_0) = tD_{\mathbf{e}}f(x_0, y_0) + o(t).$$

Se  $f$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  si potrà scrivere

$$f(x_0 + te_1, y_0 + te_2) - f(x_0, y_0) = te_1f_x(x_0, y_0) + te_2f_y(x_0, y_0) + o(t)$$

e dunque

$$D_{\mathbf{e}}f(x_0, y_0) = e_1f_x(x_0, y_0) + e_2f_y(x_0, y_0). \tag{5.6}$$

In particolare, se  $\mathbf{e} = (1, 0)$  si ha  $D_{\mathbf{e}}f = D_xf$ , se  $\mathbf{e} = (0, 1)$  si ha  $D_{\mathbf{e}}f = D_yf$ .

**ESEMPIO 5.6** Si consideri la funzione distanza dall'origine:  $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ . Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \vartheta, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \vartheta,$$

ove  $\vartheta$  è l'angolo tra l'asse  $x$  e la congiungente l'origine al punto  $(x,y)$ .

Si ha dunque, se  $e_1 = \cos \alpha$ ,  $e_2 = \sin \alpha$ :

$$\begin{aligned} D_e f(x,y) &= e_1 f_x + e_2 f_y = \cos \vartheta e_1 + \sin \vartheta e_2 = \\ &= \cos \vartheta \cos \alpha + \sin \vartheta \sin \alpha = \cos(\vartheta - \alpha), \end{aligned}$$

in particolare, nella direzione individuata da  $\vartheta$  la derivata direzionale è 1, nella direzione ortogonale è 0.

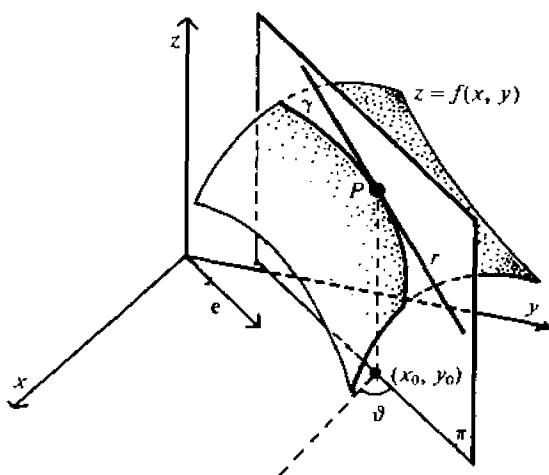


Il vettore di componenti  $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$  si chiama *gradiente* di  $f$  (nel punto  $(x_0, y_0)$ ) e si indica con  $\text{grad} f(x_0, y_0)$ . La (5.6) si può allora scrivere

$$D_e f = \mathbf{e} \cdot \text{grad} f$$

ove  $\cdot$  indica il prodotto scalare tra vettori.

Fissato  $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ , si intersechi (Figura 5.10) la superficie  $z = f(x,y)$  con il piano  $\pi$  parallelo all'asse  $z$  passante per  $(x_0, y_0)$  e avente la direzione di  $\mathbf{e}$ ; l'intersezione della superficie con tale piano è una curva  $\gamma$ , passante per  $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ , che si può rappresentare come grafico della funzione  $f$  ristretta alla retta intersezione del piano  $\pi$  con il piano  $z = 0$ . Evidentemente, il coefficiente angolare della retta  $r$  contenuta in  $\pi$  e tangente a  $\gamma$  in  $P$ , è, per definizione, la derivata direzionale  $D_e f$ .



**Figura 5.10** Derivata direzionale.

Si noti ora che  $|D_e f(x_0, y_0)| = |\mathbf{e} \cdot \text{grad} f(x_0, y_0)| = |\text{grad} f(x_0, y_0)| \cdot |\cos \vartheta|$  ove  $\vartheta$  è l'angolo tra i due vettori, dunque  $|D_e f(x_0, y_0)|$  è massimo quando  $\mathbf{e}$  ha la stessa direzione di  $\text{grad} f(x_0, y_0)$ .

Dunque la direzione del vettore  $\text{grad} f(x_0, y_0)$  è quella per cui è massimo (in modulo) il coefficiente angolare della retta  $r$  al variare di  $\mathbf{e}$  (e quindi di  $\pi$  e di  $\gamma$ ), cioè, è la direzione rispetto alla quale è *massima la pendenza* del grafico di  $f$ .

## PIANO TANGENTE, RETTA NORMALE

Se  $f(x, y)$  è differenziabile in  $(x_0, y_0)$  essa si può approssimare in un intorno di tale punto con la funzione affine

$$\varphi(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0); \quad (5.7)$$

infatti, posto  $x = x_0 + h$ ,  $y = y_0 + k$ , da (5.4) si ha  $\varphi(x, y) - f(x, y) = o(\rho)$  per  $\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \rightarrow 0$ . Il grafico di (5.7) è quello del piano contenente tutte le rette tangenti in  $(x_0, y_0)$  alle curve che si ottengono tagliando la superficie  $z = f(x, y)$  con piani paralleli all'asse  $z$ ; tale piano si dice *piano tangente* al grafico di  $f$  in  $(x_0, y_0)$ . La sua equazione è

$$z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (5.8)$$

Una direzione nello spazio, come nel piano, è assegnata tramite le proiezioni sugli assi del versore che ha detta direzione; tali proiezioni sono i coseni degli angoli che il versore forma con gli assi coordinati e si chiamano *coseni direttori*.

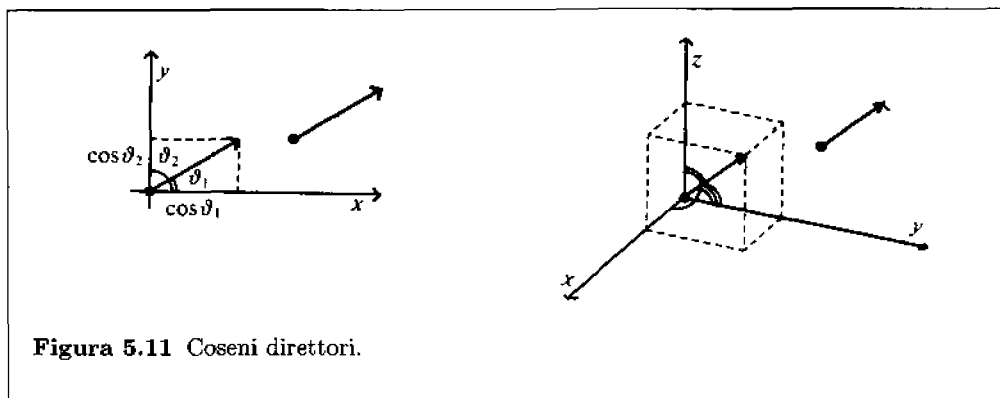


Figura 5.11 Coseni direttori.

Nel piano l'equazione di una retta uscente dal punto  $(x_0, y_0)$  e avente la direzione del versore  $\mathbf{e} = (\cos \vartheta_1, \cos \vartheta_2)$  ha la forma

$$\frac{x - x_0}{\cos \vartheta_1} = \frac{y - y_0}{\cos \vartheta_2};$$

così nello spazio l'equazione di una retta uscente dal punto  $(x_0, y_0, z_0)$  ha la forma

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C},$$



ove  $A, B, C$  sono tre numeri proporzionali ai 3 coseni direttori. Nelle espressioni precedenti si intende che se uno o più denominatori si annullano allora i corrispondenti numeratori sono nulli.

Se  $f(x, y)$  è una funzione differenziabile in un intorno di  $(x_0, y_0)$ , le direzioni individuate dai vettori  $(1, 0, f_x(x_0, y_0))$  e  $(0, 1, f_y(x_0, y_0))$  sono quelle delle rette

$$\begin{aligned} y = y_0, \quad z - z_0 &= f_x(x_0, y_0)(x - x_0), \\ x = x_0, \quad z - z_0 &= f_y(x_0, y_0)(y - y_0), \end{aligned}$$

le quali appartengono al piano tangente e sono tra loro distinte. La direzione individuata da  $(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$  è ortogonale a entrambe e definisce la *retta normale* alla superficie nel punto  $(x_0, y_0)$ . Tale retta ha dunque equazione

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \quad (5.9)$$

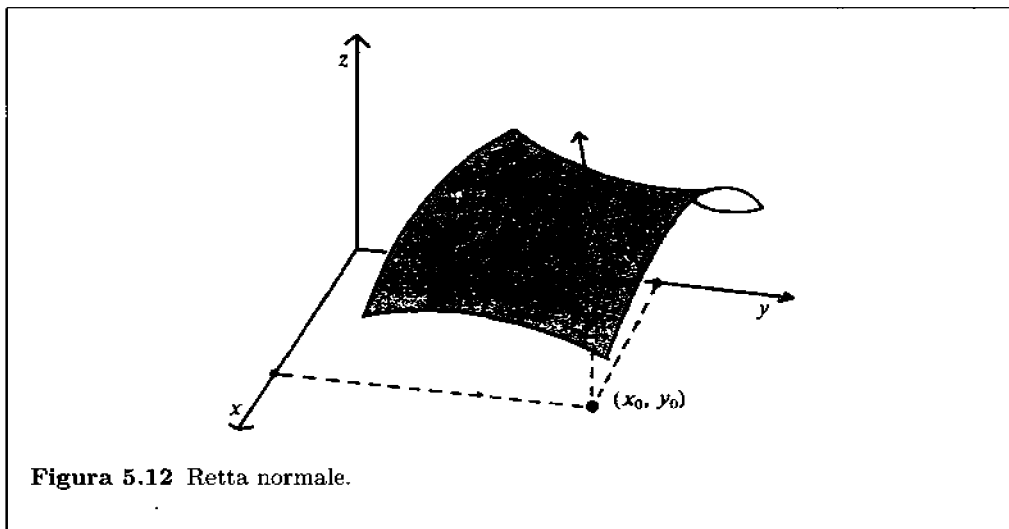


Figura 5.12 Retta normale.

## DIFFERENZIALE

Se  $f$  è differenziabile, il suo incremento può scriversi come somma di due addendi, una parte lineare negli incrementi  $h, k$  e una parte che è infinitesima di ordine superiore; come nel caso di una variabile (Formola (3.31), pag. 106) è chiaro il significato geometrico di questa scomposizione. La parte lineare dell'incremento si chiama *differenziale* di  $f$  e si indica con  $df$  o  $df(x, y)$ :

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)k.$$

Il differenziale di  $f$  è dunque una funzione di quattro variabili: le coordinate  $x$  e  $y$  del punto in esame e gli incrementi  $h$  e  $k$ ; è lineare in questi ultimi argomenti e approssima

l'incremento della funzione con un errore che è infinitesimo di ordine superiore a  $g = \sqrt{h^2 + k^2}$ . In particolare per le funzioni  $f(x,y) = x$  e  $f(x,y) = y$  si ha

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x}h + \frac{\partial x}{\partial y}k = h, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial x}h + \frac{\partial y}{\partial y}k = k$$

e quindi il differenziale di una funzione  $f(x,y)$  si può scrivere nella forma

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy.$$

## DERIVATE SUCCESSIVE

Se le derivate prime di una funzione sono a loro volta funzioni derivabili si può parlare di derivate seconde, terze ecc. Tali derivate successive si indicano con i simboli analoghi a quelli usati nel caso di una variabile:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dots \quad \text{oppure} \quad f_{xx}, f_{xy}, \dots$$

Per la funzione dell'Esempio 5.2 risulta  $f_{xy} = f_{yx}$  e cioè le derivate seconde non dipendono dall'ordine in cui si eseguono le derivazioni. Tuttavia ciò non è in genere vero se non si fanno opportune ipotesi sulla funzione  $f$ : per esempio se

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (5.10)$$

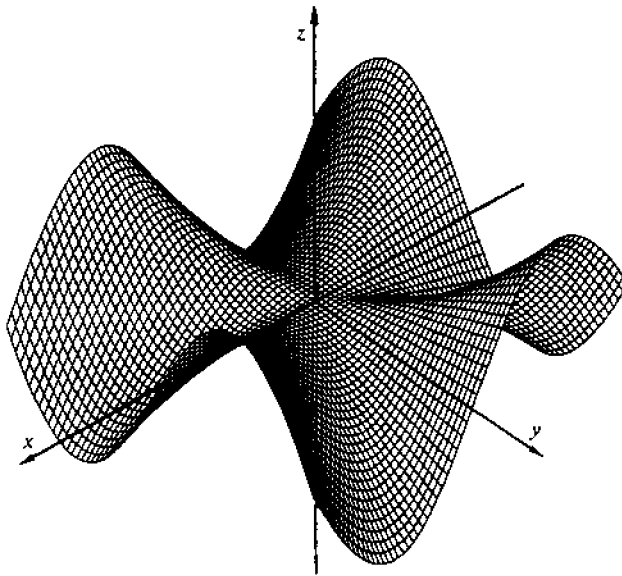


Figura 5.13 Grafico della funzione (5.10).

è facile verificare che si ha  $f_{xy}(0,0) = -1$ ,  $f_{yx}(0,0) = 1$  (questo esempio è dovuto al matematico cuneese Peano).

Sussiste tuttavia il teorema seguente.

**TEOREMA 5.7 (Teorema di Schwarz).** Se le derivate parziali miste  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  esistono in un intorno  $I$  del punto  $(x_0, y_0)$  e sono continue in  $(x_0, y_0)$  allora esse sono uguali. La dimostrazione non è altro che una diligente applicazione del teorema del valor medio.

## FUNZIONI COMPOSTE

Se  $f(x, y)$  è una funzione definita in un aperto  $A$  e

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b] \quad (5.11)$$

sono due funzioni tali che per  $a \leq t \leq b$  risulti  $(x(t), y(t)) \in A$ , allora a ogni valore di  $t$  corrisponde un unico valore di  $f(x(t), y(t)) = F(t)$ ; la funzione  $F$  è dunque la funzione composta: essa è rappresentata geometricamente dai punti della superficie  $z = f(x, y)$  che appartengono alla superficie cilindrica con generatrici parallele all'asse  $z$  e avente per direttrice la curva piana (5.11).

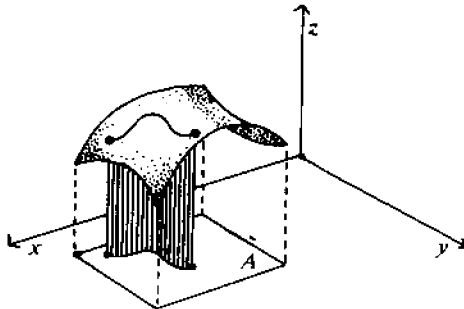


Figura 5.14 Funzioni composte.

Si supponga che  $f$  sia differenziabile e che le funzioni  $x(t)$ ,  $y(t)$  siano derivabili; sia  $\delta$  un incremento della variabile  $t$  e siano  $h = x(t + \delta) - x(t)$ ,  $k = y(t + \delta) - y(t)$  i corrispondenti incrementi di  $x$  e di  $y$ ; <sup>(2)</sup> si ha

$$F(t + \delta) - F(t) = f(x + h, y + k) - f(x, y) = f_x(x, y)h + f_y(x, y)k + o(\sqrt{h^2 + k^2}).$$

Siccome  $h = x'(t) \cdot \delta + o(\delta)$ ,  $k = y'(t) \cdot \delta + o(\delta)$  si avrà

$$F(t + \delta) - F(t) = [f_x \cdot x' + f_y \cdot y']\delta + o(\delta);$$

otteniamo dunque il teorema seguente.

<sup>(2)</sup>Sarebbe più opportuno (e più preciso) considerare in luogo di un punto generico  $(x(t), y(t))$  un punto fissato  $(x_0, y_0)$ , ma ciò complica eccessivamente la notazione.

**TEOREMA 5.8** Se  $x(t)$ ,  $y(t)$  sono derivabili in  $[a, b]$  e  $f(x, y)$  è differenziabile in  $A$  allora la funzione composta  $F(t) = f(x(t), y(t))$  è derivabile in  $[a, b]$  e risulta

$$F'(t) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t). \quad (5.12)$$

—≡—

**ESEMPIO 5.9** Se  $z = f(x, y) = e^{xy^2}$ ,  $x = t \cos t$ ,  $y = t \sin t$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \\ &= (y^2 e^{xy^2})(-\sin t + t \cos t) + (2xy e^{xy^2})(\cos t + t \sin t) = \\ &= t^2 \sin t [3 \sin t \cos t + 2t - 3 \sin^2 t] e^{t^3 \sin^2 t \cos t}. \end{aligned}$$

Si noti che allo stesso risultato si sarebbe pervenuti sostituendo direttamente  $x(t)$  e  $y(t)$  e derivando la funzione  $z = e^{t^3 \sin^2 t \cos t}$ .

—≡—

In modo analogo si studia il caso in cui  $x$  e  $y$  sono a loro volta funzioni di due variabili

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

e dunque la funzione  $f(x, y)$  è funzione composta delle due variabili  $\xi$ ,  $\eta$ . Per esempio, la funzione  $e^{-xy}$ , se  $x = \xi \cos \eta$  e  $y = \xi \sin \eta$  si può porre nella forma  $e^{-\xi^2 \sin \eta \cos \eta}$ .

Ovviamente occorrerà che le funzioni  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  siano definite su di uno stesso insieme  $A$  e che assumano valori tali che se  $(\xi, \eta) \in A$  allora  $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  appartenga all'insieme di definizione di  $f$ . In questa circostanza, come nel caso precedente, si ha:

**TEOREMA 5.10** Se  $x = x(\xi, \eta)$ ,  $y = y(\xi, \eta)$  e  $f(x, y)$  sono funzioni differenziabili allora la funzione composta

$$F(\xi, \eta) = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$$

è differenziabile e le sue derivate parziali sono date dalle formule<sup>(3)</sup>

$$\begin{cases} F_\xi = f_x x_\xi + f_y y_\xi \\ F_\eta = f_x x_\eta + f_y y_\eta. \end{cases} \quad (5.13)$$

Tali formule si rivelano particolarmente utili nel caso del cambiamento di variabili. Per esempio, le espressioni (Figura 5.8)

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \sin \vartheta$$

determinano il passaggio dalle coordinate cartesiane  $x$ ,  $y$  alle coordinate polari  $r$ ,  $\vartheta$ ; se  $z = f(x, y) = f(r \cos \vartheta, r \sin \vartheta)$  si ha

$$f_\vartheta = -f_x r \sin \vartheta + f_y r \cos \vartheta, \quad f_r = f_x \cos \vartheta + f_y \sin \vartheta,$$

<sup>(3)</sup>Ovviamente le funzioni  $f_x$ ,  $f_y$  si intendono calcolate in  $(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  mentre  $F_\xi$ ,  $F_\eta$ ,  $x_\xi$ ,  $x_\eta$ ,  $y_\xi$ ,  $y_\eta$  sono calcolate in  $(\xi, \eta)$ .

da cui la utile equazione

$$f_x^2 + f_y^2 = f_r^2 + \frac{1}{r^2} f_\vartheta^2. \quad (5.14)$$

Calcoliamo le derivate seconde:

$$f_{rr} = \frac{\partial}{\partial r}(f_x \cos \vartheta + f_y \sin \vartheta) = f_{xx} \cos^2 \vartheta + 2f_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta + f_{yy} \sin^2 \vartheta,$$

$$f_{\vartheta\vartheta} = \frac{\partial}{\partial \vartheta}(-f_x r \sin \vartheta + f_y r \cos \vartheta) = r^2[f_{xx} \sin^2 \vartheta - 2f_{xy} \sin \vartheta \cos \vartheta + f_{yy} \cos^2 \vartheta] +$$

$$+ r[-f_x \cos \vartheta - f_y \sin \vartheta],$$

$$f_{r\vartheta} = r[-f_{xx} \sin \vartheta \cos \vartheta + f_{xy}(\cos^2 \vartheta - \sin^2 \vartheta) + f_{yy} \sin \vartheta \cos \vartheta] +$$

$$+ [-f_x \sin \vartheta + f_y \cos \vartheta].$$

In particolare, sommando le prime due equazioni si ottiene la relazione

$$f_{rr} + \frac{1}{r^2} f_{\vartheta\vartheta} = f_{xx} + f_{yy} + \frac{1}{r}[-f_x \cos \vartheta - f_y \sin \vartheta] = f_{xx} + f_{yy} - \frac{1}{r} f_r$$

che permette di ottenere l'espressione dell'*operatore di Laplace*

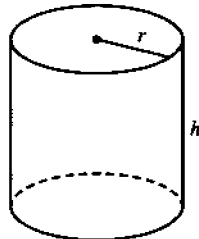
$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{xx} + u_{yy}$$

in coordinate polari:

$$\Delta u = u_{rr} + u_{\vartheta\vartheta} \frac{1}{r^2} + u_r \frac{1}{r} = \frac{1}{r^2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right\}. \quad (5.15)$$

**OSSERVAZIONE 5.11** Capita sovente che un certo problema coinvolga diverse variabili e diverse relazioni fra di esse. Un esempio molto semplice, ma che può essere illuminante, è il seguente: quattro variabili  $V$ ,  $S$ ,  $r$ ,  $h$  sono connesse dalle relazioni

$$V = \pi r^2 h, \quad S = 2\pi r h + 2\pi r^2. \quad (5.16)$$



**Figura 5.15**

Tali sono le formule che esprimono il volume  $V$  e la superficie totale  $S$  del cilindro circolare retto di raggio  $r$  e altezza  $h$ . Delle quattro variabili solo due sono "indipendenti"; ordinariamente la scelta di tali variabili cade su  $r$  e  $h$ , ma altre scelte sono possibili. Per esempio, è possibile scegliere  $r$  e  $S$  come indipendenti: in tal caso si ha

$$h = \frac{S}{2\pi r} - r, \quad V = \frac{1}{2}rS - \pi r^3. \quad (5.17)$$

In una tale situazione è chiaro che una notazione come  $\frac{\partial V}{\partial r}$  è ambigua, in quanto se si calcola tale quantità usufruendo delle (5.17) si ha  $\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{1}{2}S - 3\pi r^2$ , mentre, usando le (5.16), si ha  $\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r h$  e tali risultati non sembrano essere in accordo, visto che per i valori  $h = r = 1$ ,  $V = \pi$ ,  $S = 4\pi$  (del tutto compatibili sia con le (5.16) sia con le (5.17)) forniscono, rispettivamente, i valori  $2\pi$  e  $-\frac{5}{2}\pi$ . In effetti i problemi studiati sono assolutamente diversi, come cerca di mostrare la Figura 5.16.

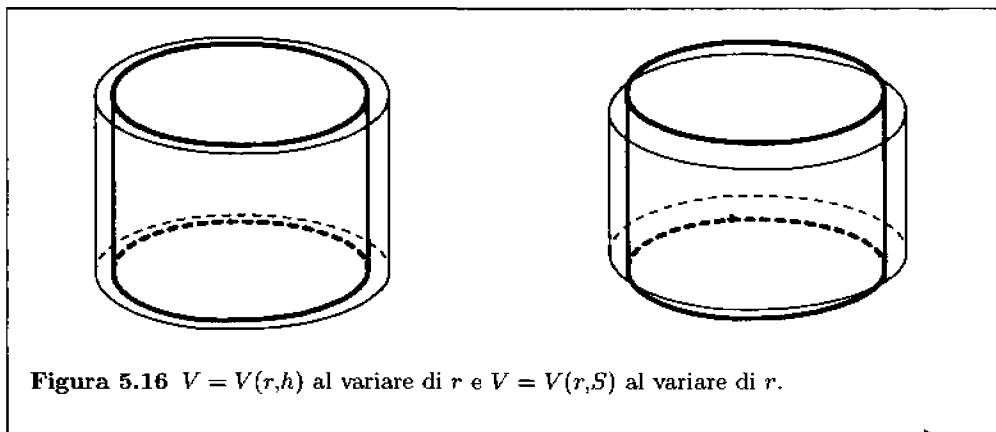


Figura 5.16  $V = V(r, h)$  al variare di  $r$  e  $V = V(r, S)$  al variare di  $r$ .

Occorre, dunque, una notazione che metta in luce quali siano le variabili indipendenti; tra le più usate – sebbene non scevra da pericoli – è la seguente:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_h \quad (5.18)$$

indicherà, per esempio, la derivata parziale di  $V$ , funzione delle variabili indipendenti  $r$  e  $h$ , rispetto alla variabile  $r$ . In altri termini con la notazione (5.18) si intende che  $h$  è da ritenersi costante nel calcolo della derivata, mentre le altre eventuali variabili del problema sono "libere" e possono (debbono, in questo caso) variare. Con una tale notazione si ha, per esempio,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial h}\right)_r = 2\pi r, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial h}\right)_r = \pi r^2, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial r}\right)_V = -\frac{2V}{\pi r^3}, \dots$$

Usufruire di questa convenzione è particolarmente raccomandato e utile, per esempio, in questioni di termodinamica, ove le variabili entropia, temperatura, volume, pressione, ... sono legate in vario modo e a seconda del fenomeno che si studia si possono mantenere costanti, per esempio, la temperatura, o la pressione, o il volume.

**FORMULA DI TAYLOR**

Sia  $f(x)$  una funzione di classe  $C^{m+1}$  (cioè con derivate continue fino all'ordine  $m+1$ ) in un aperto  $A$  del piano e sia  $(x_0, y_0)$  un punto di  $A$ ; supponiamo che l'intorno di  $(x_0, y_0)$  di raggio  $\sqrt{h^2 + k^2}$  sia contenuto in  $A$  e poniamo

$$F(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk), \quad t \in (-1, 1).$$

Dalla formula di Taylor per  $F(t)$ :

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{F''(0)}{2} + \dots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!} + R_m.$$

Usufruento ora del Teorema 5.8 si ottiene

$$\begin{aligned} F(0) &= f(x_0, y_0), & F(1) &= f(x_0 + h, y_0 + k), \\ F'(0) &= h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), \\ F''(0) &= h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0), \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

e induttivamente si prova che

$$\begin{aligned} F^{(m)}(0) &= h^m \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(x_0, y_0) + \binom{m}{1} h^{m-1} k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y}(x_0, y_0) + \\ &+ \binom{m}{2} h^{m-2} k^2 \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-2} \partial y^2}(x_0, y_0) + \dots + k^m \frac{\partial^m f}{\partial y^m}(x_0, y_0) = \\ &= \sum_{s=0}^m \binom{m}{s} h^{m-s} k^s \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-s} \partial y^s}(x_0, y_0), \end{aligned}$$

la quale può essere simbolicamente scritta

$$F^{(m)}(0) = \left[ \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f \right] (x_0, y_0).$$

Si ottiene, così la *formula di Taylor*:

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \left[ h \frac{\partial f}{\partial x} + k \frac{\partial f}{\partial y} \right] + \frac{1}{2!} \left[ h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right] + \\ &+ \dots + \frac{1}{m!} \left[ h^m \frac{\partial^m f}{\partial x^m} + \binom{m}{1} h^{m-1} k \frac{\partial^m f}{\partial x^{m-1} \partial y} + \dots + k^m \frac{\partial^m f}{\partial y^m} \right] + R_m \\ &= f(x_0, y_0) + \sum_{r=1}^m \frac{1}{r!} \left[ \left( h \frac{\partial}{\partial x} + k \frac{\partial}{\partial y} \right)^r f \right] + R_m, \end{aligned}$$

ove tutte le derivate si intendono calcolate in  $(x_0, y_0)$  e il resto  $R_m$  si può porre nella forma

$$R_m = \frac{1}{(m+1)!} \left[ h^{m+1} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}} + \binom{m+1}{1} h^m k \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^m \partial y} + \dots + k^{m+1} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial y^{m+1}} \right],$$

in cui tutte le derivate sono calcolate in un punto  $(\xi, \eta)$  con  $\xi, \eta$  compresi tra  $x_0$  e  $x_0 + h$  e tra  $y_0$  e  $y_0 + k$ .

In particolare per  $m = 1$  e  $x = x_0 + h, y = y_0 + k$  si ha

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + (x - x_0)f_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f_y(x_0, y_0) + \\ + \frac{1}{2}[(x - x_0)^2 f_{xx}(\xi, \eta) + 2(x - x_0)(y - y_0)f_{xy}(\xi, \eta) + (y - y_0)^2 f_{yy}(\xi, \eta)]. \quad (5.19)$$

## MASSIMI E MINIMI

Le definizioni di punto di massimo e di minimo locale per funzioni di più variabili si formulano in modo analogo al caso di una sola variabile. Studieremo ora il caso in cui i punti di massimo e di minimo locale sono *interni* all'insieme su cui è definita la funzione, rimandando al Capitolo 9 il caso "di frontiera". Considereremo solo funzioni di classe  $C^2$ .

Osserviamo intanto che se  $(x_0, y_0)$  è un punto di massimo (o di minimo) locale per  $f(x, y)$ , allora le funzioni  $x \rightarrow f(x, y_0)$  e  $y \rightarrow f(x_0, y)$  hanno un massimo (minimo) locale in  $x_0$  e in  $y_0$ ; dunque necessariamente risulta (Proposizione 4.27 (c))

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0. \quad (5.20)$$

È chiaro, allora, che nei punti di massimo o di minimo locale il *gradiente* di  $f$  è nullo e il piano tangente al grafico di  $f$  è orizzontale.

I punti  $(x, y)$  in cui il gradiente di  $f$  è nullo si dicono *punti critici*, o *stazionari* di  $f$ ; come nel caso di una variabile, vi possono essere punti critici di  $f$  che non sono punti di massimo né di minimo.

Sia ora  $(x_0, y_0)$  un punto critico di  $f$ ; poiché  $f \in C^2$  possiamo scrivere la (5.19) nella forma seguente

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\varrho^2}{2} \left[ \left( \frac{x - x_0}{\varrho} \right)^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2 \frac{x - x_0}{\varrho} \frac{y - y_0}{\varrho} f_{xy}(x_0, y_0) + \right. \\ \left. + \left( \frac{y - y_0}{\varrho} \right)^2 f_{yy}(x_0, y_0) \right] + \varrho^2 \omega(\varrho), \quad (5.21)$$

ove  $\varrho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$  e  $\omega(\varrho)$  è infinitesima con  $\varrho$ .

Supponiamo ora che sia

$$[f_{xy}(x_0, y_0)]^2 - f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) < 0;$$

allora l'espressione

$$\alpha^2 f_{xx}(x_0, y_0) + 2\alpha\beta f_{xy}(x_0, y_0) + \beta^2 f_{yy}(x_0, y_0)$$

non si annulla mai e dunque ha, sull'insieme chiuso e limitato  $\{(\alpha, \beta), \alpha^2 + \beta^2 = 1\}$ , un minimo  $m$  e un massimo  $M$  dello stesso segno di  $f_{xx}(x_0, y_0)$ .

Se  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  dalla (5.21) si ha

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) \geq \varrho^2 \left( \frac{m}{2} + \omega(\varrho) \right);$$



per  $\rho$  abbastanza piccolo il secondo membro è positivo, da cui

$$f(x, y) > f(x_0, y_0),$$

e dunque  $(x_0, y_0)$  è un minimo locale per  $f$ ; analogamente, se  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ , il punto  $(x_0, y_0)$  è un massimo locale per  $f$ .

Abbiamo così dimostrato il criterio seguente.

**PROPOSIZIONE 5.12** Se  $f \in C^2$  e in un punto  $(x_0, y_0)$  sono verificate le condizioni:

$$f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0, \quad (5.22)$$

$$f_{xx}(x_0, y_0)f_{yy}(x_0, y_0) - [f_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0, \quad (5.23)$$

allora il punto  $(x_0, y_0)$  è un minimo oppure un massimo locale per  $f$  a seconda che sia  $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$  oppure  $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ .

Il primo membro della (5.23) si può scrivere nella forma

$$H = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{yx}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

e si dice *determinante hessiano* di  $f$  nel punto  $(x_0, y_0)$ .

**OSSERVAZIONE 5.13** Si noti che, viceversa, se  $f(x, y)$  ha in  $(x_0, y_0)$  un punto di massimo o di minimo locale, l'espressione entro parentesi quadra nella (5.21) non può cambiare segno e dunque si ha  $H \geq 0$ ; in altri termini

$$\text{grad } f = 0, \quad H \geq 0$$

sono condizioni necessarie per l'esistenza di un massimo o di un minimo locale, mentre

$$\text{grad } f = 0 \quad H > 0$$

sono condizioni sufficienti.



**ESEMPI 5.14 (a)** Si cerchino i massimi e i minimi locali della funzione

$$f(x, y) = x^2 + 2kxy + y^2.$$

Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2ky, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2kx + 2y.$$

Il sistema

$$\begin{cases} x + ky = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}$$

per  $k^2 \neq 1$  ammette l'unica soluzione  $x = 0, y = 0$ , mentre per  $k = 1$  e  $k = -1$  ha infinite soluzioni date rispettivamente da

$$x + y = 0, \quad x - y = 0.$$

Formiamo l'hessiano

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 2k \\ 2k & 2 \end{vmatrix} = 4(1 - k^2);$$

se  $|k| > 1$  l'hessiano è negativo e, quindi, nel punto critico  $(0,0)$  non vi è né massimo né minimo locale; se  $|k| < 1$  l'hessiano è positivo e poiché  $f_{xx} > 0$  il punto  $(0,0)$  è di minimo locale.

Se  $k^2 = 1$  risulta  $H = 0$  e dunque le considerazioni precedenti risultano inefficaci; tuttavia si ha

$$f(x,y) = (x+y)^2 \quad \text{se } k = 1, \quad (5.24)$$

$$f(x,y) = (x-y)^2 \quad \text{se } k = -1;$$

e, siccome la funzione (5.24) si annulla per  $x = -y$ , essa ammette infiniti punti di minimo relativo nei punti della retta  $x = -y$ . Analogamente nel caso  $k = -1$ .

(b) (*Principio del massimo*). Sia  $f(x,y)$  una funzione continua in una regione  $A$  chiusa e limitata. Si supponga che, nei punti interni della regione,  $f(x,y)$  sia una funzione armonica, il che significa che in ciascun punto interno di  $A$  la funzione verifica l'equazione (detta di Laplace)

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \quad (5.25)$$

Siano  $m$  e  $M$  il minimo e il massimo di  $f$  sulla frontiera di  $A$ ; proviamo che per ogni punto  $(x,y)$  di  $A$  si ha

$$m \leq f(x,y) \leq M;$$

in altri termini il minimo e il massimo della funzione armonica vengono assunti sulla frontiera della regione. Consideriamo infatti la funzione

$$v(x,y) = f(x,y) + \varepsilon(x^2 + y^2),$$

ove  $\varepsilon$  è un parametro positivo. Si ha

$$\Delta v = \Delta f + 4\varepsilon = 4\varepsilon > 0; \quad (5.26)$$

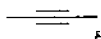
se ne deduce che  $v$  non può avere punti di massimo interni ad  $A$ , perché in tal caso dovrebbe essere  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \leq 0$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \leq 0$  in questo punto (Proposizione 4.37), in contrasto con la (5.26). Dunque se  $(x,y)$  è un punto interno ad  $A$  si ha

$$v(x,y) \leq \max_A [f + \varepsilon(x^2 + y^2)] \leq M + \varepsilon R^2,$$

ove  $R$  è il raggio di un cerchio di centro l'origine e che contiene  $A$ . Poiché per definizione  $f \leq v$  si ha

$$f(x,y) \leq M + \varepsilon R^2 \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0$$

e dunque se  $(x, y) \in A$  deve essere  $f(x, y) \leq M$ . Analogamente (prendendo la funzione  $-f$ ) si prova  $f(x, y) \geq m$ .



## ESERCIZI

**5.0.1** Dire quali dei seguenti insiemi sono aperti, quali chiusi e quali limitati. Per ciascuno di essi trovare la frontiera:

$$(a) \{(x, y); x^2 - y^2 \geq 1\}; \quad (b) \{(x, y); x^2 + 3y^2 < 2\};$$

$$(c) \{(x, y); |xy| < 1\}; \quad (d) \{(x, y); 0 < xy(x - 1)\}$$

**5.0.2** Individuare, se esistono, gli insiemi dei punti del piano  $(x, y)$  in cui le seguenti funzioni non sono definite, si annullano, assumono valori positivi:

$$\frac{1}{xy}, \quad \frac{1}{x^2 - y^2}, \quad \frac{\operatorname{sen} x}{y - x}, \quad \frac{\operatorname{sen} x}{x^2 - y + 2}.$$

**5.0.3** Calcolare, se esistono, i limiti seguenti:

$$(a) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}; \quad (b) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} e^{-1/(x^2 + y^2)};$$

$$(c) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}; \quad (d) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\operatorname{sen} xy}{y};$$

$$(e) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^4}; \quad (f) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1 - \cos xy}{x^2 + y^2};$$

$$(g) \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{(x+y)^2} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**5.0.4** Trovare quali sono i punti nei quali le funzioni seguenti non sono continue e quali sono le discontinuità eliminabili (si veda l'Esercizio 4.3.9):

$$(a) f(x, y) = \frac{x - y}{x^2 - y^2}; \quad (b) f(x, y) = xy \ln(xy);$$

$$(c) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}; \quad (d) f(x, y) = \operatorname{sen} \frac{y}{x};$$

**5.0.5** Siano  $A, B, C$  tre numeri tali che

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = A + hB + kC + o(\varrho) \quad \text{ove} \quad \varrho = \sqrt{h^2 + k^2}; \quad (5.27)$$

si provi che  $f$  è dotata di derivate parziali in  $(x_0, y_0)$  e che si ha

$$A = f(x_0, y_0), \quad B = f_x(x_0, y_0), \quad C = f_y(x_0, y_0),$$

e che, dunque, la (5.27) è equivalente alla Definizione 5.4 di differenziabilità.

5.0.6 Le seguenti funzioni sono differenziabili in  $(0,0)$ ?

$$f_1(x,y) = \begin{cases} x+y, & x > 0 \\ x+ye^{-x^2}, & x \leq 0 \end{cases}; \quad f_2(x,y) = \sqrt{x^2+y^2};$$

$$f_3(x,y) = [\operatorname{arctg}(y+1)]^{x+1}; \quad f_4(x,y) = \log_{y+1}(x+1);$$

$$f_5(x,y) = |xy|^\alpha; \quad f_6(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

5.0.7 Studiare la funzione  $z = xy^2$  nel punto  $(2,3)$  per determinare:

- la derivata direzionale, indicando quando è massima, minima o nulla;
- la derivata nella direzione del vettore  $\mathbf{e} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ;
- l'equazione del piano tangente;
- l'equazione della retta perpendicolare alla superficie.

5.0.8 Scrivere le equazioni del piano tangente e della retta normale alla superficie di equazione  $z = x^2 + y^2$  nel punto  $(-1,2)$ . Determinare le coordinate del punto  $P$  della medesima superficie in cui il piano tangente è parallelo al piano di equazione  $z = 3x + 4y$ ; scrivere le equazioni del piano tangente e della retta normale in  $P$ .

5.0.9 Si determini un piano tangente alla sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

in un punto del primo ottante ( $x > 0, y > 0, z > 0$ ) in modo che il volume del tetraedro delimitato da tale piano e dai piani coordinati sia minimo.

5.0.10 Calcolare il vettore gradiente nel punto  $(x_0, y_0)$ , esplicitandone il modulo e la direzione, per le funzioni

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (\text{potenziale elettrico});$$

$$f(x,y) = \arctan \frac{x}{y} \quad (\text{"potenziale" magnetico}).$$

5.0.11 Determinare quali sono le rette normali al paraboloido di equazione  $z = x^2 + y^2 - 1$  che passano per il punto  $(0,0,0)$ . Determinare l'angolo da esse formato con l'asse  $x$ .

5.0.12 Provare che i piani tangenti alla superficie di equazione  $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$  individuano, lungo i tre assi coordinati, 3 segmenti aventi un estremo nell'origine la cui lunghezza ha somma costante.

5.0.13 (a) Si formuli il teorema del valor medio per funzioni di due variabili.

(b) Sia  $f(x,y) = \ln(1+x^2+y^2)$ . Provare che

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \sqrt{|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2}.$$

5.0.14 Sia  $f(x,y)$  una funzione definita su un cerchio  $C$  tale che  $\operatorname{grad} f \equiv 0$  su  $C$ ; si provi che  $f(x,y) = \text{costante}$  su  $C$ .

**5.0.15** (a) Si provi che se  $f, g \in C^2$  e  $c$  è una costante assegnata, la funzione

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (5.28)$$

è soluzione dell'equazione della corda vibrante:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (5.29)$$

(b) Posto  $\xi = x - ct$ ,  $\eta = x + ct$  si verifichi che l'equazione (5.29) diviene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

e se ne deduca che ogni soluzione di (5.29) è della forma (5.28).

**5.0.16** Si provi che le soluzioni di  $\Delta u = 0$  nello spazio 1-dimensionale sono tutti e soli i polinomi di grado  $\leq 1$ .

**5.0.17** Siano  $A = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$ ,  $C = \{(x, y); x^2 + y^2 = 1\}$ .

Sia  $f$  una funzione continua di  $A \cup C$  e sia  $g$  continua su  $C$ . Provare che il problema di Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } A \\ u = g & \text{su } C \end{cases}$$

ha al più una soluzione. [Usare il principio del massimo].

**5.0.18** Si determini una soluzione dell'equazione

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 1$$

della forma  $f(x, y) = g(x + y)$ .

**5.0.19** Sia  $u(x, y)$  una funzione armonica. Determinare le funzioni  $f$  tali che  $v(x, y) = f(u(x, y))$  risulti armonica.

**5.0.20** Si verifichi che le sole soluzioni dell'equazioni di Laplace  $\Delta u = 0$  che dipendono solo dalla distanza  $\rho$  dall'origine sono della forma

$$u(\rho) = \begin{cases} a \log \rho + b & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ \frac{c}{\rho} + d & \text{in } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

**5.0.21** Si considerino le coordinate polari in  $\mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} x &= R \operatorname{sen} \vartheta \cos \varphi \\ y &= R \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \varphi \\ z &= R \cos \vartheta \end{aligned}$$

ove  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\vartheta$  è l'angolo tra il vettore  $OP$  (ove  $P = (x, y, z)$ ) e l'asse  $z$ , e  $\varphi$  è l'angolo tra la proiezione di  $OP$  sul piano  $z = 0$  e l'asse  $x$ .

Verificare che l'operatore di Laplace  $\Delta$  in coordinate polari è dato da

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial u}{\partial R} + \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left[ \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \right] + \frac{1}{R^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

- 5.0.22** Si considerino i punti  $A = (0,2)$ ,  $B = (1,1)$ . Determinare il massimo e il minimo del prodotto scalare tra i vettori  $AP$  e  $BP$ , al variare del punto  $P$
- (a) nel piano;  
(b) nel cerchio  $x^2 + y^2 \leq R^2$ , dove  $R$  è un numero positivo assegnato.

- 5.0.23** (*Metodo dei minimi quadrati*). Di una certa grandezza  $y(x)$  si conoscono i valori  $y_1, y_2, \dots, y_n$  in  $n$  punti  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Si cerca una relazione lineare tra  $x$  e  $y$  del tipo  $y = ax + b$  che "meglio approssimi" i valori misurati. Posto  $\varepsilon_1 = y_1 - (ax_1 + b)$ ,  $\varepsilon_2 = y_2 - (ax_2 + b)$ ,  $\dots$ ,  $\varepsilon_n = y_n - (ax_n + b)$ , si verifichi che i valori di  $a$  e  $b$  per i quali è minimo lo scarto quadratico

$$\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \dots + \varepsilon_n^2$$

sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^n x_i + bn = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n x_i y_i. \end{cases} \quad (5.30)$$

- 5.0.24** Un'azienda ha fatturato negli ultimi cinque anni, dal 1996 al 2000, rispettivamente 9; 11,2; 9,8; 11,8; 14 miliardi di lire. Nella semplicistica ipotesi di una variazione lineare del costo dei materiali, del lavoro e anche della domanda, quanto prevede di fatturare l'azienda nel 2001?
- 5.0.25** La legge di Hubble per l'espansione dell'Universo è data dall'equazione lineare (*velocità*) = (*costante di Hubble*) · (*distanza*), cioè  $v = H \cdot x$ . La legge esprime il fatto che una galassia si allontana dalla Terra in modo proporzionale alla sua distanza dalla Terra stessa. Misurando la velocità di recessione (in Km/s) e le distanze in milioni di anni luce, si trovano, dall'esame di cinque galassie, i dati seguenti

distanza	500	1400	2100	2900	3000
velocità	9000	22000	39000	51000	49000

Utilizzando il metodo dei minimi quadrati si dia una stima della costante  $H$  di Hubble.

- 5.0.26** Siano  $(x_i, y_i)$  dei valori rilevati sperimentalmente per una incognita funzione  $y = f(x)$  e per  $1 \leq i \leq n$ . Si provi che il punto di coordinate

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

appartiene alla retta  $y = mx + q$  determinata con il metodo dei minimi quadrati; dunque tale retta passa per il "baricentro" degli  $n$  punti dati.

**5.0.27** Determinare il triangolo inscritto in un dato cerchio che ha area massima.

**5.0.28** Si calcoli il polinomio di Taylor in  $(0,0)$  di ordine 3 della funzione

$$\frac{\cos x}{\cos y}.$$

**5.0.29** Calcolare la derivata di

$$f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

nel generico punto  $(x,y)$  sull'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nella direzione della normale esterna all'ellisse.

(Si osservi che le coordinate dei punti dell'ellisse possono essere scritte nella forma

$$x = a \cos \vartheta, \quad y = b \sin \vartheta, \quad \text{con } 0 \leq \vartheta < 2\pi).$$

**5.0.30** Determinare i massimi e minimi relativi delle funzioni

$$(a) \quad 2 \ln(2 + x^2 + y^2) - xy; \quad (b) \quad \ln(2 + x^2 + y^2) - xy;$$

$$(c) \quad f(x,y) = 2xz + x^3 - y^3; \quad (d) \quad f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3;$$

$$(e) \quad f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2y^2.$$

**5.0.31** Trovare tre numeri positivi  $x,y,z$  tali che sia  $x + y + z = 8$  e che il numero  $x^2yz$  sia massimo.

**5.0.32** Trovare tre numeri positivi  $x,y,z$  tali che sia  $x + y + z = 100$  e che il numero  $x^2y^2z$  sia massimo.

**5.0.33** Determinare il massimo e il minimo di:

$$(a) \quad f(x,y) = x^2 - y^2 \text{ nella regione delimitata dal triangolo di vertici } (0,0), (3,1), (1,3);$$

$$(b) \quad f(x,y) = xy \text{ nel cerchio } x^2 + y^2 \leq 1.$$

**5.0.34** Nell'oceano una nave,  $A$ , sta navigando, con velocità  $v$ , secondo una rotta a latitudine costante; un'altra nave,  $B$ , si trova, all'istante  $t = 0$ , a distanza  $h$  da  $A$  ed è sullo stesso meridiano.  $B$  può navigare a una velocità massima  $w$ , con  $w < v$ ; quale rotta deve seguire  $B$  per avvicinarsi il più possibile alla nave  $A$ ? (Si supponga che l'oceano sia piano).

**5.0.35** Dimostrare che in ogni punto dell'ellisse  $2x^2 + y^2 = c^2$  la derivata della funzione  $f(x,y) = y^2/x$  nella direzione della normale all'ellisse è nulla.

**5.0.36** La base  $x$  e l'altezza  $y$  di un triangolo rettangolo sono state misurate con un errore rispettivo di  $h$  e  $k$ . Qual è il massimo errore nel calcolo dell'area e in quello del perimetro del triangolo?

**5.0.37** Un pacco può essere spedito negli Stati Uniti per posta aerea se la somma dei numeri che esprimono la misura del suo lato massimo e quella del suo volume (espressa la prima in cm e la seconda in  $\text{cm}^3$ ) non supera 3600. Trovare le dimensioni di una scatola rettangolare di volume massimo che si può spedire.

- 5.0.38** Qual è il solido di volume massimo, a forma di parallelepipedo, inscrivibile in una sfera di raggio unitario?  
E se invece dei soli parallelepipedi si considerano poliedri di qualunque tipo?
- 5.0.39** Si sa (formula di Erone) che l'area di un triangolo con lati di lunghezza  $a, b, c$  è data da

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ove  $p$  è il semiperimetro  $p = \frac{a+b+c}{2}$ .

Quale triangolo di perimetro 2 ha area massima?

- 5.0.40** Trovare il punto sul piano  $x + 3y - z = 6$  più vicino all'origine.
- 5.0.41** Trovare i punti della superficie  $xyz = 1$  più vicini all'origine.
- 5.0.42** Dimostrare che il parallelepipedo di volume dato e con superficie totale minima è un cubo.
- 5.0.43** Dimostrare che il parallelepipedo che ha superficie totale assegnata e volume massimo è un cubo.
- 5.0.44** Occorre costruire moltissime copie di una scatola di materiale plastico con volume assegnato. I lati e il fondo hanno il costo di 1 centesimo a centimetro quadrato. Il coperchio, che deve essere più robusto, costa il doppio. Trovare la forma della scatola che ha costo minimo.
- 5.0.45** Una ditta può produrre e vendere  $x$  unità di una merce e  $y$  di un'altra con un profitto dato da

$$P(x, y) = 10x + 20y - xy - x^2 - 50.$$

Per limitazioni della fabbrica si deve avere annualmente  $x \leq 10$  e  $y \leq 5$  (si pensi alla produzione di due tipi di velivoli). Trovare i valori di  $x$  e di  $y$  che massimizzano il profitto dell'azienda.

- 5.0.46** Un'impresa agrituristica produce, fra altre leccornie, fragole e carciofi. Da qualche indagine pare che le spese di produzione delle fragole in Euro, siano

$$c_1(x) = 1000 + 5x,$$

(per un prodotto  $x$  in quintali), mentre quelle dei carciofi siano

$$c_1(y) = 2000 + 8y.$$

Inoltre, al mercato generale, fragole e carciofi si vendono per un ricavo totale pari a

$$f(x, y) = 100\sqrt{x} + 200\sqrt{y} + 10\sqrt{xy}.$$

Quali devono essere i valori di  $x$  e di  $y$  perché l'azienda abbia il massimo profitto?



**5.0.47** Le precedenti norme postali, vigenti in Italia, consentivano di inoltrare pacchetti a forma di parallelepipedo con dimensioni  $x, y, z$  tali che

$$x + y + z \leq 90 \text{ cm} \quad \text{e} \quad x \leq y \leq z \leq 60 \text{ cm},$$

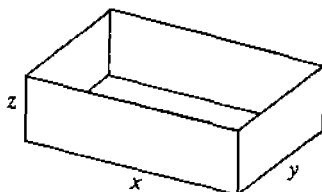
oppure a forma di cilindro di altezza  $h$  e raggio di base  $d$  con

$$h + 2d \leq 104 \text{ cm}, \quad h \leq 90 \text{ cm}, \quad 2d \leq 90 \text{ cm}.$$

Qual è il volume massimo che si poteva spedire come pacchetto postale?

**5.0.48** Nel caso di una "scatola aperta" e con ovvio significato dei simboli si ha:

$$V = xyz, \quad S = xy + 2xz + 2yz.$$



Tenendo conto della Osservazione 5.11 si studino i possibili significati di  $\frac{\partial V}{\partial x}$ .  
Si calcolino, per esempio,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{y,V}, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{x,y}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_{x,y}.$$

**5.0.49** (*Teorema di Eulero*). Una funzione  $F(x,y)$  si dice *positivamente omogenea* di grado  $n$  se

$$F(tx,ty) = t^n F(x,y) \tag{5.31}$$

per ogni valore di  $x, y$ , e di  $t \geq 0$  per i quali  $F(x,y)$  e  $F(tx,ty)$  sono definiti. Provare che per le funzioni differenziabili omogenee di grado  $n$  si ha

$$x \frac{\partial F}{\partial x} + y \frac{\partial F}{\partial y} = nF(x,y).$$

**5.0.50** Siano  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli di un triangolo. Si provi che l'espressione

$$\frac{\text{sen } \alpha}{\alpha} + \frac{\text{sen } \beta}{\beta} + \frac{\text{sen } \gamma}{\gamma}$$

è massima per il triangolo equilatero.

Si studia in dettaglio la nozione di integrale, introdotta nel Capitolo 3. Dapprima viene discussa l'integrabilità delle funzioni continue; si considera, poi, il problema pratico di determinare le primitive e si espongono le regole elementari di integrazione. Successivamente si affronta il problema della rettificazione delle curve; un ultimo paragrafo è dedicato agli integrali impropri e agli integrali dipendenti da parametro: sono di questo tipo alcuni degli integrali più interessanti che si incontrano in Analisi e nelle scienze applicate. In un complemento viene, poi, dimostrata la formula di Stirling che fornisce una approssimazione del fattoriale e viene introdotta la delicata nozione di continuità uniforme.

## 6.1 Funzioni integrabili

Nel Paragrafo 3.1 è stata dimostrata l'integrabilità delle funzioni monotone e delle funzioni lipschitziane su un intervallo  $[a, b]$ . In effetti tutte le funzioni continue in  $[a, b]$  sono integrabili, ma la dimostrazione di questo risultato è piuttosto delicata e sarà esposta nel paragrafo di complementi a questo capitolo. Enunciamo comunque formalmente questo importante risultato.

**TEOREMA 6.1** Se  $f$  è una funzione continua su  $[a, b]$  allora  $f$  è ivi integrabile.

Occorre tuttavia osservare, fin d'ora, che la continuità di una funzione non è una condizione necessaria per la sua proprietà di essere integrabile. Per esempio, se  $f$  ha un numero finito di "salti", ma è continua nei sottointervalli individuati dalle ascisse dei punti di salto, allora  $f$  è integrabile (Figura 6.1).

Non è facile caratterizzare le funzioni che sono integrabili secondo Riemann, vale a dire fornire una *condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità* di una funzione; fu proprio Riemann a formulare per primo una tale condizione (per la verità assai poco espressiva) ed è per questo che la definizione di integrale porta il suo nome.

Una semplice e garbata condizione necessaria e sufficiente fu invece trovata da Darboux nel 1875; essa diede luogo, diversi anni dopo, a una rifondazione del concetto di integrale. Ne accenniamo brevemente. Un insieme  $A$  di numeri reali viene detto *trascurabile* se per

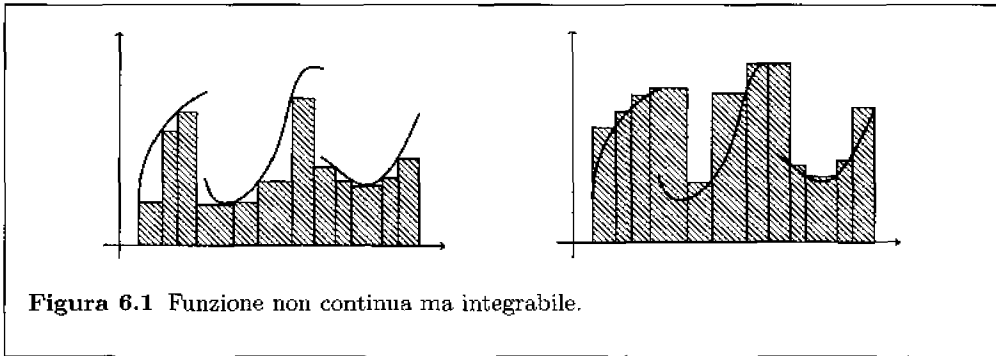


Figura 6.1 Funzione non continua ma integrabile.

ogni  $\varepsilon > 0$  vi è una successione di intervalli  $(a_i, b_i)$  che ricopre  $A$  ed è tale che

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon.$$

Si può allora dimostrare che una funzione  $f(x)$ , limitata su  $[a, b]$ , è integrabile secondo Riemann su  $[a, b]$  se e solo se l'insieme dei punti in cui  $f$  non è continua è trascurabile.

Usufruento della proprietà dei valori intermedi si ottiene un semplice ma importante teorema.

**TEOREMA 6.2** (della media integrale). Se  $f(x)$  è continua su  $[a, b]$  allora esiste  $\xi \in [a, b]$  tale che

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b - a). \quad (6.1)$$

Infatti, se  $m, M$  sono il minimo e il massimo di  $f$  su  $[a, b]$ , si avrà ovviamente

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a)$$

(Proposizione 3.12 (c)) e dunque il numero

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx, \quad (6.2)$$

è compreso fra il minimo e il massimo di  $f(x)$ . La tesi segue allora dal teorema di esistenza dei valori intermedi.  $\square$

La quantità (6.2) si dice *media integrale* o *valor medio* di  $f$  su  $[a, b]$ ; si noti che essa è esattamente il limite delle medie aritmetiche

$$\frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$$

dei valori assunti da  $f$  in  $n$  punti equispaziati (formula (3.13)). Il valor medio di  $f$  su  $[a, b]$  rappresenta l'altezza di un rettangolo di base  $b - a$  che ha la stessa area (con segno) del trapezoide definito da  $f$  (Figura 6.2).

Possiamo ora dimostrare, nella sua generalità, il *teorema fondamentale del calcolo*.

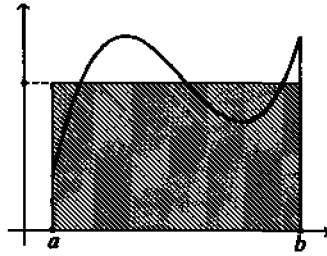


Figura 6.2 Valor medio.

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3.31** Dobbiamo dimostrare che se  $f(x)$  è una funzione continua in  $[a, b]$  allora la sua funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

è derivabile e si ha  $F'(x) = f(x)$  per ogni  $x$  in  $[a, b]$ , cioè  $F$  è una *primitiva* di  $f$ . Si consideri il rapporto incrementale di  $F(x)$ :

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt;$$

dal teorema della media integrale si deduce

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi), \quad (6.3)$$

ove  $\xi$  è un punto dell'intervallo  $[x, x+h]$ . Poiché  $(\xi - x)$  è infinitesimo con  $h$  e siccome  $f$  è continua, il limite di (6.3) per  $h \rightarrow 0$  esiste ed è uguale a  $f(x)$ .  $\square$

Si ha pertanto:

**PROPOSIZIONE 6.3** Ogni funzione continua  $f$  su  $[a, b]$  è dotata di funzione primitiva; ogni primitiva di  $f$  è della forma

$$\int_a^x f(t) dt + c$$

ove  $c$  è una costante.

Se  $G$  è una primitiva di una funzione continua  $f$  si ha allora  $G(x) = \int_a^x f(t) dt + c$  e dunque  $c = G(a)$ , da cui la formula fondamentale del calcolo integrale

$$G(b) - G(a) = \int_a^b f(t) dt. \quad (6.4)$$

La (6.4), come già sappiamo, fornisce un metodo naturale per il calcolo degli integrali definiti, in quanto consente di utilizzare all'inverso (ove possibile) le regole di derivazione. È di uso frequente la notazione

$$[G(x)]_a^b = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dt.$$

**ESEMPIO 6.4 (a)** Determiniamo  $\int_a^b x^\alpha dx$  ove  $\alpha$  è un qualunque numero reale e  $0 < a < b$ . Se  $\alpha \neq -1$  una funzione primitiva di  $x^\alpha$  è (Esempio 4.25 (c)):

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

e dunque si ha

$$\int_a^b x^\alpha dx = \frac{b^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}}{\alpha+1},$$

(in accordo con quanto ottenuto per via elementare nell'Esempio 3.1; si veda anche l'Esercizio 3.1.4).

Se invece  $\alpha = -1$  si ha (Esempio 4.25 (b))

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = [\ln x]_a^b = \ln \frac{b}{a}.$$

(b) La funzione  $-\cos x$  è una primitiva di  $\sin x$ ; si ha dunque

$$\int_a^b \sin x dx = [-\cos x]_a^b = \cos a - \cos b.$$

(c) Se  $f(x)$  è una funzione derivabile e diversa da 0 si ha

$$D(\ln |f(x)|) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

e dunque

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = [\ln |f(x)|]_a^b.$$

Per esempio:

$$\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx = \int_0^{\pi/4} -\frac{D \cos x}{\cos x} dx = [-\ln(\cos x)]_0^{\pi/4} = \ln \sqrt{2},$$

$$\int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{D \ln x}{\ln x} dx = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \ln 2.$$

(d) Se  $f(x)$  è una funzione derivabile si ha

$$D \operatorname{arctg} f(x) = \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2}$$

e dunque

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{1 + [f(x)]^2} dx = \operatorname{arctg} f(b) - \operatorname{arctg} f(a).$$

Per esempio

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = [-\operatorname{arctg} \cos x]_0^\pi = \frac{\pi}{2}.$$

## ESERCIZI

**6.1.1** Sia  $f$  una funzione continua su  $[a, b]$  con  $f(x) \geq 0$  e  $\int_a^b f(x) dx = 0$ . Provare che  $f$  è identicamente nulla.

**6.1.2** Trovare le primitive delle funzioni

$$(a) \quad 2x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1; \quad (b) \quad x^{1/2} + x^{-1/3};$$

$$(c) \quad \frac{x}{1+x^2}; \quad (d) \quad \frac{2x}{(1+x^2)^2};$$

$$(e) \quad \operatorname{sen} x^3 \cdot 3x^2; \quad (f) \quad (x^3 + 4x)^4(3x^2 + 4);$$

$$(g) \quad \frac{5}{\sqrt{x}} + x\sqrt[3]{x^2}; \quad (h) \quad \frac{1}{x^2} \cdot \cos \frac{1}{x};$$

$$(i) \quad \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \ln^2 x}; \quad (l) \quad \operatorname{tg}^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(m) \quad \operatorname{sen} x \cos x; \quad (n) \quad \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x}}.$$

**6.1.3** Calcolare i seguenti integrali:

$$(a) \quad \int_1^2 (1+x)^{-3} dx; \quad (b) \quad \int_1^8 x^{-2} dx;$$

$$(c) \quad \int_{-1}^1 |x| dx; \quad (d) \quad \int_0^1 \frac{2x}{1+x^4} dx;$$

$$(e) \quad \int_1^4 \sqrt{x} dx; \quad (f) \quad \int_1^4 \frac{1-x}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(g) \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x} dx; \quad (h) \quad \int_0^{2/\sqrt{3}} \frac{1}{4 + 9x^2} dx;$$

$$(i) \quad \int_0^1 \frac{1 + \operatorname{sen} 2x}{\cos^2 x} dx.$$

**6.1.4** Calcolare i seguenti integrali dopo aver scritto la funzione integranda in forma opportuna:

$$(a) \quad \int_0^{-2} \frac{x^3 + x + 1}{x - 1} dx; \quad (b) \quad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{x - 1}{x + 1} dx;$$

$$(c) \quad \int_2^4 \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1} dx; \quad (d) \quad \int_1^2 \frac{x}{1 - \sqrt{x + 1}} dx.$$

**6.1.5** Sia  $n$  un intero positivo. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx.$$

**6.1.6** Provare che

$$\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-x) dx$$

e utilizzare il risultato per calcolare

$$\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

**6.1.7** Una curva, di equazione  $y = f(x)$ , ha la pendenza della tangente nel punto di ascissa  $x$  data da  $\frac{1}{1+x^2} + 2x$ . Scrivere l'equazione della curva, sapendo che passa per il punto  $(1,2)$ .

**6.1.8** Calcolare la media integrale delle seguenti funzioni sugli intervalli indicati:

$$f(x) = |\operatorname{sen} x| \quad \text{in} \quad [-\pi, \pi];$$

$$f(x) = \frac{4x-1}{2x^2-x} \quad \text{in} \quad [1,4];$$

$$f(x) = \frac{2x}{1+3x^4} \quad \text{in} \quad \left[ \frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right];$$

$$f(x) = \operatorname{sen}(\cos x) \cdot \operatorname{sen} x \quad \text{in} \quad [0, \pi].$$

**6.1.9** Un oggetto, inizialmente fermo, nell'istante  $t = 4$  s ha la velocità di 2 m/s. Calcolare il valore medio della velocità  $v(t)$ , nell'intervallo di tempo dato, supponendo che essa vari secondo la legge:

$$(a) \ v(t) = \frac{1}{2}t; \quad (b) \ v(t) = \sqrt{t}; \quad (c) \ v(t) = -\frac{1}{8}t^2 + t.$$

**6.1.10** Si decide di sospendere l'immissione di materiale inquinante in un lago quando si stima che esso ne contenga in sospensione 50 tonnellate.

Da questo momento, per sedimentazione, la quantità di materiale in sospensione inizia a diminuire al tasso di

$$P'(t) = -1,5t - 0,09t^2,$$

dove  $t$  è il tempo trascorso espresso in anni.

Calcolare quanto materiale ci sarà in sospensione a distanza di 5 anni.

**6.1.11** Si determini il baricentro della regione delimitata dalle curve  $f(x) = x^{1/4}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ .

## 6.2 Regole di integrazione

Sappiamo già che se  $f$  è una funzione continua su  $[a, b]$ , ogni primitiva di  $f$  è della forma  $\int_a^x f(t) dt + c$ ; ne segue

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_z^x f(t) dt + c \right] = f(x), \quad (6.5)$$

mentre, se  $f$  è di classe  $C^1$ ,

$$\int_a^x f'(t) dt = f(x) - f(a). \quad (6.6)$$

Utilizzando il simbolo di integrazione indefinita  $\int f(x) dx$  (che, come sappiamo dal Paragrafo 3.3, denota l'insieme di tutte le primitive di  $f$ ) possiamo riscrivere le (6.5) e (6.6) nella forma

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad \text{per ogni funzione continua in } [a, b],$$

$$\int \frac{d}{dx} f(x) dx = f(x) + c \quad \text{per ogni funzione derivabile in } [a, b].$$

L'operazione di integrazione indefinita può dunque essere interpretata, nel senso espresso dalle relazioni precedenti, come l'"inversa" dell'operazione di derivazione.

Dalla definizione stessa di primitiva segue che a ogni regola di derivazione corrisponde una regola di integrazione; per esempio, la linearità dell'operatore derivata si riflette nella linearità dell'integrale:

$$\int_a^x (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^x f(t) dt + \beta \int_a^x g(t) dt.$$

Le regole di derivazione dei prodotti e delle funzioni composte corrispondono, poi, a due fondamentali formule di trasformazione degli integrali, che sono di grandissima utilità nel loro calcolo esplicito: l'*integrazione per parti* e l'*integrazione per sostituzione*.

**Integrazione per parti.** Se  $f, g$  sono di classe  $C^1$  si ha

$$\frac{d}{dx} (f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x),$$

da cui

$$f'(x)g(x) = \frac{d}{dx} (f(x)g(x)) - f(x)g'(x);$$

dunque, per ogni coppia di punti  $u, v \in [a, b]$ , integrando i due membri dell'uguaglianza fra  $u$  e  $v$  otteniamo la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_u^v f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_u^v - \int_u^v f(x)g'(x) dx. \quad (6.7)$$

Con questa formula l'integrale a sinistra si trasforma nell'integrale a destra e viceversa: se sappiamo calcolare uno dei due, sapremo calcolare anche l'altro.



**Integrazione per sostituzione.** Se  $g$ ,  $\varphi$  sono funzioni derivabili si ha

$$\frac{d}{dx}g(\varphi(x)) = g'(\varphi(x))\varphi'(x);$$

dunque, data una funzione  $f$  continua, scegliendo

$$g(u) = \int_a^u f(t) dt$$

otteniamo  $g'(u) = f(u)$  e quindi

$$\frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt = \frac{d}{dx}g(\varphi(x)) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Di conseguenza, per ogni  $u, v \in [a, b]$  si ha, integrando fra  $u$  e  $v$ :

$$\begin{aligned} \int_u^v f(\varphi(x))\varphi'(x) dx &= \int_u^v \frac{d}{dx} \left( \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right) dx = \left[ \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right]_u^v \\ &= \int_a^{\varphi(v)} f(t) dt - \int_a^{\varphi(u)} f(t) dt. \end{aligned}$$

Si ottiene così la seguente formula di integrazione per sostituzione:

$$\int_u^v f(\varphi(x))\varphi'(x) dx = \int_{\varphi(u)}^{\varphi(v)} f(t) dt. \quad (6.8)$$

Il significato è il seguente: la variabile  $x$  dell'integrale di sinistra viene sostituita dalla variabile  $t$  nell'integrale di destra, mediante il cambiamento di variabile  $t = \varphi(x)$ ; le "lunghezze infinitesime"  $dx$  e  $dt$  sono legate dalla relazione  $dt = \varphi'(x) dx$ , la quale è coerente con il fatto che da  $t = \varphi(x)$  segue  $\frac{dt}{dx} = \varphi'(x)$ .

La formula di integrazione per sostituzione, dunque, trasforma semplicemente un integrale in un altro: sarà cura di chi la applica scegliere un cambiamento di variabili che semplifichi l'integrale da calcolare.

La relazione

$$dt = \varphi'(x) dx \quad (6.9)$$

può, a prima vista, sembrare misteriosa, in quanto sembra coinvolgere dei differenziali che nulla hanno a che vedere con il processo di integrazione. In realtà si tratta di un espediente estremamente utile, che giustifica alcune notazioni già introdotte.

La formula (6.8) si può anche leggere "al contrario": se  $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$  è invertibile, si ha per ogni  $p, q \in [a, b]$

$$\int_p^q f(t) dt = \int_{\varphi^{-1}(p)}^{\varphi^{-1}(q)} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

In realtà, però, non è affatto necessario che  $\varphi$  sia invertibile: se  $u_1, v_1, u_2, v_2$  sono punti di  $[c, d]$  tali che  $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = p$  e  $\varphi(v_1) = \varphi(v_2) = q$  (dunque la funzione  $\varphi$

non è iniettiva), si ha

$$\begin{aligned}\int_{u_1}^{v_1} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx &= \int_{\varphi(u_1)}^{\varphi(v_1)} f(t) dt = \int_p^q f(t) dt \\ &= \int_{\varphi(u_2)}^{\varphi(v_2)} f(t) dt = \int_{u_2}^{v_2} f(\varphi(x))\varphi'(x) dx,\end{aligned}$$

cosicché risulta

$$\int_p^q f(t) dt = \int_u^v f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$$

per ogni coppia di punti  $u, v$  di  $[c, d]$  tali che  $\varphi(u) = p, \varphi(v) = q$ .

**ESEMPI 6.5 (a)**  $\int xe^x dx$ . Assumendo nella (6.7)  $f(x) = x$  e  $g(x) = e^x$  si ha  $f'(x) = 1$  e  $g'(x) = e^x$  e quindi, integrando per parti

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = e^x(x-1) + c.$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\int x \operatorname{sen} x dx &= -x \cos x + \operatorname{sen} x + c, \\ \int x \cos x dx &= x \operatorname{sen} x + \cos x + c, \\ \int x^\alpha \ln x dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \left( \ln x - \frac{1}{\alpha+1} \right) + c \quad \text{se } \alpha \neq -1.\end{aligned}$$

Per  $\alpha = -1$  nel precedente integrale si ottiene

$$\int \frac{1}{x} \ln x dx = (\ln x)^2 - \int \ln x \frac{dx}{x} + c,$$

e quindi, riportando a primo membro l'integrale:

$$\int \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + c.$$

Allo stesso risultato si perviene più direttamente con la sostituzione  $t = \ln x$ .

**(b)**  $\int \arcsen x dx$ . Ponendo  $f(x) = \arcsen x, g(x) = x$  nella formula di integrazione per parti, si ha

$$\int \arcsen t dt = t \arcsen t - \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt;$$

usufruendo della sostituzione  $x = \varphi(t) = 1 - t^2$ , l'ultimo integrale diviene

$$\begin{aligned}\int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt &= -\frac{1}{2} \int \frac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi(t)}} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = -\sqrt{x} + c = \\ &= -\sqrt{1-t^2} + c.\end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\int \arcsen t \, dt = t \arcsen t + \sqrt{1-t^2} + c.$$

In modo analogo si calcola

$$\int \arctg t \, dt = t \arctg t - \frac{1}{2} \log(1+t^2) + c$$

(c)  $\int e^{\lambda x} \sen \mu x \, dx$ . In questo caso si integra ripetutamente per parti sino a ottenere un integrale uguale a quello da calcolare:

$$\begin{aligned} \int e^{\lambda x} \sen \mu x \, dx &= -\frac{1}{\mu} e^{\lambda x} \cos \mu x + \frac{\lambda}{\mu} \int e^{\lambda x} \cos \mu x \, dx = \\ &= -\frac{1}{\mu} e^{\lambda x} \cos \mu x + \frac{\lambda}{\mu^2} e^{\lambda x} \sen \mu x - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \int e^{\lambda x} \sen \mu x \, dx. \end{aligned}$$

Riportando a primo membro  $\int e^{\lambda x} \sen \mu x \, dx$ , si trova

$$\int e^{\lambda x} \sen \mu x \, dx = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2} e^{\lambda x} (\lambda \sen \mu x - \mu \cos \mu x) + c.$$

(d) Con la sostituzione  $u = ax + b$  si ottiene (se  $a \neq 0$ )

$$\int (ax + b)^\alpha \, dx = \frac{1}{a(\alpha + 1)} (ax + b)^{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + c,$$

$$\int \sen(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + c,$$

mentre con la sostituzione  $u = \cos x$  si ha

$$\int \tg x \, dx = -\ln |\cos x| + c,$$

e analogamente

$$\int \cotg x \, dx = \ln |\sen x| + c.$$

(e) Gli integrali

$$\int \cos^2 x \, dx, \quad \int \sen^2 x \, dx$$

si calcolano facilmente usando la sostituzione  $u = 2x$  e usufruendo delle formule trigonometriche  $2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$  e  $2 \sen^2 x = 1 - \cos 2x$ :

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x + \sen x \cos x) + c, \quad (6.10)$$

$$\int \sen^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sen x \cos x) + c;$$

in particolare si ha

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \pi.$$

(f) Con la sostituzione  $x = \cos t$  si può calcolare il seguente integrale

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} \, dx &= \int \sqrt{1-\cos^2 t} (-\sin t) \, dt = - \int \sin^2 t \, dt = \\ &= \frac{1}{2} [\sin t \cos t - t] + c = \frac{1}{2} [x\sqrt{1-x^2} - \arccos x] + c. \end{aligned}$$

Lo stesso risultato si ottiene con la sostituzione  $x = \sin t$  (perché?).

Analogamente le sostituzioni  $x = \sinh t$  e  $x = \cosh t$  consentono di calcolare

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2+1} \, dx &= \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{sett} \sinh x] + c, \\ \int \sqrt{x^2-1} \, dx &= \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2-1} - \operatorname{sett} \cosh x] + c. \end{aligned}$$

Con riferimento alla Figura 4.36 si ha, se  $x = \cosh t$ :

$$\text{area } AOP = \text{area } OHP - \int_1^x \sqrt{\xi^2-1} \, d\xi.$$

Dalla formula precedente si ricava allora che l'area del segmento iperbolico  $AOP$  è  $t/2$ .

(g) Si considerino gli integrali

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx,$$

ove  $m$  e  $n$  sono interi positivi.

Mediante due successive integrazioni per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \left[ -\frac{1}{m} \cos mx \sin nx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{m} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \\ &= \left[ \frac{n}{m^2} \sin mx \cos nx \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{n^2}{m^2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx. \end{aligned}$$

Dunque, se  $m \neq n$  si ha  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0$ , altrimenti (cfr. (e)) risulta  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi$ .

Analogamente si hanno le relazioni

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & \text{se } m \neq n, \\ \pi & \text{se } m = n, \end{cases} \\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx &= 0, \end{aligned}$$

le quali si dicono *relazioni di ortogonalità* delle funzioni trigonometriche.

(h)  $\int \frac{dx}{x^2 - 1}$ . In questo integrale, come in molti altri che coinvolgono funzioni razionali, è utile scomporre l'integrando in frazioni più semplici: si ha

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right),$$

e dunque

$$\int \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + c.$$

(i)  $\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$ . Osservando che

$$\int \frac{dx}{(1 + x^2)^2} = \int \frac{1 + x^2 - x^2}{(1 + x^2)^2} dx = \int \left( \frac{1}{1 + x^2} - \frac{x}{(1 + x^2)^2} \right) dx,$$

con una integrazione per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(1 + x^2)^2} &= \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + x^2} x - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1 + x^2} = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \frac{x}{1 + x^2} + c. \end{aligned}$$

(j)  $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ . In questo caso, come ogni volta in cui si ha a che fare con una *funzione razionale in seno e coseno*, ci si riduce all'integrale di una funzione razionale mediante la sostituzione

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Nel caso in esame abbiamo:

$$I = \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x + \cos x} = 2 \int \frac{1 + t^2}{2t + 1 - t^2} \frac{dt}{1 + t^2} = -2 \int \frac{dt}{(t - a)(t - b)},$$

ove  $a = 1 + \sqrt{2}$ ,  $b = 1 - \sqrt{2}$ ; procedendo come nell'Esempio (h) si ottiene

$$I = \frac{-2}{a - b} \int \left[ \frac{1}{t - a} - \frac{1}{t - b} \right] dt = \frac{2}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t - b}{t - a} \right| + c = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 + \sqrt{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 - \sqrt{2}} \right| + c.$$

(k) Mediante una integrazione per parti si ha ( $n$  è un intero positivo)

$$\int \operatorname{sen}^n x dx = -\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n - 1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x dx.$$

Il secondo membro si può porre nella forma

$$-\operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + (n - 1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x dx - (n - 1) \int \operatorname{sen}^n x dx,$$

dunque si ottiene la relazione ricorrente

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \operatorname{sen}^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx. \quad (6.11)$$

In modo analogo si trovano formule ricorrenti per il calcolo di  $\int \cos^n x \, dx$  e di  $\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x \, dx$ .

(1) Si consideri l'integrale

$$\int_a^b (b-x)^{m/2} (x-a)^{n/2} \, dx,$$

ove  $m, n$  sono interi positivi.

Mediante la sostituzione  $x = a \cos^2 \vartheta + b \operatorname{sen}^2 \vartheta$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_a^b (b-x)^{m/2} (x-a)^{n/2} \, dx &= \\ &= \int_0^{\pi/2} [b(1-\operatorname{sen}^2 \vartheta) - a \cos^2 \vartheta]^{m/2} [b \operatorname{sen}^2 \vartheta - a(1-\cos^2 \vartheta)]^{n/2} \cdot 2(b-a) \cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta \, d\vartheta = \\ &= 2(b-a)^{1+m/2+n/2} \int_0^{\pi/2} \cos^{m+1} \vartheta \operatorname{sen}^{n+1} \vartheta \, d\vartheta, \end{aligned}$$

e dunque ci si è ricondotti a un integrale del tipo (k).



**ESEMPI 6.6** Il Teorema 3.29, di integrazione per serie, può essere utilizzato per ottenere alcuni sviluppi in serie

(a) Integrando termine a termine fra 0 e  $x$  la serie geometrica di ragione  $-x^2$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots, |x| < 1 \quad (6.12)$$

si ottiene lo sviluppo in serie dell'arcotangente

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, |x| < 1. \quad (6.13)$$

(b) Ponendo nella (6.12)  $-x^2$  in luogo di  $x^2$  e integrando fra 0 e  $x$  si ottiene la serie, convergente per  $|x| < 1$ ,

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots,$$

già incontrata nel Paragrafo 2.1 (Formula (2.17)).

(c) Il teorema di integrazione per serie riesce utile quando si deve calcolare un integrale definito o indefinito della cui funzione integranda non si conosce la primitiva. Si consideri per esempio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx;$$

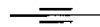
dallo sviluppo in serie di  $\operatorname{sen} x$  si ha

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} \left( 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} + \dots \right) dx,$$

siccome la serie integranda ha raggio di convergenza infinito, in virtù del teorema di integrazione per serie, risulta

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} x}{x} dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi^3}{2^3 \cdot 3 \cdot 3!} + \frac{\pi^5}{2^5 \cdot 5 \cdot 5!} - \dots + (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{2^{2n+1} (2n+1)(2n+1)!} + \dots$$

formula che può essere utilizzata per determinare un valore approssimato dell'integrale con precisione assegnata.



## ESERCIZI

**6.2.1** Servendosi della regola di integrazione per parti, calcolare i seguenti integrali definiti:

$$(a) \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x e^x dx; \quad (b) \int_0^1 x(x+2-e)e^x dx; \quad (c) \int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx;$$

$$(d) \int_1^e \ln^3 x dx; \quad (e) \int_0^{\pi} x(\cos x + e^{x/\pi}) dx; \quad (f) \int_0^1 \operatorname{arcsen} x dx.$$

**6.2.2** Servendosi della regola di integrazione per parti, calcolare i seguenti integrali indefiniti:

$$(a) \int x^3 e^x dx; \quad (b) \int \frac{x}{\cos^2 2x} dx; \quad (c) \int x^2 \operatorname{arcsen} x dx;$$

$$(d) \int \frac{\operatorname{arcsen} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad (e) \int x \cos^2 x dx; \quad (f) \int \ln(1-x) dx.$$

**6.2.3** Calcolare i seguenti integrali definiti mediante una opportuna sostituzione:

$$(a) \int_0^{1/4} (4x+2)^3 dx; \quad (b) \int_0^1 \frac{x^3}{x^8+1} dx \quad (x^4 = t);$$

$$(c) \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx \quad (e^x - 1 = t).$$

**6.2.4** Calcolare i seguenti integrali indefiniti mediante una opportuna sostituzione:

- (a)  $\int x^3 e^{-x^2} dx \quad (x^2 = t);$       (b)  $\int x \operatorname{sen} x^2 dx \quad (x^2 = t);$   
 (c)  $\int e^{\operatorname{sen} x} \cos x dx \quad (\operatorname{sen} x = t);$       (d)  $\int x \sqrt[3]{8+x} dx \quad (\sqrt[3]{8+x} = t);$   
 (e)  $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx \quad (x - 1/2 = t);$       (f)  $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx \quad (\sqrt{x} = t);$   
 (g)  $\int \frac{1}{x} \operatorname{sen}(\ln x) dx \quad (\ln x = t);$       (h)  $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \quad (\sqrt{x} = t).$

**6.2.5** Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

- (a)  $\int \frac{1}{1 + \sqrt{2x-1}} dx;$        $\int \operatorname{sen} \ln x dx;$        $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx;$   
 (b)  $\int x \operatorname{arctg} x^2 dx;$        $\int x \operatorname{arctg}^2 x dx;$        $\int \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} dx;$   
 (c)  $\int \cos^3 x dx;$        $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx;$        $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

**6.2.6** Calcolare i seguenti integrali definiti:

- (a)  $\int_2^7 \frac{1}{x + \sqrt{x+2}} dx;$        $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{a + b \cos x} dx \quad (0 < b < a);$        $\int_0^{\pi} \operatorname{senh}^2 x dx;$   
 (b)  $\int_1^e e^{e^x+x} dx;$        $\int_{\log 4}^{\log 9} \frac{1}{e^{2x} - 2e^x} dx;$        $\int_0^1 \operatorname{sen} \sqrt{x} dx;$   
 (c)  $\int_0^{\sqrt{2}} x^3 \sqrt{2-x^2} dx;$        $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen} 2x + \cos x}{1 + \operatorname{sen} x} dx.$

**6.2.7** Calcolare l'integrale indefinito delle seguenti funzioni:

- (a)  $\frac{1}{x(1-x)};$       (b)  $\frac{1}{x^2(1+x)};$       (c)  $\frac{x+3}{x^3+3x^2+2x};$   
 (d)  $\frac{x^2-3}{(x+1)(x-1)^2};$       (e)  $\frac{1}{x^3(1+x)^2};$       (f)  $\frac{x^3+4}{x^2+3x+2};$   
 (g)  $\frac{x^3+1}{x(x-1)^2};$       (h)  $\frac{1}{x^2-2x+2};$       (i)  $\frac{1}{x^2+3x+3};$



**6.2.8** Calcolare con opportune sostituzioni i seguenti integrali:

$$(a) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx; \quad (b) \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{1 - \cos x} dx;$$

$$(c) \int_{\pi/2}^{2\pi/3} \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x} dx; \quad (d) \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} dx.$$

**6.2.9** Calcolare l'area della regione delimitata dall'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con un errore minore di  $10^{-3}$

**6.2.10** Provare che se  $f$  è integrabile su  $[a, b]$  allora

$$\int_a^x \left[ \int_a^t f(s) ds \right] dt = \int_a^x (x - s) f(s) ds \quad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

**6.2.11** Utilizzando il teorema di integrazione per serie, calcolare

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx \quad \text{e} \quad \int_0^{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} x^2 dx$$

con un errore minore di  $10^{-3}$ .

**6.2.12** Provare che

$$\int_0^x e^{-t^n} dt = n! e^{-x} \left[ e^x - \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \right].$$

**6.2.13** Calcolare la media integrale delle seguenti funzioni sugli intervalli indicati

$$(a) \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad \text{in } [0, 1]; \quad (b) 5 \operatorname{sen} x + 4 \cos x \quad \text{in } [0, \pi/2];$$

$$(c) \operatorname{sen}^6 \frac{x}{2} \quad \text{in } [0, \pi]; \quad (d) (1 + x) \operatorname{sen} \frac{x}{2} \quad \text{in } [0, \pi].$$

**6.2.14** La grandezza  $F_e = \left( \frac{1}{T} \int_0^T [f(t)]^2 dt \right)^{1/2}$  si dice *valore efficace* di  $f(t)$  sull'intervallo  $[0, T]$ . Data la funzione  $f(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$  periodica di periodo  $T = 2\pi/\omega$ , calcolare il suo valore efficace su un periodo. Calcolare inoltre  $F_m = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)| dt$  e determinare il *fattore di cresta*  $F_0/F_e$  e il *fattore di forma*  $F_e/F_m$ . Quando valgono  $F_m$  e  $F_0$  se  $F_e = 220$ ?

**6.2.15** Se  $f$  è una funzione integrabile su ogni intervallo  $[a, b]$  e risulta

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{per ogni } x, y$$

dimostrare che  $f$  è una *funzione lineare*, cioè  $f(x) = cx$  con  $c = f(1)$ .

[Integrare la relazione  $f(t + y) = f(t) + f(y)$  rispetto a  $t$  su  $[0, x]$ , scoprendo così che  $xf(y) = yf(x)$ ].

**6.2.16** Si supponga che i freni di un'automobile producano una decelerazione costante di  $k \text{ m/s}^2$ . Si trovi quale valore deve avere  $k$  perché un'automobile che viaggia a  $90 \text{ km/h}$  si arresti a una distanza di  $30 \text{ m}$  dal punto in cui vengono azionati i freni. Con lo stesso  $k$  si trovi quale distanza la stessa automobile percorrerebbe prima di arrestarsi, se viaggiasse a  $45 \text{ km/h}$  e a  $135 \text{ km/h}$ .

**6.2.17** Si trovi un polinomio  $P(x)$  di secondo grado tale che sia  $P(0) = 1$ ,  $P'(0) = 0$  e tale che l'integrale

$$\int \frac{P(x)dx}{x^3(x-1)^2}$$

sia una funzione razionale.

**6.2.18** Una reazione chimica spesso è il risultato di una interazione fra due tipi di molecole, la specie  $A$  e la specie  $B$ , che producono un nuovo composto. La velocità di reazione dipende dalle concentrazioni relative. Se, al tempo  $t = 0$ ,  $a$  è la concentrazione della sostanza  $A$  e  $b$  quella della sostanza  $B$  e se  $x$  è la concentrazione del composto ottenuto dalla reazione, allora si può scrivere l'equazione (*cinetica del primo ordine*)

$$\frac{dx}{dt} = k(a-x)(b-x)$$

ove  $k$  è una costante positiva. Si determini una relazione tra  $x$  e  $t$ , distinguendo i casi  $a = b$  e  $a \neq b$ .

### 6.3 Curve rettificabili

Una *curva* in  $\mathbb{R}^2$  è un insieme  $\Gamma$  della forma

$$\Gamma = \{(x, y) : x = \alpha(t), y = \beta(t), t \in [a, b]\},$$

dove  $\alpha, \beta$  sono funzioni continue definite in un intervallo  $[a, b]$ . Sono curve, in particolare, i grafici delle funzioni continue

$$\{(x, y) : y = f(x), x \in [a, b]\};$$

tali curve si dicono *cartesiane*.

Le equazioni

$$x = \alpha(t), \quad y = \beta(t), \quad t \in [a, b],$$

forniscono una *rappresentazione parametrica* della curva  $\Gamma$ . Essa non è l'unica possibile: se  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  è una funzione continua e bigettiva, posto  $t = \varphi(\tau)$  la curva  $\Gamma$  è rappresentata anche dalle equazioni

$$x = \bar{\alpha}(\tau) = \alpha(\varphi(\tau)), \quad y = \bar{\beta}(\tau) = \beta(\varphi(\tau)), \quad \tau \in [c, d].$$

Per essere precisi, sarebbe opportuno distinguere fra la nozione di curva, intesa come coppia di funzioni  $\alpha(t), \beta(t)$ , e quella di *sostegno della curva*, inteso come luogo dei punti  $(\alpha(t), \beta(t)), t \in [a, b]$ .

Per esempio, le funzioni

$$\alpha(t) = R \cos t, \quad \beta(t) = R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

e

$$u(t) = R \sin t, \quad v \dots (t) = R \cos t, \quad t \in [-\pi, \pi]$$

sono due possibili parametrizzazioni della circonferenza di centro l'origine e raggio  $R$ . Va osservato che le proprietà geometriche delle curve sono in effetti proprietà del loro sostegno e, in quanto tali, devono essere invarianti rispetto a cambiamenti di parametro (almeno sotto certe ipotesi).

Le curve intervengono in una grande varietà di situazioni. Un pianeta nella sua rivoluzione attorno al Sole descrive una traiettoria che, in prima approssimazione, possiamo ritenere piana e di forma ellittica; una lampadina, fissata sulla superficie laterale di uno yo-yo, descrive una curva, il cui aspetto cambia radicalmente a seconda della distanza della lampadina dal centro. In questi due casi le curve appaiono parametrizzate rispetto al tempo: per ogni istante  $t$  è individuato un punto della curva. Invece il profilo di un oggetto, osservato da una certa distanza, è una curva piana, ma in questo caso non vi è più alcun riferimento al tempo; sembra piuttosto ragionevole rappresentare tali curve nella forma  $f(x, y) = 0$ , come le curve di quota costante nelle carte geografiche. Vedremo però nel Capitolo 9 che anche le curve di questo tipo, sotto ragionevoli ipotesi sulla  $f$ , sono rappresentabili in forma parametrica.

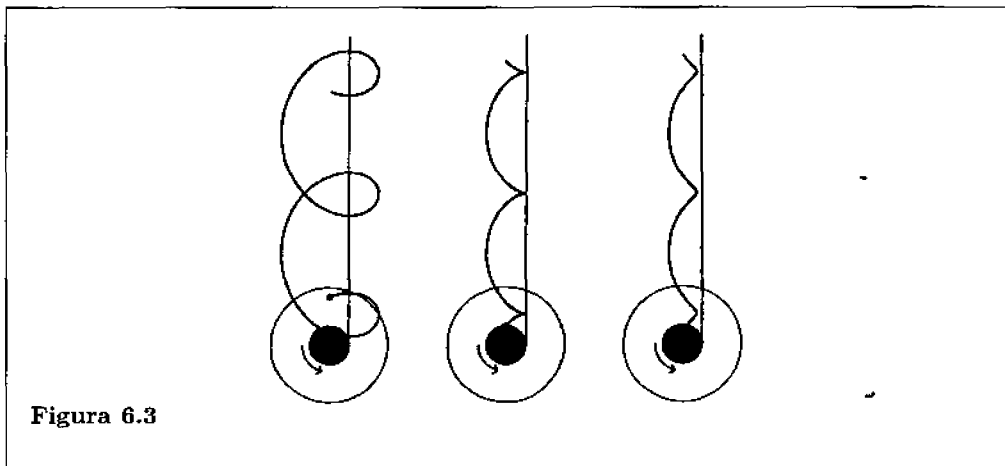


Figura 6.3

### LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Vediamo come e quando è possibile attribuire una lunghezza a una curva piana  $\Gamma$ . Se essa è cartesiana,

$$\Gamma = \{(x, y) : y = f(x), x \in [a, b]\},$$

consideriamo la classe  $P$  delle *poligonalì inscritte* in  $\Gamma$ , vale a dire delle spezzate con vertici su  $\Gamma$ . Se  $p$  è una di queste poligonalì, di vertici  $(x_i, f(x_i))$  ove  $a = x_0 < x_1 <$

...  $x_n = b$ , la sua lunghezza è

$$l(p) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Se esiste finito

$$L = \sup_{p \in P} l(p),$$

la curva  $\Gamma$  si dice *rettificabile* e il numero  $L$  si chiama *lunghezza* di  $\Gamma$ .

**PROPOSIZIONE 6.7** Se  $f \in C^1 [a, b]$  allora la curva  $\Gamma$  di equazione  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$  è rettificabile e la sua lunghezza è data da

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (6.14)$$

**DIMOSTRAZIONE** Se  $p$  è una qualunque poligonale inscritta in  $\Gamma$  e  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  sono le ascisse dei suoi vertici, per il teorema del valor medio si ha  $f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ , ove  $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ . Se si indicano con  $m_i$  e  $M_i$  il minimo e il massimo di  $f'(x)$  in  $[x_{i-1}, x_i]$  si avrà  $m_i \leq f'(\xi_i) \leq M_i$  e dunque

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + m_i^2} &\leq l(p) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1 + M_i^2}, \end{aligned}$$

vale a dire la lunghezza  $l(p)$  della poligonale è compresa fra la somma inferiore e la somma superiore della funzione continua  $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ . Poiché tali somme, quando si infittisce la partizione, "tendono" al numero  $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$  il risultato (6.14) è del tutto plausibile. In effetti per una dimostrazione rigorosa occorre maggior attenzione e un po' di pignoleria. I dettagli sono spiegati nell'Esercizio 6.3.6.  $\square$

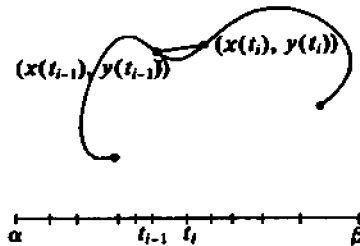


Figura 6.4 Curva piana in rappresentazione parametrica.

**ESEMPIO 6.8** Si calcoli la lunghezza dell'arco di parabola  $y = \frac{1}{2}x^2$  che corrisponde all'intervallo  $0 \leq x \leq b$ :

$$L = \int_0^b \sqrt{1+x^2} dx.$$

Con la sostituzione  $x = \sinh t$  (Esempio 6.5 (f)) si ha

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\operatorname{sech}^{-1} b} \cosh^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\operatorname{sech}^{-1} b} [1 + \cosh 2t] dt = \\ &= \frac{1}{2} [t + \sinh t \cosh t]_0^{\operatorname{sech}^{-1} b} = \frac{1}{2} [\ln(b + \sqrt{1+b^2}) + b\sqrt{1+b^2}]. \end{aligned}$$

Se la curva  $\Gamma$  è data in forma parametrica,

$$\Gamma = \{(x, y) : x = \alpha(t), y = \beta(t), t \in [a, b]\}$$

come  $\alpha, \beta \in C^1[a, b]$ , la lunghezza di una poligonale  $p$  inscritta in  $\Gamma$  è data da

$$l(p) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))^2 + (\beta(t_i) - \beta(t_{i-1}))^2},$$

ove  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$  è una partizione  $\sigma$  di  $[a, b]$ . Nuovamente, dal teorema del valor medio si vede che  $l(p)$  è un valore compreso fra la somma inferiore e la somma superiore, relative a  $\sigma$ , della funzione continua  $\sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2}$ ; con un artificio non dissimile a quello occorrente nel caso cartesiano si dimostra che la lunghezza  $L$  di  $\Gamma$  è

$$L = \int_a^b \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2} dt. \quad (6.15)$$

Si noti che la (6.15) è indipendente dalla rappresentazione parametrica che si usa per descrivere  $\Gamma$ : se infatti  $\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b]$  è una funzione biunivoca di classe  $C^1$ , allora si ha, con il cambiamento di variabili  $t = \varphi(\tau)$ ,

$$L = \int_a^b \sqrt{\alpha'(t)^2 + \beta'(t)^2} dt = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} \sqrt{\alpha'(\varphi(\tau))^2 + \beta'(\varphi(\tau))^2} \varphi'(\tau) d\tau.$$

Se  $\varphi$  è crescente, allora  $\varphi^{-1}(a) = c$ ,  $\varphi^{-1}(b) = d$  e  $\varphi'(\tau) > 0$ , da cui

$$\begin{aligned} L &= \int_c^d \sqrt{(\alpha'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau))^2 + (\beta'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau))^2} d\tau = \\ &= \int_c^d \sqrt{\left[\frac{d}{d\tau}(\alpha(\varphi(\tau)))\right]^2 + \left[\frac{d}{d\tau}(\beta(\varphi(\tau)))\right]^2} d\tau, \end{aligned}$$

se invece  $\varphi$  è decrescente, allora  $\varphi^{-1}(a) = d$ ,  $\varphi^{-1}(b) = c$  e  $\varphi'(\tau) < 0$ , e si ritrova lo stesso risultato:

$$\begin{aligned} L &= \int_d^c [-\sqrt{(\alpha'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau))^2 + (\beta'(\varphi(\tau))\varphi'(\tau))^2}] d\tau = \\ &= \int_c^d \sqrt{\left[\frac{d}{d\tau}(\alpha(\varphi(\tau)))\right]^2 + \left[\frac{d}{d\tau}(\beta(\varphi(\tau)))\right]^2} d\tau. \end{aligned}$$

**ESEMPI 6.9 (a)** La curva di equazioni parametriche

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

è una *ellisse* di semiassi  $a$  e  $b$ ; la sua lunghezza è data da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} dt. \quad (6.16)$$

ove  $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$  si chiama *eccentricità* dell'ellisse. L'integrale (6.16) viene detto *integrale ellittico* e non può essere espresso in forma chiusa. L'integrale può essere valutato espandendo la funzione integranda in una serie opportuna e integrando termine a termine.

Se  $a = b$  l'ellisse è un cerchio e si ha  $L = 2\pi a$ .

**(b)** La curva di equazione

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t$$

viene detta *astroide*. In questo caso si ha

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 = 9a^2 \sin^2 t \cos^2 t$$

che è un quadrato perfetto. Se  $0 < T \leq \frac{\pi}{2}$  si avrà allora

$$L(T) = 3a \int_0^T \sin t \cos t dt = \frac{3}{2} a \sin^2 T. \quad (6.17)$$

Per  $T = \pi/2$  si ottiene un quarto della lunghezza totale che quindi è  $6a$ , un poco inferiore alla lunghezza della circonferenza circoscritta.

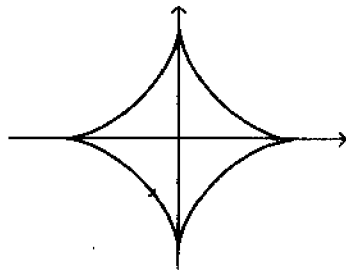


Figura 6.5 Astroide.



**OSSERVAZIONE 6.10** Se  $\gamma$  è un valore intermedio fra  $\alpha$  e  $\beta$  la formula (6.15) si può scrivere

$$L = \int_a^b \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} dt = \int_a^\gamma \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} dt + \int_\gamma^b \sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2} dt,$$

e gli integrali a secondo membro rappresentano le lunghezze dei due tratti in cui la curva è suddivisa dal punto che corrisponde al valore  $t = c$  del parametro. Dunque la lunghezza di una curva è la somma delle lunghezze delle sue parti; ne segue che la formula (6.15) risulta applicabile anche quando le funzioni  $\alpha'(t)$  e  $\beta'(t)$  sono semplicemente continue a tratti, come avviene quando la curva presenta degli spigoli.

Fra tutte le parametrizzazioni possibili di una curva  $\Gamma$  ce n'è una privilegiata: la possibilità di misurare la lunghezza della curva consente di definire un parametro intrinseco con il quale rappresentare le curve rettificabili. Sia  $\Gamma$  una curva definita dalle equazioni

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [a, b],$$

con  $x, y$  di classe  $C^1$ . Indicando con  $s(t)$  la lunghezza del tratto di curva compreso fra il punto  $P_0$ , corrispondente al valore  $a$  del parametro, e un generico punto  $P = (x(t), y(t))$ , si ha

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(\tau)^2 + y'(\tau)^2} d\tau, \quad (6.18)$$

da cui

$$s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Possiamo riscrivere questa uguaglianza, usufruendo della notazione simbolica per i differenziali  $ds = s'(t) dt$ , come

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Se interpretiamo il parametro  $t$  come tempo e la coppia  $(x(t), y(t))$  come le coordinate di un punto che si muove,  $s'(t)$  rappresenta la "velocità" del punto. Se  $x'(t)^2 + y'(t)^2 \neq 0$ , allora  $s'(t) > 0$ ; quindi,  $s(t)$  è invertibile e lo stesso parametro  $s$  può essere usato per descrivere la curva: detta  $t(s)$  la funzione inversa di  $s(t)$ , si ha la rappresentazione

$$x = \bar{x}(s) = x(t(s)), \quad y = \bar{y}(s) = y(t(s)), \quad s \in [0, L],$$

ove  $L$  è la lunghezza di  $\Gamma$ . Con tale scelta del parametro, molte equazioni si semplificano. Si ha

$$\frac{d\bar{x}}{ds} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad \frac{d\bar{y}}{ds} = \frac{dy}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

e in particolare

$$\left(\frac{d\bar{x}}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{ds}\right)^2 = 1,$$

relazione che caratterizza il parametro  $s$  come *lunghezza d'arco*: se la velocità è unitaria, all'"istante"  $s$  avremo percorso un tratto di curva di lunghezza  $s$ .

## VERSORE TANGENTE

Per analizzare le proprietà geometriche di una curva piana  $\Gamma$ , conviene introdurre una notazione vettoriale: indicheremo con  $\gamma(t)$  la coppia di funzioni  $\gamma_1(t)$ ,  $\gamma_2(t)$ , definite su un intervallo  $I$ , e considereremo, quindi, rappresentazioni parametriche della forma

$$\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)),$$

con  $\gamma_1, \gamma_2$  funzioni regolari tali che  $\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2 \neq 0$ , ovvero

$$\gamma'(t) \neq 0, \quad (6.19)$$

ove  $\gamma'(t)$  è il vettore di componenti  $(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t))$ . Queste curve si dicono *regolari*.

La condizione (6.19) è invariante rispetto a cambiamenti di parametro *ammissibili*: diremo ammissibili quei cambiamenti di parametro dati da una funzione regolare e bigettiva  $\varphi : J \rightarrow I$ , definita su un altro intervallo  $J$ , e tale che  $\varphi'(t) \neq 0$  per ogni  $t \in J$ . Se poi si vuole mantenere il verso di percorrenza lungo la curva, occorrerà richiedere che  $\varphi'(t) > 0$ .

Consideriamo il vettore  $\gamma'(t)$ : poiché

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h},$$

la direzione di  $\gamma'(t)$  è il "limite" delle direzioni delle corde passanti per i punti  $\gamma(t)$  e  $\gamma(t+h)$  (Figura 6.6), ed è dunque tangente alla curva  $\gamma$  in  $(\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ .

La *retta tangente* a  $\gamma$  in tale punto ha, pertanto, equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x - \gamma_1(t) &= \gamma_1'(t) \cdot \tau \\ y - \gamma_2(t) &= \gamma_2'(t) \cdot \tau, \quad \tau \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

ovvero, in coordinate cartesiane,

$$(x - \gamma_1(t))\gamma_2'(t) - (y - \gamma_2(t))\gamma_1'(t) = 0. \quad (6.20)$$

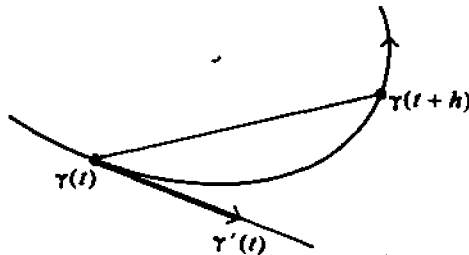


Figura 6.6

La quantità

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{[\gamma_1'(t)]^2 + [\gamma_2'(t)]^2}$$



si dice *velocità* di  $\gamma$  all'istante  $t$  e, a causa della condizione (6.19), è sempre diversa da zero. Ha senso, quindi, considerare il vettore, di lunghezza unitaria,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \quad (6.21)$$

che si dice *versore tangente* alla curva  $\gamma$  nel punto  $\gamma(t)$ .

**OSSERVAZIONE 6.11** Studiamo le intersezioni fra la generica retta  $ax + by + c = 0$  e la curva  $\gamma$ , vale a dire determiniamo le soluzioni dell'equazione  $g(t) = 0$ , ove

$$g(t) = a\gamma_1(t) + b\gamma_2(t) + c.$$

Se risulta  $g(t_0) = 0$  allora la retta avrà in comune con  $\gamma$  il punto  $P_0 = (\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0))$ . Poiché la retta tangente a  $\gamma$  in tale punto ha i coefficienti  $a, b$  proporzionali a  $-\gamma_2'(t_0), \gamma_1'(t_0)$ , ne deduciamo che essa è la sola retta per la quale non solo  $g(t_0) = 0$  ma anche

$$g'(t_0) = a\gamma_1'(t_0) + b\gamma_2'(t_0) = 0,$$

il che si può interpretare dicendo che la retta tangente ha un *contatto di ordine* (almeno) *due* con la curva nel punto di tangenza.

**OSSERVAZIONE 6.12** Se la curva è riferita al parametro lunghezza d'arco  $s$ , allora come si è visto

$$\|\gamma'(s)\|^2 = \left(\frac{d\gamma_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{d\gamma_2}{ds}\right)^2 = 1, \quad (6.22)$$

e quindi  $\gamma' = \mathbf{T}$ .

Il parametro lunghezza d'arco si riesce a determinare esplicitamente in pochi casi, ma la sua importanza sta nel fatto che, se le curve sono riferite a esso, la velocità è unitaria in ogni punto e così molte formule si semplificano. Nel seguito indicheremo con  $\alpha$  le curve riferite al parametro  $s$  lunghezza d'arco. Per esempio, la circonferenza di raggio  $R$ :

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

può essere posta nella forma

$$\alpha(s) = \left(R \cos \frac{s}{R}, R \sin \frac{s}{R}\right), \quad 0 \leq s \leq 2\pi R.$$

**OSSERVAZIONE 6.13** Richiamiamo definizione e proprietà del *prodotto scalare* fra vettori. Se  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  il loro prodotto scalare è definito da

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Per ogni vettore  $\mathbf{u}$  la grandezza  $[\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}]^{1/2}$  viene detta *norma* e indicata con  $\|\mathbf{u}\|$ . Si notino le proprietà seguenti.

(a)  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos \theta$ , ove  $\theta$  è l'angolo formato dai vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ . In particolare  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$  e  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$  se e solo se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono perpendicolari<sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup>Un vettore di lunghezza zero è perpendicolare a ogni altro.

(b) Se  $u_1, u_2, v_1, v_2$  sono funzioni derivabili di  $t$  allora

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v}' \cdot \mathbf{u}$$

ove  $\mathbf{u}' = (u_1', u_2')$ ,  $\mathbf{v}' = (v_1', v_2')$ . Si ha anche

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2 = 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}'. \quad (6.23)$$

(c) Se  $\|\mathbf{u}\| = 1$  (cioè  $\mathbf{u}$  è un *versore*) e  $u_1, u_2$  sono funzioni derivabili di  $t$  allora

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0 \quad \text{per ogni } t,$$

cioè  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{u}'$  sono fra loro perpendicolari per ogni  $t$ , come segue immediatamente dalla (6.23), essendo  $\|\mathbf{u}\| = \text{costante}$ .

Il versore  $\mathbf{T}$  tangente a una curva  $\gamma$  verifica dunque

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = 0,$$

e dunque  $\mathbf{T}'$  è un vettore perpendicolare a  $\mathbf{T}$  (eventualmente di lunghezza nulla)<sup>(2)</sup>. Siccome  $\|\mathbf{T}\| = 1$ , il vettore  $\mathbf{T}'$  misura la velocità con cui il vettore  $\mathbf{T}$  ruota; più lungo è  $\mathbf{T}'$  più rapidamente  $\mathbf{T}$  muta direzione, cioè – per così dire – più “curva” è  $\gamma$ .

## CURVATURA E RETTA NORMALE

Data una curva piana si consideri il suo versore tangente  $\mathbf{T}$  in un punto  $t$ ; il vettore unitario che si ottiene ruotando  $\mathbf{T}$  di un angolo retto nella direzione antioraria viene detto *versore normale* e indicato con  $\mathbf{N}$  (Figura 6.7):

$$\mathbf{N}(t) = \frac{(-\gamma_2'(t), \gamma_1'(t))}{\|\gamma'(t)\|}.$$

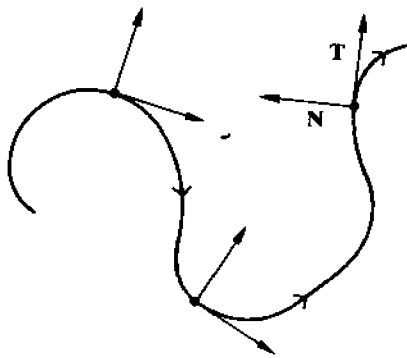


Figura 6.7 Versore tangente e versore normale.

<sup>(2)</sup>Anche nel seguito scriveremo sovente  $\mathbf{T}$  e  $\mathbf{T}'$  in luogo di  $\mathbf{T}(t)$ ,  $\mathbf{T}'(t)$ .

L'equazione della retta normale a  $\gamma$  nel punto  $\gamma(t)$  è, dunque,

$$(x - \gamma_1(t))\gamma'_1(t) + (y - \gamma_2(t))\gamma'_2(t) = 0.$$

Se la curva  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  è riferita al parametro lunghezza d'arco si ha

$$\mathbf{T}(s) = (x'(s), y'(s)), \quad \mathbf{N}(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

Poiché, come abbiamo appena constatato,  $\mathbf{T}'$  è sempre perpendicolare a  $\mathbf{T}$ , vi è un numero  $k(s)$  tale che

$$\mathbf{T}'(s) = k(s)\mathbf{N}(s); \tag{6.24}$$

tale numero  $k(s)$  viene detto *curvatura* di  $\alpha$  nel punto  $\alpha(s)$ .

Si noti che prendendo le norme nella (6.24) si ottiene

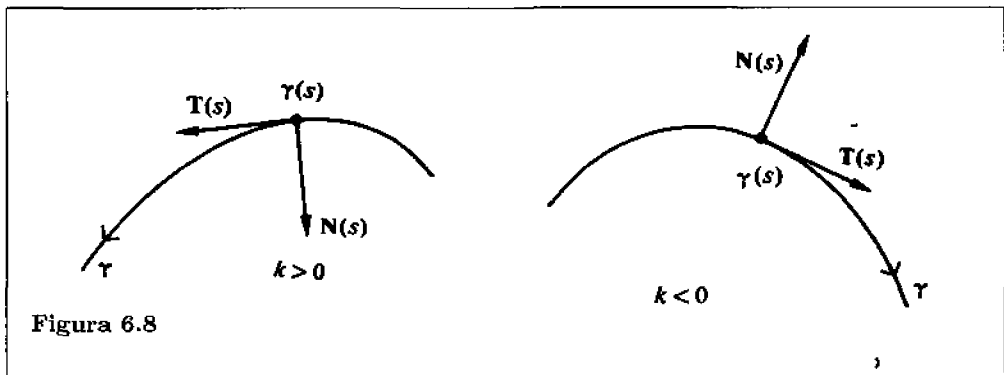
$$k(s) = \pm \|\mathbf{T}'(s)\|. \tag{6.25}$$

Moltiplicando la (6.24) scalarmente per  $\mathbf{N}$  e tenendo presente che  $\mathbf{T}' = (x'', y'')$  otteniamo

$$k = x'y'' - x''y', \tag{6.26}$$

in cui abbiamo ommesso la dipendenza da  $s$ .

La curvatura  $k(s)$  è, dunque, una funzione regolare di  $s$  ed è positiva se  $\mathbf{T}$  al crescere di  $s$  ruota verso  $\mathbf{N}$ , negativa in caso contrario (Figura 6.8).



Poiché  $\mathbf{N}'$  è perpendicolare a  $\mathbf{N}$  avremo  $\mathbf{N}' = \lambda\mathbf{T}$  per un certo numero  $\lambda$  (dipendente da  $s$ ) ma, derivando la relazione  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$ , otteniamo  $\mathbf{T}' \cdot \mathbf{N} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{N}' = 0$ . Sostituendo i valori di  $\mathbf{T}'$  e di  $\mathbf{N}'$  ricaviamo  $k\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} + \lambda\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 0$ , cioè  $k + \lambda = 0$ .

Abbiamo, così ottenuto la formula

$$\mathbf{N}' = -k\mathbf{T}, \tag{6.27}$$

che, assieme alla (6.24), cioè

$$\mathbf{T}' = k\mathbf{N} \tag{6.28}$$

costituisce le *formule di Serret-Frenet*.

## CERCHIO OSCULATORE

Vediamo ora una caratterizzazione della curvatura che ha notevole interesse geometrico. Imponiamo che un generico cerchio di centro  $(a,b) = \mathbf{u}$  intersechi la curva  $\alpha(s)$  in corrispondenza del valore  $s_0$  del parametro: scrivendo l'equazione del cerchio nella forma  $\|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|^2 = R^2$ , dovremo scegliere  $R$  in modo che in  $s_0$  risulti

$$\|\alpha(s_0) - \mathbf{u}\|^2 - R^2 = 0;$$

ciò significa che la funzione

$$g(s) = \|\alpha(s) - \mathbf{u}\|^2 - R^2 = (\alpha(s) - \mathbf{u}) \cdot (\alpha(s) - \mathbf{u}) - R^2$$

si annulla in  $s_0$ .

In analogia con quanto fatto nell'Osservazione 6.11, studiamo ora l'annullarsi in  $s_0$  delle derivate di  $g(s)$ . Ricordando che  $\alpha' = \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ ,  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{N} = 0$ , abbiamo

$$\frac{1}{2}g'(s) = (\alpha - \mathbf{u}) \cdot \alpha' = (\alpha - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T},$$

$$\frac{1}{2}g''(s) = \alpha' \cdot \mathbf{T} + (\alpha - \mathbf{u}) \cdot \mathbf{T}' = 1 + (\alpha - \mathbf{u}) \cdot k\mathbf{N},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}g'''(s) &= \alpha' \cdot k\mathbf{N} + (\alpha - \mathbf{u}) \cdot k'\mathbf{N} + (\alpha - \mathbf{u}) \cdot k\mathbf{N}' = \\ &= (\alpha - \mathbf{u}) \cdot k'\mathbf{N} - (\alpha - \mathbf{u}) \cdot k^2\mathbf{T}. \end{aligned}$$

Da queste formule seguono allora facilmente i seguenti fatti.

(a)  $g'(s_0) = 0$  se e solo se  $s_0$  il vettore  $\alpha - \mathbf{u}$  è ortogonale a  $\mathbf{T}$ , vale a dire il centro del cerchio sta sulla retta normale alla curva in  $\alpha(s_0)$ . Diremo in questo caso che il cerchio ha ordine di contatto (almeno) due con la curva  $\alpha$  in  $s_0$ .

(b)  $g'(s_0) = g''(s_0) = 0$  se e solo se in  $s_0$  si ha  $k \neq 0$  e  $\mathbf{u} = \alpha + \frac{1}{k}\mathbf{N}$ , dunque se  $k(s_0) \neq 0$  vi è un unico cerchio che ha un contatto di ordine (almeno) uguale a tre; il suo centro si trova sulla normale a distanza  $\frac{1}{|k|}$  dal punto  $\alpha(s_0)$ . Tale cerchio si chiama *cerchio osculatore* di  $\alpha$  nel punto  $s_0$ ; in coordinate il centro  $(a,b)$  del cerchio osculatore nel punto  $\alpha(s_0) = (x(s_0), y(s_0))$ ,  $= (x,y)$  è dato da

$$a = x - \frac{y'}{k}, \quad b = y + \frac{x'}{k}; \quad (6.29)$$

il suo raggio

$$\varrho = \frac{1}{|k|} \quad (6.30)$$

viene detto *raggio di curvatura* della curva  $\alpha$  nel punto  $\alpha(s_0)$ .

(c) Il cerchio osculatore nel punto  $s_0$  ha un contatto di ordine (almeno) quattro (cioè  $g(s_0) = g'(s_0) = g''(s_0) = g'''(s_0) = 0$ ) se e solo se  $k'(s_0) = 0$ . I punti in cui ciò accade si dicono *vertici* della curva  $\alpha$ . I vertici "ordinari" (nei quali l'ordine di contatto è esattamente quattro) corrispondono a punti di massimo o di minimo della curvatura: tale, per esempio, è il caso della ellisse di equazione  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  (Figura 6.9) nelle sue

quattro intersezioni con gli assi. Si può dimostrare che *ogni curva chiusa ha almeno quattro vertici*.

(d) Nei punti in cui  $k = 0$  non esiste cerchio osculatore alla curva  $\alpha$  (si può anche dire che tale cerchio ha raggio infinito; degenera, dunque, in una retta). Tali punti si dicono *flessi* della curva  $\alpha$ ; si verifica facilmente che in un flesso la curva ha ordine di contatto almeno uguale a tre con la retta tangente in quel punto. Nei flessi "ordinari", nei quali l'ordine di contatto con la tangente è esattamente uguale a tre, la curva attraversa la retta tangente.

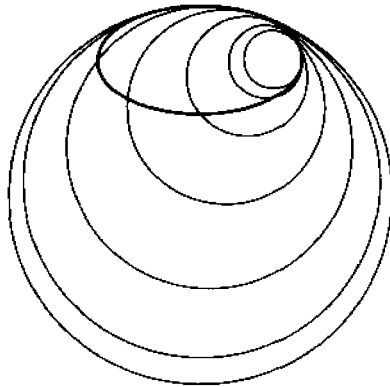


Figura 6.9 Cerchi osculatori dell'ellisse.

Tutte le considerazioni precedentemente svolte si riferiscono a una curva  $\alpha(s)$  in funzione del parametro lunghezza d'arco, ma è piuttosto facile estenderle a una curva generica  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ . Abbiamo, in tal caso,

$$\mathbf{T}(t) = \left( \frac{x'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{1/2}}, \frac{y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{1/2}} \right),$$

$$\mathbf{N}(t) = \left( \frac{-y'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{1/2}}, \frac{x'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{1/2}} \right).$$

Se  $s = s(t)$  è il cambiamento di parametro (6.18) avremo che  $\alpha = \gamma \circ s^{-1}$  è una curva a velocità unitaria e  $\gamma = \alpha \circ s$ . Otteniamo dunque

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= \alpha'(s(t))s'(t) = \mathbf{T}(t)s'(t) \\ \gamma''(t) &= \alpha''(s(t))[s'(t)]^2 + \alpha'(s(t))s''(t) \\ &= k\mathbf{N}(t)[s'(t)]^2 + \mathbf{T}(t)s''(t). \end{aligned}$$

Moltiplicando scalarmente per  $\mathbf{N}(t)$  si ha

$$\gamma''(t) \cdot \mathbf{N}(t) = k(t)[s'(t)]^2,$$

da cui, sottintendendo la dipendenza da  $t$ ,

$$k = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \quad (6.31)$$

Le coordinate del centro del cerchio osculatore divengono allora

$$a = x - \frac{y'}{k\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \quad b = y + \frac{x'}{k\sqrt{x'^2 + y'^2}}. \quad (6.32)$$

**OSSERVAZIONE 6.14** Se la curva  $\gamma$  è il grafico di una funzione  $y = f(x)$ , usando  $x$  come parametro, la (6.31) diviene

$$k = \frac{f''}{(1 + (f')^2)^{3/2}}. \quad (6.33)$$

Si noti che  $k > 0$  nei punti in cui  $f$  è convessa,  $k < 0$  nei punti in cui è concava.

**OSSERVAZIONE 6.15** Il cerchio osculatore di una curva  $\gamma$  è il cerchio che meglio approssima localmente la curva  $\gamma$ ; svolge dunque il ruolo, tra i cerchi, di quello tipico della tangente fra le rette. È opportuno far notare (anche se la cosa non è affatto intuitiva) che “ordinariamente” il cerchio osculatore *attraversa* la curva: il suo raggio media fra la maggior curvatura di  $\gamma$  da un lato del punto che si considera e la minor curvatura dall'altro. Ciò non avviene solamente nei punti “eccezionali” in cui la curvatura di  $\gamma$  ha un massimo o un minimo, cioè nei vertici.

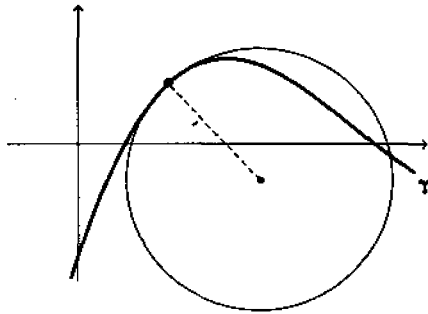


Figura 6.10 Di solito il cerchio osculatore attraversa la curva.

**ESEMPI 6.16** (a) Consideriamo la curva di equazioni parametriche

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t,$$

detta *astroide* (Esempio 6.9(b)). Si ha  $x'(t) = -3a \cos^2 t \sin t$ ,  $y'(t) = 3a \sin^2 t \cos t$ ,  $x''(t) = 3a \cos t (2 \sin^2 t - \cos^2 t)$ ,  $y''(t) = 3a \sin t (2 \cos^2 t - \sin^2 t)$  e, dunque, la curvatura è data da

$$k(t) = -\frac{1}{3a \sin t \cos t}, \quad (6.34)$$

mentre per le coordinate del centro del cerchio osculatore si trova

$$\alpha(t) = a \cos t(1 + 2 \sin^2 t), \quad \beta(t) = a \sin t(1 + 2 \cos^2 t). \quad (6.35)$$

(b) Consideriamo la parabola di equazione  $f(t) = t^2$ ; la curvatura nel punto di coordinate  $(t, t^2)$  è

$$k = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}},$$

e il centro del cerchio osculatore ha coordinate (verificare!)

$$x(t) = -4t^3, \quad y(t) = 3t^2 + \frac{1}{2}. \quad (6.36)$$

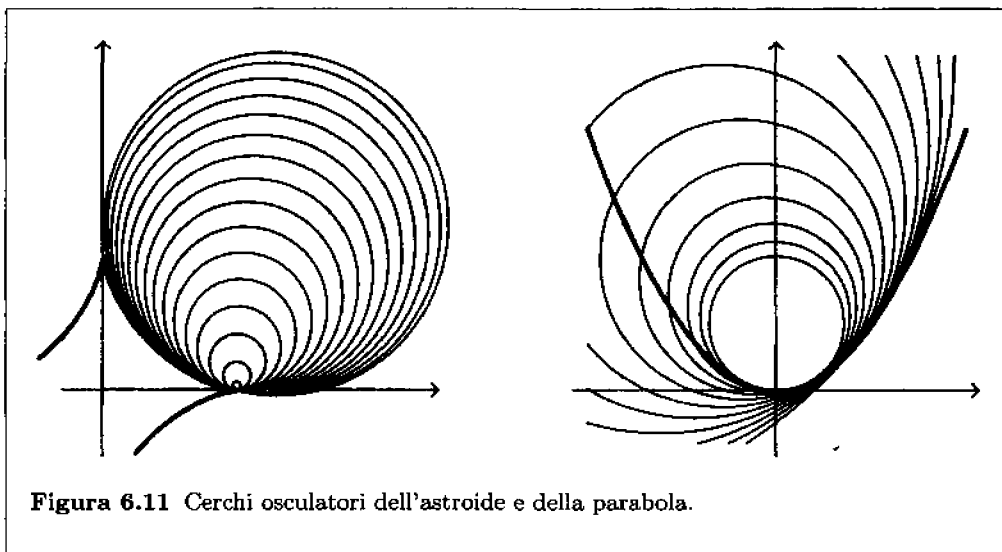


Figura 6.11 Cerchi osculatori dell'astroide e della parabola.

Un'altra interpretazione geometrica della curvatura si ottiene facilmente introducendo l'*anomalia*, ossia l'angolo  $\theta(s)$  formato dal vettore tangente  $\mathbf{T}$  con la direzione positiva dell'asse  $x$ . Occorre, però, un po' di attenzione per provare che tale funzione, definita da (Figura 6.12)

$$\cos \theta = x', \quad \sin \theta = y', \quad (6.37)$$

è *unica*, una volta che si fissi l'angolo  $\theta(s_0)$  per un particolare valore  $s_0 \in I$  (per esempio, imponendo  $0 \leq \theta(s_0) < 2\pi$ ), e che è una funzione regolare di  $s$ . Non insistiamo comunque su questo punto.

Dalle (6.37) otteniamo

$$x'' = (-\sin \theta)\theta', \quad y'' = (\cos \theta)\theta'$$

e dunque

$$k(s) = \theta'(s), \quad (6.38)$$

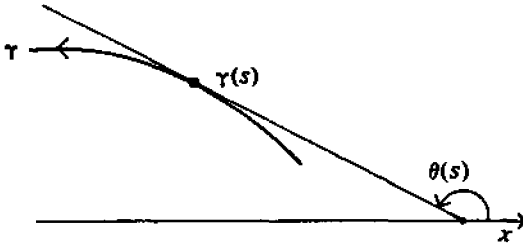


Figura 6.12

il che è in accordo con l'idea intuitiva di "curvatura" come tasso di variazione dell'anomalia del vettore tangente.

**OSSERVAZIONE 6.17** Conviene ora esporre una considerazione che riguarda la rappresentazione delle curve tramite equazioni. Le coordinate cartesiane costituiscono certamente un comodo strumento per lo studio delle curve, tuttavia le equazioni relative non sono *invarianti* per moti rigidi del piano e, quindi, non sono peculiari delle proprietà geometriche delle curve che descrivono. Quali sono allora le *equazioni naturali* di una curva? La relazione che intercorre, per una data curva, tra il raggio di curvatura e il parametro lunghezza d'arco, ha la proprietà di non aver alcun riferimento con il sistema di coordinate e, dunque, può svolgere il ruolo di "geometria naturale" per lo studio delle curve. Purtroppo, tali relazioni sono sovente piuttosto complesse anche per curve relativamente semplici. Per esempio per l'astroide (Esempio 6.16(a)) si ha

$$s(t) = \int_0^t 3a \operatorname{sen} \tau \cos \tau d\tau = \frac{3}{2}a \operatorname{sen}^2 t,$$

$$\varrho(t) = -3a \operatorname{sen} t \operatorname{cost}.$$

Possiamo, allora scrivere

$$s(t) = \frac{3}{4}a(2 \operatorname{sen}^2 t - 1) + \frac{3}{4}a = \frac{3}{4}a(\cos 2t + 1),$$

$$\varrho(t) = -\frac{3}{2}a \operatorname{sen} 2t$$

per cui l'equazione naturale per l'astroide viene a essere

$$\varrho^2 + 4 \left( s - \frac{3}{4}a \right)^2 = \frac{9}{4}a^2.$$

Proviamo ora che, in effetti, la curvatura determina totalmente una curva, a meno di un movimento rigido del piano:

**TEOREMA 6.18** Sia  $k : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua e siano dati un punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  e un numero reale  $\theta_0$ . Esiste una e una sola curva  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (parametrizzata per lunghezza d'arco) tale che

$$\alpha(0) = (x_0, y_0), \quad \alpha'(0) = (\cos \theta_0, \operatorname{sen} \theta_0)$$

e che ha  $k(s)$  come funzione curvatura.

**DIMOSTRAZIONE** Si consideri la primitiva di  $k$

$$\theta(s) = \int_0^s k(r) dr + \theta_0;$$



allora la curva  $\alpha(s)$  di componenti

$$x(s) = \int_0^s \cos \theta(r) dr + x_0, \quad y(s) = \int_0^s \sin \theta(r) dr + y_0$$

verifica tutte le proprietà richieste. L'unicità segue poi dalle proprietà dell'integrale.  $\square$

## ESERCIZI

- 6.3.1** Determinare la lunghezza della *parabola semicubica*  $y^2 = x^3$  per  $0 \leq x \leq 44$ .
- 6.3.2** Trovare la lunghezza della *catenaria*  $y = \cosh x$  per  $-a \leq x \leq a$ .
- 6.3.3** Calcolare la lunghezza della curva  $y = e^x$  per  $0 \leq x \leq 1$ .
- 6.3.4** Si disegni la curva che ha equazione  $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$  e se ne calcoli la lunghezza.
- 6.3.5** (a) Si verifichi che qualunque siano i numeri  $A, B, C, D$  si ha

$$AB + CD \leq (A^2 + C^2)^{1/2} (B^2 + D^2)^{1/2}.$$

(b) Siano  $\varphi$  e  $\psi$  due funzioni continue e positive. Si dimostri che

$$\left[ \left( \int_a^b \varphi(x) dx \right)^2 + \left( \int_a^b \psi(x) dx \right)^2 \right]^{1/2} \leq \int_a^b \sqrt{[\varphi(x)]^2 + [\psi(x)]^2} dx.$$

[Si scriva il quadrato del primo membro come

$$\int_a^b \left[ \varphi(x) \int_a^b \varphi(t) dt + \psi(x) \int_a^b \psi(t) dt \right] dx$$

e si usi la parte (a).]

- 6.3.6** Nelle ipotesi della Proposizione 6.7 si dimostri che

(a)  $L = \sup_{p \in \mathcal{P}} l(p)$  è finito;

(b)  $\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \leq L$ ;

(c) usufruendo della maggiorazione trovata nell'Esercizio precedente si provi che per ogni poligonale  $p$  si ha

$$\begin{aligned} l(p) &= \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{\left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} 1 \cdot dx \right)^2 + \left( \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) dx \right)^2} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \end{aligned}$$

6.3.7 Sia  $\Gamma$  una curva la cui equazione (in coordinate polari) è

$$r = r(\vartheta), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi.$$

Provare che la sua lunghezza  $L$  è data da

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{[r(\vartheta)]^2 + [r'(\vartheta)]^2} d\vartheta.$$

6.3.8 Determinare la lunghezza delle curve seguenti:

(a) *cardioide*:  $r = a(1 + \cos \vartheta), \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi;$

(b) *spirale logaritmica*:  $r = e^{a\vartheta}, \quad 0 \leq \vartheta \leq 2k\pi.$

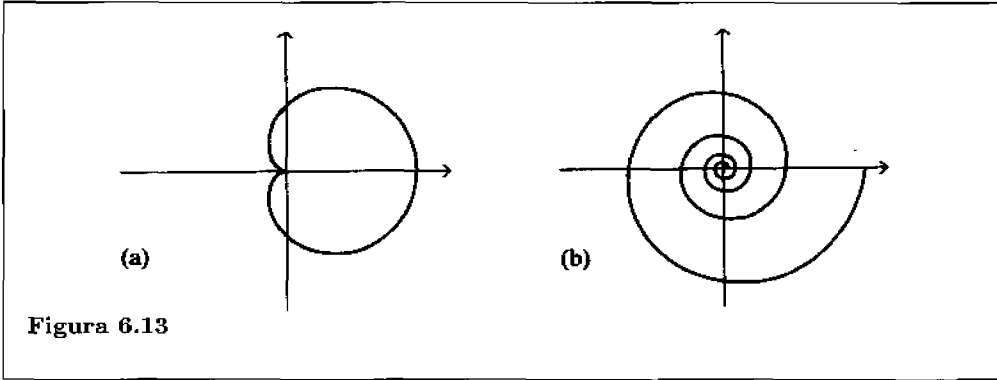


Figura 6.13

6.3.9 Determinare la lunghezza delle curve seguenti:

(a) *nastroide*:  $x = a(3 \cos t - \cos 3t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi;$   
 $y = a(3 \sin t - \sin 3t),$

(b) *arco di cicloide*:  $x = a(t - \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$   
 $y = a(1 - \cos t),$

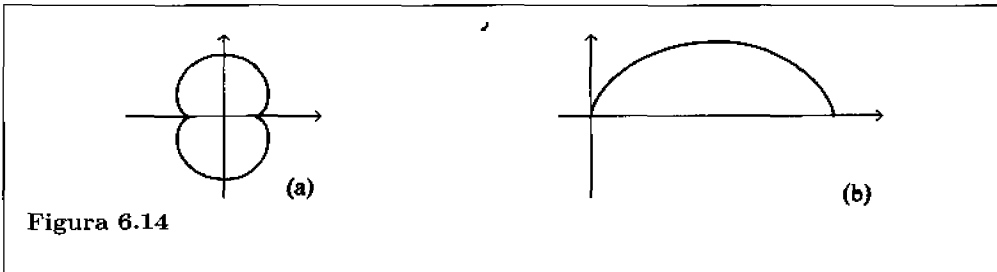


Figura 6.14

6.3.10 Si consideri la curva definita da  $y = f(x)$  in  $[0, 2/\pi]$ , ove  $f(x) = x \operatorname{sen} \frac{1}{x}$  se  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ . Mostrare che la curva non è rettificabile. [Considerare i punti che hanno ascissa  $2/k\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots, 2n$ ].

**6.3.11** La definizione di curva rettificabile e la formula (6.15) si estendono in modo ovvio al caso di curve nello spazio date in equazione parametrica  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$ . Trovare la lunghezza della curva

$$x = a \cosh t, \quad y = a \sinh t, \quad z = at, \quad 0 \leq t \leq T.$$

**6.3.12** Sia  $\alpha$  una curva riferita al parametro lunghezza d'arco e sia  $d$  un fissato numero reale.

Si consideri la curva

$$\delta(s) = \alpha(s) + dN(s),$$

detta *parallela* a  $\alpha$ . Si provi che  $\delta$  è una curva regolare eccezion fatta per i punti in cui  $k(s) \neq 0$  e  $d = \frac{1}{k(s)}$ . Si noti che in tali punti  $\delta(s)$  è il centro di curvatura di  $\alpha$ .

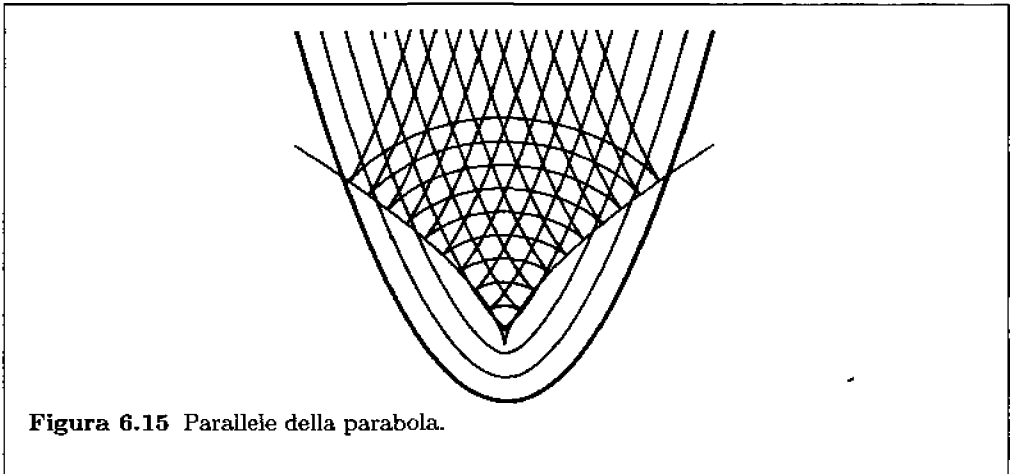


Figura 6.15 Parallele della parabola.

**6.3.13** Determinare la curvatura delle curve seguenti:

(a)  $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ ,  $y = \ln(\cos x)$ ,  $x = \frac{1}{3}(y^2 + 2)^{3/2}$ ,

(b)  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ .

## 6.4 Integrali impropri e altre estensioni

Per ogni  $A \in (0,1)$  l'area della regione delimitata dalla curva  $y = 1/x$  e dalle rette  $y = 0$ ,  $x = A$ ,  $x = 1$  è data dall'integrale

$$\int_A^1 \frac{1}{x} dx = -\log A,$$

ed è quindi arbitrariamente grande per  $A \rightarrow 0^+$ ; ciò è dovuto al fatto che  $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$  per  $x \rightarrow 0^+$ .

Tuttavia, la situazione è del tutto diversa nel caso della funzione  $y = 1/\sqrt{x}$ , che pure è divergente per  $x \rightarrow 0^+$ : si ha infatti

$$\int_A^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2 - 2\sqrt{A} \rightarrow 2 \quad \text{per } A \rightarrow 0^+.$$

In generale, se  $f$  è una funzione continua sull'intervallo semiaperto  $(a, b]$  (ed eventualmente divergente per  $x \rightarrow a^+$ ), ha senso considerare gli integrali

$$\int_A^b f(x) dx, \quad \text{con } a < A < b;$$

detta  $F$  una primitiva di  $f$  in  $(a, b]$ , tale integrale è uguale a  $F(b) - F(A)$ . Come si è visto, può capitare che esista finito il limite  $\lim_{A \rightarrow a^+} F(A)$ , oppure no. Nel primo caso si dice che  $f$  è *integrabile in senso improprio* su  $[a, b]$ , o che l'*integrale improprio*  $\int_a^b f(x) dx$  è *convergente*, e si pone

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - \lim_{A \rightarrow a^+} F(A).$$

In maniera simile si procede nel caso di funzioni continue sull'intervallo  $[a, b)$  ed eventualmente divergenti per  $x \rightarrow b^-$ . In questo modo viene estesa (quando possibile) la nozione di integrale a funzioni non limitate.

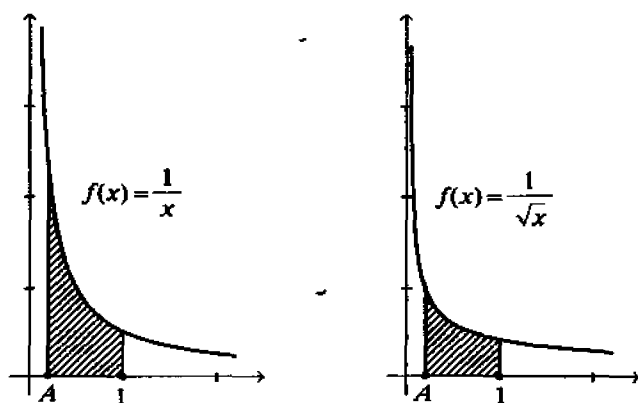


Figura 6.16

C'è un'analogia definizione di integrale improprio per funzioni definite su semirette. Sia  $f(x)$  continua per  $x \geq a$ . Risulta

$$\int_a^A f(x) dx = F(A) - F(a) \quad \text{per ogni } A > a,$$

ove  $F$  è una arbitraria primitiva di  $f$  sulla semiretta  $x \geq a$ . Se esiste finito il limite  $\lim_{A \rightarrow +\infty} F(A)$ , si definisce l'integrale improprio di  $f$  su  $[a, +\infty)$  come

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} F(A) - F(a),$$

e si dice che esso è *convergente*.

—≡—

**ESEMPIO 6.19**  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  è integrabile in senso improprio su  $[0,1]$  se e solo se  $\alpha < 1$ ; infatti per  $\alpha < 1$  risulta

$$\lim_{A \rightarrow 0} \int_A^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow 0} \left[ -\frac{1}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{A^{\alpha-1}} \right] = \frac{1}{1-\alpha},$$

mentre se  $\alpha \geq 1$  si ha

$$\lim_{A \rightarrow 0} \int_A^1 \frac{1}{x^\alpha} dx = +\infty.$$

La stessa funzione  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  è invece integrabile in senso improprio su  $[1, \infty)$  se e solo se  $\alpha > 1$  in quanto

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{A^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \right] = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty, & \text{se } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

—≡—

In molti casi è possibile determinare se un integrale improprio converge senza calcolarlo esplicitamente, confrontandolo con un altro di cui sia noto il comportamento. Si ha infatti il seguente "criterio del confronto", di ovvia dimostrazione.

**PROPOSIZIONE 6.20** Siano  $f(x)$ ,  $g(x)$  due funzioni continue e non negative sulla semiretta  $x \geq a$ ; si supponga che sia  $f(x) \leq g(x)$  per ogni  $x \geq a$ . Allora:

- (a) Se  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  converge, allora anche  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  converge.
- (b) Se  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  non converge, allora anche  $\int_a^{+\infty} g(x) dx$  non converge.

Ricordando la definizione di funzioni asintoticamente equivalenti (Definizione 4.44), la Proposizione 6.20 si può porre in forma particolarmente espressiva.

**PROPOSIZIONE 6.21** Se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono continue e positive per  $x \geq a$  e se  $f(x) \sim kg(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$ , ove  $k$  è una costante positiva, allora i due integrali

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad \int_a^{+\infty} g(x) dx,$$

sono o entrambi convergenti oppure entrambi divergenti.

Infatti, essendo  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{kg(x)} = 1$ , definitivamente si ha

$$\frac{1}{2}kg(x) < f(x) < \frac{3}{2}kg(x).$$

Basta, dunque, applicare la proposizione precedente per avere la tesi.

—≡—

**ESEMPIO 6.22** L'integrale  $\int_1^{+\infty} (\frac{1}{x} - \text{sen } \frac{1}{x}) dx$  è convergente. Infatti si ha (Esempio 4.49 (b))  $(\frac{1}{x} - \text{sen } \frac{1}{x}) \sim \frac{1}{6x^3}$  per  $x \rightarrow +\infty$  e la funzione  $\frac{1}{x^3}$  ha integrale improprio convergente su  $[1, +\infty)$ .

—≡—

**OSSERVAZIONE 6.23** Le proposizioni precedenti si applicano anche al caso di integrali impropri su un intervallo finito  $a < x \leq b$ .

Per esempio, l'integrale  $\int_0^1 \frac{e^{\text{sen } \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} dx$  è convergente, in quanto per  $x \in (0,1]$  si ha

$$\frac{e^{\text{sen } \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} \leq \frac{e}{\sqrt{x}}$$

e dunque

$$\int_0^1 \frac{e^{\text{sen } \frac{1}{x}}}{\sqrt{x}} dx \leq \lim_{A \rightarrow 0^+} \int_A^1 \frac{e}{\sqrt{x}} dx < \infty.$$

## FUNZIONE GAMMA

Un esempio di integrale improprio molto importante in Analisi e nelle scienze applicate è dato dalla cosiddetta *funzione gamma*:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx \quad (p > 0). \quad (6.39)$$

Proviamo che tale integrale è convergente per ogni  $p > 0$ ; si considerino separatamente

$$\int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx, \quad \int_1^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx.$$

Il primo integrale è improprio se  $0 < p < 1$ ; ma essendo  $0 < e^{-x} x^{p-1} < \frac{1}{x^\alpha}$  con  $\alpha = 1 - p < 1$  risulta convergente. Anche il secondo integrale è convergente, in quanto  $e^{-x} x^{p-1}$  è infinitesimo (per  $x \rightarrow +\infty$ ) di ordine superiore a ogni potenza di  $\frac{1}{x}$  (per esempio, risulta definitivamente  $e^{-x} x^{p-1} < \frac{1}{x^2}$ ). Integrando per parti fra 0 e  $A$  si ha, per  $p > 1$

$$\int_0^A e^{-x} x^{p-1} dx = [-e^{-x} x^{p-1}]_0^A + (p-1) \int_0^A e^{-x} x^{p-2} dx;$$

facendo tendere  $A$  all'infinito si ottiene la formula ricorrente

$$\Gamma(p) = (p-1) \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-2} dx = (p-1) \cdot \Gamma(p-1), \quad p > 1. \quad (6.40)$$

Se  $p$  è un intero, applicando successivamente la (6.32)

$$\Gamma(p) = (p-1)(p-2) \dots 3 \cdot 2 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x} dx,$$

ed essendo  $\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$ , si trova una interessante espressione che lega il fattoriale a un integrale improprio:

$$\Gamma(p) = (p-1)!. \quad (6.41)$$

## INTEGRALI DI DIRICHLET E DI FRESNEL

Talvolta i criteri precedentemente esposti non risultano immediatamente efficaci per determinare la convergenza di alcuni integrali impropri; allo scopo risulta più opportuno analizzare la funzione integranda. Un esempio di questa situazione è dato dall'*integrale di Dirichlet*:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Abbiamo già osservato (Esempio 6.6 (c)) che non si riesce a esprimere una primitiva della funzione  $\frac{\sin x}{x}$  in termini delle funzioni elementari. Tuttavia, poiché la funzione  $1 - \cos x$  è una primitiva di  $\sin x$ , integrando per parti si ottiene

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{\sin x}{x} dx &= \frac{1 - \cos B}{B} - \frac{1 - \cos A}{A} + \\ &+ \int_A^B \frac{1 - \cos x}{x^2} dx, \quad 0 < A < B < +\infty. \end{aligned} \quad (6.42)$$

Si ha  $\lim_{A \rightarrow 0} \frac{1 - \cos A}{A} = 0$ ,  $\lim_{B \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos B}{B} = 0$ ; poiché l'integrale  $\int_0^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2} dx$  è convergente (basta applicare la Proposizione 6.20) se ne deduce che esiste positivo il limite  $\alpha$  del primo membro di (6.42) per  $B \rightarrow +\infty$  e per  $A \rightarrow 0^+$ . Dunque la funzione  $\frac{\sin x}{x}$  ha integrale improprio convergente su  $[0, \infty)$  uguale a un certo numero positivo  $\alpha$ ; si vedrà tra breve che  $\alpha = \pi/2$ .

Si noti che la convergenza di tale integrale è dovuta al periodico cambiamento di segno della funzione integranda; le aree racchiuse fra la curva  $y = \frac{\sin x}{x}$  e l'asse delle ascisse vengono computate nell'integrale alternativamente con il segno positivo e negativo (Figura 6.17). È facile (ma non banale) verificare, invece, che la somma di tali aree prese in valore assoluto (vale a dire l'integrale  $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ ) è divergente. Si osservi che una funzione  $f(x)$  può avere integrale improprio convergente su una semiretta  $(a, +\infty)$  anche se la funzione  $f(x)$  non tende a zero per  $x \rightarrow +\infty$ . Un esempio di questa situazione è dato dai seguenti integrali, detti *di Fresnel*, che intervengono nello studio della diffrazione della luce:

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2) dx, \quad \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx.$$

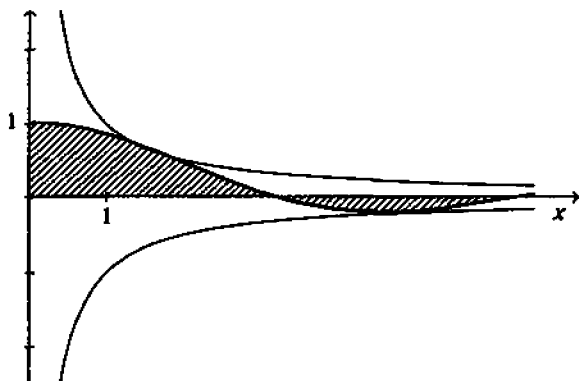


Figura 6.17 Grafico di  $f(x) = \text{sen } x/x$ .

Usufruento della sostituzione  $t = x^2$  e integrando per parti, come nell'esempio precedente, si ottiene

$$\int_A^B \text{sen}(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_{\sqrt{A}}^{\sqrt{B}} \frac{\text{sen } t}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{2} \left[ \frac{1 - \cos \sqrt{B}}{\sqrt{B}} - \frac{1 - \cos \sqrt{A}}{\sqrt{A}} + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{A}}^{\sqrt{B}} \frac{1 - \cos t}{t^{3/2}} dt \right].$$

È chiaro che esistono finiti i limiti del secondo membro per  $A \rightarrow 0^+$  e per  $B \rightarrow \infty$  (per  $t \rightarrow 0$  si ha  $\frac{1 - \cos t}{t^{3/2}} \sim \frac{2}{3}t^{1/2}$  per  $t \rightarrow \infty$  si ha  $0 \leq \frac{1 - \cos t}{t^{3/2}} \leq \frac{2}{t^{3/2}}$ ), dunque  $\int_0^\infty \text{sen}(x^2) dx$  è convergente.

In modo analogo si procede per il secondo integrale. Si può dimostrare che entrambi questi integrali hanno il valore  $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ .

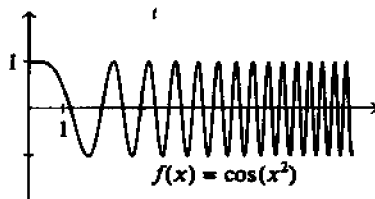
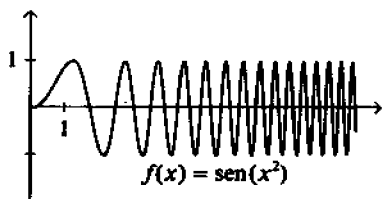


Figura 6.18

## CRITERIO INTEGRALE PER LA CONVERGENZA DELLE SERIE

Dalla precedente sezione appare una certa analogia fra la teoria delle serie e quella degli integrali impropri. Si ha, in effetti, la proposizione seguente.



**PROPOSIZIONE 6.24** Sia  $f$  una funzione positiva e decrescente definita per  $x \geq 1$ . Allora l'integrale improprio

$$\int_1^{\infty} f(x) dx$$

e la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

sono entrambi convergenti oppure entrambi non convergenti.

La Figura 6.19 mostra l'idea della dimostrazione: poiché  $f$  è decrescente, se  $n \leq x \leq n+1$  si ha

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

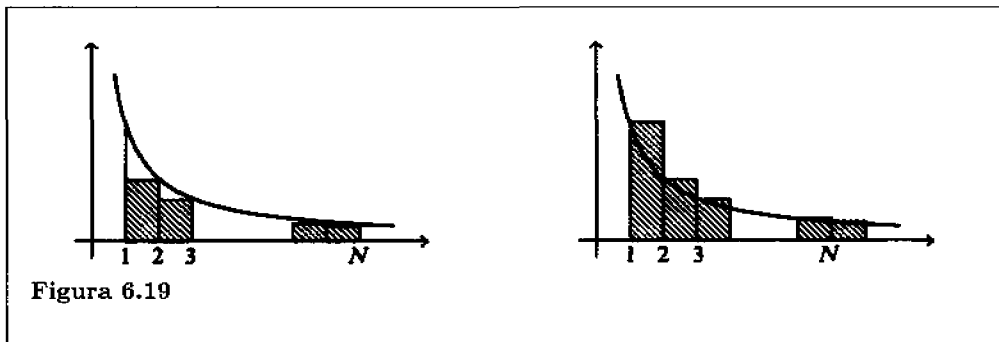


Figura 6.19

e dunque

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n),$$

$$\sum_{n=2}^N f(n) \leq \int_1^N f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n). \quad (6.43)$$

Siccome la funzione  $A \rightarrow \int_1^A f(x) dx$  è monotona il  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A f(x) dx$  esiste finito se e solo se esiste finito il limite della successione  $\int_1^n f(x) dx$  per  $n \rightarrow \infty$ <sup>(3)</sup>. La tesi segue allora immediatamente da questa osservazione e dalla (6.43).

—

**ESEMPLI 6.25 (a)** L'integrale  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  è convergente per  $\alpha > 1$ ; ne segue che la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

è convergente se e solo se  $\alpha > 1$ .

<sup>(3)</sup>Si noti che per una generica  $f$  ciò è falso:  $\int_1^N \cos \pi x dx = 0$  per ogni  $N$ , ma  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_1^A \cos \pi x dx$  non esiste.

(b) La serie  $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$  è divergente; infatti

$$\int_3^A \frac{dx}{x \ln x} = \int_3^A \frac{D \ln x}{\ln x} dx = [\ln(\ln x)]_3^A$$

tende all'infinito per  $A \rightarrow +\infty$ .



Il confronto con gli integrali è utile anche per *stimare l'errore* che si commette sostituendo alla somma di una serie convergente la sua somma parziale  $n$ -esima. Per esempio, sappiamo che se  $\alpha > 1$  la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  è convergente; poiché si ha

$$\int_{N+1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \int_N^{\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx,$$

l'errore che si ha troncando la somma all' $n$ -esimo termine è minore di  $\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{N^{\alpha-1}}$  e maggiore di  $\frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}$ . Per esempio, per determinare  $\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  con un errore al più di  $10^{-3}$  occorrerà sommare 1000 termini della serie.



## INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

Se  $f(t, x)$  è una funzione delle due variabili  $t, x$ , continua nel rettangolo  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq t \leq d$  si può integrare  $f(t, x)$ , per ogni fissato  $t$ , rispetto a  $x$  fra  $a$  e  $b$ :

$$\int_a^b f(t, x) dx \quad t \in [c, d];$$

si ottiene così una funzione  $G(t)$  della variabile  $t$ , definita su  $[c, d]$ . Le proprietà di  $G(t)$  sono espresse dalla seguente proposizione.

**PROPOSIZIONE 6.26** Se  $f(t, x)$  è continua nel rettangolo  $c \leq t \leq d$ ,  $a \leq x \leq b$ , allora

$$G(t) = \int_a^b f(t, x) dx$$

è una funzione continua per  $c \leq t \leq d$ ; se poi  $f(t, x)$  è derivabile rispetto a  $t$  con derivata  $f_t$  continua, allora  $G(t)$  è derivabile in  $[c, d]$  e si ha

$$G'(t) = \int_a^b f_t(t, x) dx; \quad (6.44)$$

$G'(t)$  è una funzione continua.

**DIMOSTRAZIONE** Come si vedrà nel Paragrafo 6.5 per le funzioni continue di più variabili vale un teorema di uniforme continuità analogo al Teorema 6.30: se  $f(t, x)$  è continua in un insieme *chiuso e limitato*  $A$  allora  $f$  è ivi uniformemente continua, vale a dire per ogni  $\varepsilon > 0$  vi è un  $\delta > 0$  in modo che se  $(t, x), (t', x')$  sono due *qualunque* punti di  $A$  che distano meno di  $\delta$  allora  $|f(t, x) - f(t', x')| < \varepsilon$ .

Da questo fatto segue facilmente la continuità della funzione  $G(t)$ :

$$|G(t+h) - G(t)| = \left| \int_a^b [f(t+h, x) - f(t, x)] dx \right| \leq \int_a^b |f(t+h, x) - f(t, x)| dx$$

e in virtù della continuità uniforme di  $f$  il secondo membro è arbitrariamente piccolo, pur di prendere  $h$  piccolo a sufficienza.

Per quanto riguarda la derivabilità basta osservare che, per il teorema del valor medio, per ogni  $x$  vi è  $\xi$ , compreso fra  $t$  e  $t+h$  (dipendente da  $x$ ), tale che

$$\begin{aligned} \frac{G(t+h) - G(t)}{h} &= \int_a^b \frac{f(t+h, x) - f(t, x)}{h} dx = \\ &= \int_a^b f_t(\xi, x) dx = \int_a^b f_t(t, x) dx + \int_a^b (f_t(\xi, x) - f_t(t, x)) dx. \end{aligned}$$

Usufruento allora della continuità uniforme della funzione continua  $f_t$ , si vede che l'ultimo integrale è arbitrariamente piccolo, pur di prendere  $h$  piccolo a sufficienza; ciò prova la (6.44). Dalla prima parte del teorema segue poi che  $G'(x)$  è una funzione continua.  $\square$

—

**ESEMPIO 6.27** Si consideri l'integrale  $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + t^2)^2}$ ,  $t > 0$ .

Con qualche calcolo si verifica che

$$\frac{1}{(x^2 + t^2)^2} = -\frac{1}{2t} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{x^2 + t^2}.$$

Le funzioni  $f(t, x) = \frac{1}{x^2 + t^2}$  e  $f_t(t, x) = \frac{-2t}{(x^2 + t^2)^2}$  sono continue per  $0 \leq x \leq 1$  e  $t > 0$ .

In base alla proposizione precedente si ha dunque:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(x^2 + t^2)^2} dx &= -\frac{1}{2t} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{x^2 + t^2} dx = \\ &= -\frac{1}{2t} \frac{d}{dt} \int_0^1 \frac{1}{x^2 + t^2} dx = -\frac{1}{2t} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{t} \int_0^{1/t} \frac{dy}{y^2 + 1} \right] = \\ &= -\frac{1}{2t} \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{t} \operatorname{arctg} \frac{1}{t} \right] = \frac{1}{2t^2} \left[ \frac{1}{t} \operatorname{arctg} \frac{1}{t} + \frac{1}{1+t^2} \right]. \end{aligned}$$

—

Più in generale si può considerare il caso in cui anche gli estremi di integrazione dipendono da  $t$ :

$$G(t) = \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f(t, x) dx. \quad (6.45)$$

Posto  $\varphi(u, v, t) = \int_u^v f(t, x) dx$ , si ha allora  $G(t) = \varphi(\alpha(t), \beta(t), t)$ . Dalla formula fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$\varphi_u(u, v, t) = -f(t, u), \quad \varphi_v(u, v, t) = f(t, v),$$

mentre dalla precedente proposizione

$$\varphi_t(u, v, t) = \int_u^v f_t(t, x) dx.$$

Si conclude, pertanto, in base alla formula di derivazione della funzione composta<sup>(4)</sup>

$$\begin{aligned} G'(t) &= \varphi_u \alpha'(t) + \varphi_v \beta'(t) + \varphi_t = \\ &= \beta'(t) f(t, \beta(t)) - \alpha'(t) f(t, \alpha(t)) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} f_t(t, x) dx. \end{aligned} \quad (6.46)$$

—

**ESEMPIO 6.28** Sia

$$G(t) = \int_{\operatorname{sen} t}^{\operatorname{cos} t} (x^2 + t^2) dx.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} G'(t) &= -\operatorname{sen} t (\operatorname{cos}^2 t + t^2) - \operatorname{cos} t (\operatorname{sen}^2 t + t^2) + \int_{\operatorname{sen} t}^{\operatorname{cos} t} 2t dx = \\ &= -(\operatorname{sen} t + \operatorname{cos} t)(t^2 + \operatorname{sen} t \operatorname{cos} t) + 2t(\operatorname{cos} t - \operatorname{sen} t). \end{aligned}$$

—

## ESERCIZI

6.4.1 Studiare la convergenza dei seguenti integrali impropri:

(a)  $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0);$

(b)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}} dx;$

(c)  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^3} dt;$

(d)  $\int_0^{1/2} \frac{1}{x \ln^2 x} dx;$

(e)  $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx;$

(f)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 9} dx;$

(g)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^4}}{x^2 + x^4} dx;$

(h)  $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x \left(x - \frac{1}{2}\right) (x-1)} dx;$

(i)  $\int_0^{\infty} \frac{\arctan x}{x \sqrt{|1-x|}} dx;$

(l)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \sqrt[3]{x^4 + 1}}.$

<sup>(4)</sup>Ovviamente si sta supponendo che le derivate  $\alpha'(t)$  e  $\beta'(t)$  esistano e siano continue.

6.4.2 Discutere l'esistenza ed eventualmente calcolare i seguenti integrali impropri:

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & \int_0^1 \frac{3x^2 + 2}{x^{3/2}} dx; & \text{(b)} \quad & \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(2-x)}}; \\
 \text{(c)} \quad & \int_1^\infty \frac{dx}{(1+x^2)}; & \text{(d)} \quad & \int_1^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x(1+\sqrt{x})}} dx; \\
 \text{(e)} \quad & \int_0^1 \frac{1}{\operatorname{sen} x} dx; & \text{(f)} \quad & \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} dx; \\
 \text{(g)} \quad & \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}} dx.
 \end{aligned}$$

6.4.3 Individuare opportuni intervalli di integrazione per cui gli integrali degli Esercizi 6.2.4 e 6.2.5 diventano integrali impropri e discuterne l'integrabilità.

6.4.4 Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen} t dt, \quad \int_0^{\pi/2} \ln \cos t dt.$$

[Usare le formule di duplicazione].

6.4.5 Si provi che  $\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N}$ .

6.4.6 Provare che le serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^\alpha}, \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \log n (\log \log n)^\alpha}, \quad \sum_{n=16}^{\infty} \frac{1}{n \log n \log \log n (\log \log \log n)^\alpha}, \dots$$

convergono se  $\alpha > 1$ , divergono se  $\alpha \leq 1$ .

6.4.7 (*Trasformata di Laplace*). Sia  $F(x)$  una funzione continua per  $x \geq 0$  tale che  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-s_0 x} F(x) = 0$ , per un certo  $s_0$ . Si definisce la *trasformata di Laplace* di  $F$  come l'integrale improprio, convergente per ogni  $s > s_0$ :

$$f(s) = \mathcal{L}\{F(x)\} = \int_0^\infty e^{-sx} F(x) dx.$$

provare che si ha

$$\mathcal{L}\{e^{ax}\} = \frac{1}{s-a}, \quad s > a,$$

$$\mathcal{L}\{\cos ax\} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad s > 0,$$

$$\mathcal{L}\{x^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0.$$

Provare inoltre che, sotto opportune ipotesi su  $F$ , si ha

$$\mathcal{L}\{F'(x)\} = s\mathcal{L}\{F(x)\} - F(0),$$

$$\mathcal{L}\{F''(x)\} = s^2\mathcal{L}\{F(x)\} - sF(0) - F'(0).$$

6.4.8 Una particella di massa  $m$  è attratta verso un punto  $P$  da una forza che è inversamente proporzionale alla sua distanza da  $P$ , con costante di proporzionalità  $k$ . Se la particella ha inizialmente distanza da  $P$  pari a  $d$ , si verifichi che il tempo impiegato da essa per raggiungere il punto  $P$  è dato da

$$T = d\sqrt{\frac{m}{2k}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = d\sqrt{\frac{\pi m}{2k}}.$$

6.4.9 Dall'Esempio 6.19 si sa che l'integrale

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

è divergente. Pertanto, l'integrale

$$\int_1^{\infty} 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx,$$

che misura l'area della superficie di un solido rotondo, generato dalla rotazione attorno all'asse  $x$  della curva  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x \geq 1$ , è pure divergente. Infatti si vede facilmente che

$$\int_1^b 2\pi \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx > \int_1^b \frac{dx}{x}.$$

Invece, l'integrale

$$\int_1^{\infty} \pi \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx,$$

che fornisce il volume del solido generato, è convergente. Si calcoli questo integrale e ci si stupisca del fatto che detto solido non è in grado di contenere la quantità (infinita) di vernice che necessita per dipingerne la superficie esterna.

## 6.5 Complementi

### LA FORMULA DI STIRLING

In statistica e in calcolo delle probabilità risulta spesso utile disporre di una semplice espressione che valuti l'ordine di grandezza di  $n!$ . Tale espressione è fornita dalla seguente *formula di Stirling*:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n. \quad (6.47)$$

Per dimostrare la (6.47) poniamo

$$a_n = \frac{n!}{\sqrt{n}} \left(\frac{e}{n}\right)^n \quad (6.48)$$

e osserviamo che risulta

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}. \quad (6.49)$$

Per stimare il secondo membro in (6.49) si usufruisce dello sviluppo in serie (2.18):

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots;$$

la somma di questa serie è ovviamente maggiore di 1 ed è minore di

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{3} \left[ \frac{1}{(2n+1)^2} + \frac{1}{(2n+1)^4} + \dots \right] &= 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{(2n+1)^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = \\ &= 1 + \frac{1}{12n(n+1)}; \end{aligned}$$

pertanto

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)},$$

da cui, prendendo gli esponenziali:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1+1/12n(n+1)}$$

e da (6.49)

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{1/12n(n+1)} = \frac{e^{1/12n}}{e^{1/12(n+1)}}. \quad (6.50)$$

Da (6.50) si ricava che la successione  $a_n$  è decrescente, mentre  $a_n e^{-1/12n}$  risulta crescente; poiché  $e^{-1/12n} \rightarrow 1$  le successioni  $a_n$  e  $a_n e^{-1/12n}$  hanno lo stesso limite  $A$  ed è

$$a_n e^{-1/12n} < A < a_n = a_n e^0.$$

Per il teorema di esistenza dei valori intermedi esiste quindi  $\vartheta$  (che dipende da  $n$ ) tale che  $0 < \vartheta < 1$  e

$$A = a_n e^{-\vartheta/12n}, \quad \text{ossia} \quad a_n = A e^{\vartheta/12n},$$

da cui

$$n! = O\left(\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n\right). \quad (6.51)$$

Si può dimostrare che si ha

$$A = \sqrt{2\pi};$$

ciò in particolare prova la (6.47) e permette di scrivere la formula di Stirling nel modo seguente:

$$\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{1/12n}. \quad (6.52)$$

## CONTINUITÀ UNIFORME E INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE

Come si sa una funzione  $f$  è continua in un intervallo  $I$  se per ogni fissato punto  $x_0$  di  $I$  e ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $\delta > 0$  tale che

$$\text{se } x \in I \quad \text{e} \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{allora} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \quad (6.53)$$

In generale il numero  $\delta$  dipenderà, oltre che da  $\varepsilon$ , anche dal punto  $x_0$ .

Per esempio, se  $f(x) = x^2$  e se  $|x - x_0| < \delta$  allora  $|x^2 - x_0^2| = |x + x_0| \cdot |x - x_0| < (2|x_0| + \delta) \cdot \delta$ ; ciò significa che dato  $\varepsilon > 0$  si ha  $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$  a condizione che sia  $2|x_0|\delta + \delta^2 < \varepsilon$ , il che equivale a  $\delta^2 + 2|x_0|\delta - \varepsilon < 0$ , la quale infine è risolta per

$$\delta < \sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|. \quad (6.54)$$

Può tuttavia accadere che nella (6.53) il numero  $\delta$  non dipenda dal particolare punto  $x_0$  di  $I$ ; per esempio, se  $f(x) = \arctg x$ , per il teorema del valor medio si ha

$$|\arctg x - \arctg x_0| = \frac{1}{1 + \xi^2} |x - x_0| \leq |x - x_0|$$

e dunque, in questo caso, scegliendo  $\delta = \varepsilon$  si ottiene che

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{implica} \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{per ogni } x_0.$$

In circostanze come questa si dice che la funzione  $f$  è uniformemente continua. Più precisamente:

**DEFINIZIONE 6.29** Una funzione  $f$  si dice *uniformemente continua* su  $I$  se per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un numero  $\delta > 0$  tale che per ogni coppia  $x, x' \in I$  con  $|x - x'| < \delta$  risulta  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ .

Per quanto visto la funzione  $\arctg x$  è uniformemente continua su tutta la retta reale; con lo stesso metodo (usando il teorema del valor medio) si prova che se  $f$  è una *funzione derivabile con derivata limitata* allora  $f$  è uniformemente continua. Più in generale è facile vedere che tutte le *funzioni lipschitziane* sono uniformemente continue.

La funzione  $f(x) = x^2$ , invece, non è uniformemente continua su tutta la retta reale. Infatti per ogni fissato  $\varepsilon$

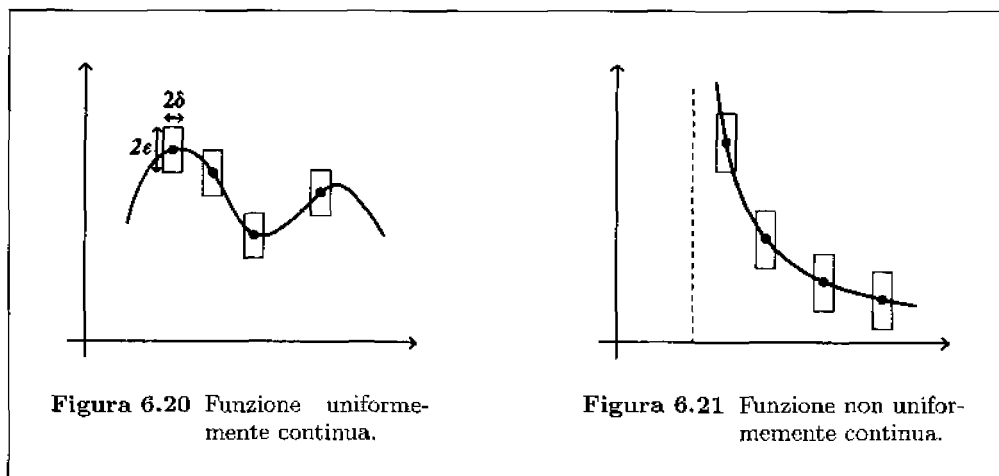
$$\lim_{x_0 \rightarrow \infty} [\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} - |x_0|] = \lim_{x_0 \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon}{\sqrt{x_0^2 + \varepsilon} + |x_0|} = 0$$

e dunque, ricordando la (6.54), non vi è alcun  $\delta > 0$  che soddisfi la (6.53) per ogni  $x_0$  reale. Tuttavia  $f$  è uniformemente continua su ogni intervallo di tipo  $[-a, a]$  (per esempio) in quanto, dato  $\varepsilon > 0$  e scelto  $\delta = \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a$ , risulta che

$$x, x_0 \in [-a, a], \quad |x - x_0| < \delta \quad \text{implica} \quad |x^2 - x_0^2| < \varepsilon.$$



Le figure seguenti mostrano una interpretazione geometrica della continuità uniforme. Si consideri un rettangolo  $R$  di base  $2\delta$  e altezza  $2\varepsilon$ , centrato in un punto del grafico di  $f$ . Si ha continuità uniforme se, per ogni fissata altezza, si può scegliere una base per il rettangolo in modo che, facendo scorrere  $R$  lungo il grafico di  $f$ , tale grafico non intersechi mai i due lati orizzontali del rettangolo.



Sussiste il seguente importante teorema.

**TEOREMA 6.30** (*di continuità uniforme*). Se  $f$  è una funzione continua su un intervallo chiuso  $[a, b]$  allora  $f$  è uniformemente continua su  $[a, b]$ .

**DIMOSTRAZIONE** Se  $f$  è una funzione continua su un intervallo chiuso  $[c, d]$  si chiama oscillazione di  $f$  in  $[c, d]$  la quantità

$$\max_{[c, d]} f(x) - \min_{[c, d]} f(x).$$

il teorema è allora una conseguenza del fatto seguente.

**PROPOSIZIONE 6.31** Nelle ipotesi del teorema per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste una partizione di  $[a, b]$  in un numero *finito* di intervalli in modo che l'oscillazione di  $f$  su ciascuno di essi sia minore di  $\varepsilon$ .

**DIMOSTRAZIONE DELLA PROPOSIZIONE** Ragioniamo per assurdo usando il metodo di bisezione. Si supponga che per qualche  $\varepsilon > 0$  la proprietà sia falsa: allora esisterà un certo  $\varepsilon_0$  tale che l'intervallo  $[a, b]$  non possa essere scomposto in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali l'oscillazione di  $f$  sia minore di  $\varepsilon_0$ . Se  $c$  è il punto medio di  $[a, b]$  allora la proprietà è falsa, per lo stesso  $\varepsilon_0$ , in almeno uno dei due intervalli  $[a, c]$ ,  $[c, b]$  (altrimenti sarebbe vera in  $[a, b]$ ); si indichi tale intervallo con  $[a_1, b_1]$ , con la convenzione di scegliere quello di sinistra se è falsa in entrambi.

Iterando il processo di bisezione si costruisce una successione di intervalli  $[a_n, b_n]$ , ciascuno dei quali è contenuto nel precedente, ha ampiezza  $\frac{b-a}{2^n}$  ed è tale che la proprietà anzidetta risulti falsa; in particolare, l'oscillazione di  $f$  in ciascuno di essi è maggiore di  $\varepsilon_0$ .

Gli intervalli  $[a_n, b_n]$  hanno un unico punto  $x_0 \in [a, b]$  in comune: esso è il comune limite delle due successioni monotone  $a_n$  e  $b_n$ . Si supponga, per fissare le idee, che  $x_0$  sia

interno ad  $[a, b]$ . Poiché  $f$  è continua nel punto  $x_0$ , in dipendenza del numero  $\varepsilon_0/2$  vi è un  $\delta > 0$  tale che

$$\text{se } |x - x_0| < \delta \text{ allora } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon_0/2.$$

Si consideri allora l'oscillazione di  $f$  sull'intervallo  $I = [x_0 - \frac{\delta}{2}, x_0 + \frac{\delta}{2}]$ . Da una parte essa non può superare  $\varepsilon_0$ , in quanto se  $x, x' \in I$  allora

$$|f(x) - f(x')| \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x')| < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2};$$

d'altra parte per  $n$  grande a sufficienza l'intervallo  $I$  contiene gli intervalli  $[a_n, b_n]$  (basta che sia  $\frac{b-a}{2^n} < \frac{\delta}{2}$ ) su ciascuno dei quali l'oscillazione di  $f$  è maggiore di  $\varepsilon_0$ : si trova dunque un assurdo.

Se  $x_0$  coincide con uno degli estremi,  $a$  oppure  $b$ , dell'intervallo, la dimostrazione è analoga.

Abbiamo così dimostrato la proposizione; da essa segue subito il teorema di continuità uniforme. Infatti, dato  $\varepsilon > 0$ , si consideri una partizione di  $[a, b]$  in un numero finito di intervalli in ciascuno dei quali l'oscillazione di  $f$  non supera  $\frac{\varepsilon}{2}$ ; tale partizione esiste per la proposizione precedente. Sia  $\delta$  il minimo delle lunghezze degli intervalli della partizione; in ogni intervallo  $I$ , contenuto in  $[a, b]$ , di ampiezza al più  $\delta$ , l'oscillazione di  $f$  non è allora superiore a  $\varepsilon$  (in quanto o  $I$  è contenuto in uno degli intervalli della partizione o è contenuto in una coppia di intervalli adiacenti) e quindi  $f$  è uniformemente continua su  $[a, b]$ .  $\square$

Occorre prestare attenzione a non identificare, a livello di interpretazione geometrica, la uniforme continuità di una funzione con la pendenza del suo grafico. La funzione  $f(x) = \sqrt{x}$ , per esempio, è uniformemente continua sull'intervallo  $[0, 1]$ , in base al teorema dimostrato or ora, pur avendo il suo grafico pendenza infinita nel punto  $x = 0$  (in effetti  $f(x) = \sqrt{x}$  è uniformemente continua su tutto  $[0, \infty)$  come è facile verificare). D'altra parte anche veri e propri "mostri", come la funzione che appare nella Figura 3.19, sono funzioni uniformemente continue!

La definizione di uniforme continuità si estende senza difficoltà a funzioni di più variabili; anche il Teorema 6.30, continua a valere per funzioni di più variabili: ogni funzione continua su una regione *limitata e chiusa* è ivi uniformemente continua. Abbiamo fatto uso di questo risultato per provare la Proposizione 6.26.

Veniamo ora alla dimostrazione della proprietà più volte annunciata: la integrabilità delle funzioni continue.

Ricordiamo brevemente la definizione di integrale di una funzione  $f(x)$  definita e limitata su un intervallo  $[a, b]$ . Presa una partizione  $\pi$  di  $[a, b]$  in un numero finito di intervalli

$$\pi : x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

siano

$$m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x);$$

si costruiscano le somme inferiore e superiore

$$s_\pi = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), \quad S_\pi = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1})$$

e si considerino i numeri  $I' = \sup s_\pi$ ,  $I'' = \inf S_\pi$  al variare della partizione di  $[a, b]$ . Se  $I' = I''$  si dice che la funzione  $f$  è integrabile su  $[a, b]$  e il loro comune valore è l'integrale di  $f$  su  $[a, b]$ .

È possibile, ora, provare il seguente teorema, che estende il Teorema 3.6.

**TEOREMA 6.32** Se  $f$  è una funzione continua su  $[a, b]$  allora  $f$  è ivi integrabile.

**DIMOSTRAZIONE** È una facile conseguenza delle proprietà globali delle funzioni continue sugli intervalli limitati e chiusi. Sappiamo infatti che  $f$  è limitata (Teorema 4.16) e uniformemente continua (Teorema 6.30), dunque dato  $\varepsilon > 0$  vi è un  $\delta > 0$  tale che

$$\text{se } x, x' \in [a, b] \text{ e } |x - x'| < \delta \text{ allora } |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Considerando una partizione di  $[a, b]$  in  $n$  intervalli di eguale ampiezza, se indichiamo con  $s_n$  e  $S_n$  rispettivamente la somma inferiore e superiore relativa a tale partizione, si avrà, quando  $n > (b - a)/\delta$ :

$$S_n - s_n = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a).$$

Ricordando allora il Teorema 3.3 la tesi segue immediatamente.

Per esempio, le funzioni

$$(a) \quad e^x, \quad (b) \quad \text{sen } x, \quad (c) \quad \text{sen } x^2,$$

$$(d) \quad x \text{ sen } x, \quad (e) \quad x \ln x, \quad (f) \quad \text{sen } \frac{1}{x},$$

sono tutte uniformemente continue sull'intervallo chiuso  $[1, 2]$ . Sull'intervallo  $[1, \infty)$  le funzioni (b) ed (f) sono uniformemente continue (hanno derivata limitata), mentre le funzioni (a), (c), (d) ed (e) non lo sono, anche se per verificare questi fatti occorrono alcuni calcoli (per la funzione (d) si faccia uso del fatto che il rapporto incrementale è massimo dove la funzione si annulla). È chiaro che le funzioni (a), (b), (c), (d) sono uniformemente continue su  $[0, 1]$ ; che cosa si può dire per le funzioni (e) ed (f) su  $(0, 1)$ ?

## Equazioni differenziali

---

Molti importanti problemi della fisica e dell'ingegneria – ma anche della chimica, della biologia, delle scienze sociali e di altre discipline ancora – quando sono formulati in termini matematici richiedono la determinazione di una funzione che soddisfi a una equazione in cui sono coinvolte le derivate della funzione incognita. Tali equazioni si chiamano *equazioni differenziali*.

L'esempio più familiare è forse dato dalla legge di Newton

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = F \left( t, x(t), \frac{dx(t)}{dt} \right)$$

che governa il moto  $x(t)$  di una particella di massa  $m$  sulla quale agisce una forza  $F$ , funzione, in generale, del tempo  $t$ , della posizione  $x(t)$  e della velocità  $\frac{dx(t)}{dt}$  della particella.

La formula precedente si può scrivere più sinteticamente <sup>(1)</sup>

$$mx'' = F(t, x, x'),$$

oppure, alla maniera dei fisici,

$$m\ddot{x} = F(t, x, \dot{x}).$$

Per esempio, se la forza è dovuta unicamente alla gravità, si ha

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -mg \tag{7.1}$$

e integrando la (7.1) si trova

$$\frac{dx(t)}{dt} = -gt + A, \quad x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + At + B,$$

ove  $A$  e  $B$  sono due costanti che si possono determinare specificando altre condizioni del moto: per esempio, assegnando posizione e velocità iniziali della particella.

---

<sup>(1)</sup>Occorre però prestare attenzione in quanto nelle formule che seguono compaiono simboli quali  $m$ ,  $t$ ,  $x$ ,  $\dot{x}$  che denotano entità ben diverse tra loro:  $m$  è una costante che dipende dai dati fisici del problema,  $t$  è la variabile indipendente (il tempo), mentre  $x$  e  $\dot{x}$  indicano la posizione e la velocità della particella e sono dunque due funzioni di  $t$ .

Altri esempi di equazioni differenziali sono dati dalla legge di carica  $Q(t)$  di un condensatore di capacità  $C$ , in un circuito di induttanza  $L$  e resistenza  $R$ , con una forza elettromotrice applicata  $E(t)$ :

$$L \frac{d^2 Q(t)}{dt^2} + R \frac{dQ(t)}{dt} + \frac{1}{C} Q(t) = E(t), \quad (7.2)$$

e dall'equazione di decadimento di una sostanza radioattiva

$$\frac{dK(t)}{dt} = -\alpha K(t), \quad (7.3)$$

ove  $\alpha$  è una data costante.

Equazioni come le (7.1) (7.2), (7.3), in cui le incognite sono funzioni di una variabile, si dicono *equazioni differenziali ordinarie* per distinguerle dalle equazioni, come quella di Laplace o della corda vibrante (Formule (5.25), (5.29)) in cui la funzione incognita dipende da più variabili indipendenti. In questo capitolo saranno studiate unicamente le equazioni differenziali ordinarie.

L'*ordine* di una equazione differenziale ordinaria è l'ordine massimo delle derivate della funzione incognita coinvolte nell'equazione; così le (7.1) e (7.2) sono di secondo ordine, mentre la (7.3) è di primo ordine. Una equazione differenziale si dice posta in *forma normale* se è risolta rispetto alla derivata di ordine massimo, cioè è del tipo

$$x^{(n)} = f(t, x, x', x'', \dots, x^{(n-1)}), \quad (7.4)$$

ove  $f$  è una assegnata funzione di  $n + 1$  variabili e  $x(t)$  è la funzione incognita. Studieremo solo equazioni di questo tipo. Per *soluzione* in un intervallo  $\alpha < t < \beta$  di una equazione differenziale come la (7.4) si intende una funzione  $\phi(t)$  derivabile  $n$  volte per  $\alpha < t < \beta$  tale che

$$\phi^{(n)}(t) = f(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(n-1)}(t)) \quad \text{per ogni } t \in (\alpha, \beta).$$

Per esempio, la funzione  $K(t) = ce^{-\alpha t}$ , ove  $c$  è una qualunque costante, è soluzione dell'equazione (7.3) su tutta la retta reale.

## 7.1 Equazioni del primo ordine

In questa sezione si presentano le problematiche relative alle equazioni differenziali mediante alcuni esempi opportuni. Si vedrà che in certi casi (peraltro pochi) si riesce a determinare la soluzione esplicita del problema esprimendola tramite una formula.

In realtà, per studiare un fenomeno descritto da una equazione differenziale, spesso non si richiede la determinazione esplicita della soluzione, ma solo una attenta *analisi qualitativa* della stessa, del tipo "scoppia o non scoppia?" oppure "diviene stabile o instabile?" Per questo si è ritenuto opportuno presentare diversi esempi nei quali, avvalendosi delle semplici tecniche introdotte per lo studio delle funzioni, si riesce a dare un'idea qualitativa del fenomeno in esame; come si vedrà il comportamento della soluzione dipende, oltre che dalla legge, anche dalle cosiddette *condizioni iniziali*.

Vi è anche una terza tecnica che consente, con le dovute limitazioni, di risolvere queste equazioni: è quella basata sui *metodi numerici*, dei quali daremo qui solo qualche breve cenno; essi hanno acquistato una importanza notevole in relazione all'imponente sviluppo degli strumenti di calcolo.

Consideriamo l'equazione differenziale

$$x' + ax = 0 \quad (7.5)$$

con  $a$  numero reale assegnato; si trova subito che la funzione  $x(t) = e^{-at}$  ne è soluzione (per  $-\infty < t < +\infty$ ). Ogni altra soluzione è espressa dalla formula

$$x(t) = ce^{-at} \quad (7.6)$$

ove  $c$  è una costante arbitraria.

Infatti se  $x(t)$  risolve l'equazione (7.6) si ha  $\frac{d}{dt}(x(t)e^{at}) = [x'(t) + ax(t)]e^{at} = 0$ , da cui  $x(t)e^{at} = c$ .

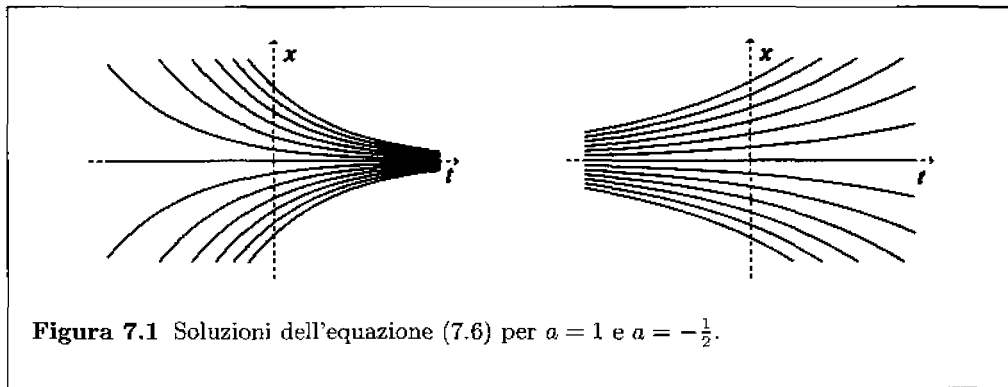


Figura 7.1 Soluzioni dell'equazione (7.6) per  $a = 1$  e  $a = -\frac{1}{2}$ .

La (7.6) fornisce, pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione (7.5) o, come si dice, ne costituisce l'*integrale generale*. Geometricamente la (7.6) descrive una famiglia di curve, dette *curve integrali* della equazione differenziale; per ogni punto  $(t_0, x_0)$  del piano passa una e una sola curva integrale (imponendo  $x(t_0) = x_0$  nell'equazione (7.6) si ottiene  $c = x_0 e^{at_0}$  e, dunque,  $x(t) = x_0 e^{a(t_0-t)}$  è l'equazione di questa curva). In altri termini la *condizione iniziale*

$$x(t_0) = x_0$$

determina univocamente una soluzione di (7.5).

Si consideri ora l'equazione

$$x' + ax = g(t), \quad (7.7)$$

e si osservi che, moltiplicando ambo i membri per  $e^{at}$ , il primo membro di essa si può scrivere come derivata della funzione  $e^{at}x(t)$ ; l'equazione (7.7) equivale dunque a

$$\frac{d}{dt}(e^{at}x(t)) = e^{at}g(t). \quad (7.8)$$

Il termine  $e^{at}$  si dice *fattore integrante*; infatti la (7.8) può essere integrata:

$$e^{at}x(t) = \int e^{at}g(t)dt + C,$$

vale a dire

$$x(t) = e^{-at} \int e^{at} g(t) dt + C e^{-at}; \quad (7.9)$$

in questa formula si è denotato con  $\int e^{at} g(t) dt$  una qualunque primitiva di  $e^{at} g(t)$ .

**ESEMPIO 7.1** Si consideri l'equazione  $x' = x - t$ ; si ha allora  $a = -1$ ,  $g(t) = -t$ . Sostituendo in (7.9) si ricava

$$x(t) = e^t \int (-te^{-t}) dt + C e^t$$

e integrando per parti

$$x(t) = e^t \left( te^{-t} - \int e^{-t} dt \right) + C e^t = (t+1) + C e^t.$$

Nella Figura 7.2 sono disegnate alcune delle curve integrali di questa equazione.

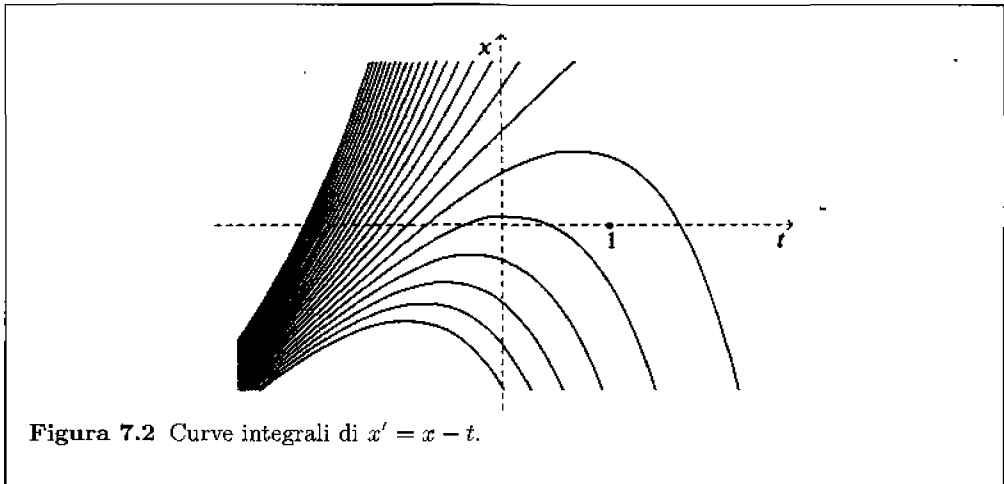


Figura 7.2 Curve integrali di  $x' = x - t$ .

### TEOREMA DI ESISTENZA E DI UNICITÀ

Si consideri una generica equazione del primo ordine

$$x' = f(t, x) \quad (7.10)$$

con la condizione iniziale

$$x(t_0) = x_0. \quad (7.11)$$

Il problema di trovare per la (7.10) una soluzione che verifichi la condizione (7.11) si dice *problema ai valori iniziali* o *problema di Cauchy*.

Sorgono naturali le questioni seguenti:

- 1) esiste una soluzione  $x(t)$  del problema di Cauchy (7.10), (7.11)?
- 2) tale soluzione è unica?
- 3) come si può rappresentare la soluzione?

Nel caso in cui  $f(t, x)$  sia lineare in  $x$  si è potuta facilmente ottenere una rappresentazione esplicita della soluzione ed è quindi stato possibile rispondere a tali quesiti; nel caso non lineare la situazione è diversa, in quanto non è possibile (tranne in casi molto particolari) determinare analiticamente la soluzione. Questo fatto ha due importanti conseguenze: anzitutto è necessario studiare *in astratto* quali condizioni occorre imporre per poter risolvere le questioni 1) e 2) relative all'esistenza e alla unicità<sup>(2)</sup>; in secondo luogo, in assenza di una formula esplicita, diviene particolarmente importante determinare metodi che consentano di studiare la soluzione dal punto di vista qualitativo e di approssimarla numericamente.

Nel caso di una equazione non lineare  $x' = f(t, x)$  interviene, inoltre, un nuovo fenomeno: la soluzione di un problema di Cauchy può essere definita in un intervallo che, in generale, dipende non più unicamente dalla funzione  $f(t, x)$  ma anche dalle condizioni iniziali. Può così capitare che tale soluzione sia definita in una regione del piano  $t, x$  ben più ristretta della regione di "regolarità" del secondo membro  $f(x, t)$ . L'esempio seguente mostra in modo drastico questa evenienza.



**ESEMPIO 7.2** Si consideri l'equazione differenziale

$$x' = 2tx^2; \quad (7.12)$$

tale equazione soddisfa ampiamente, per ogni coppia  $(t_0, x_0)$ , alle condizioni che saranno esposte nel Teorema 7.3 e che garantiscono esistenza e unicità della soluzione "locale" del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2tx^2 \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

È facile tuttavia verificare i fatti seguenti.

(a) La funzione

$$x(t) = \frac{1}{1-t^2}$$

è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2tx^2 \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad (7.13)$$

<sup>(2)</sup>Nell'Esercizio 7.1.11 si mostra in maniera dettagliata come il problema della unicità non possa considerarsi scontato.



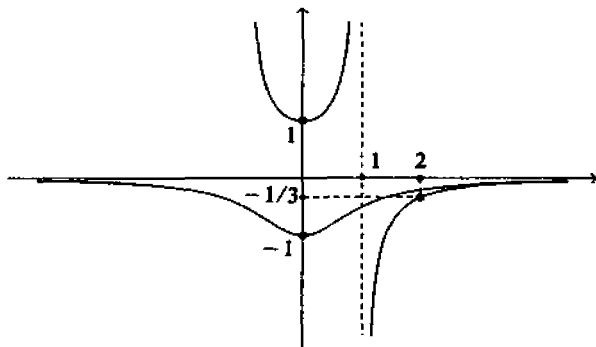


Figura 7.3 Soluzioni dei problemi di Cauchy (7.13), (7.14), (7.15).

solamente nell'intervallo  $(-1, 1)$ ; infatti  $\lim_{t \rightarrow \pm 1} x(t) = +\infty$ , dunque  $(-1, 1)$  è il più grande intervallo in cui (7.13) ha soluzione.

(b) La stessa funzione

$$x(t) = \frac{1}{1-t^2}$$

è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2tx^2 \\ x(2) = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (7.14)$$

solo nell'intervallo  $(1, +\infty)$  ed esso è il più grande intervallo in cui il problema (7.14) ha soluzione.

(c) Il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2tx^2 \\ x(0) = -1 \end{cases} \quad (7.15)$$

ha invece come soluzione

$$x(t) = -\frac{1}{1+t^2}$$

e tale funzione risolve la (7.15) per ogni  $t$  reale.

Per quanto riguarda l'esistenza "locale" delle soluzioni del problema di Cauchy si può dimostrare il teorema seguente.

**TEOREMA 7.3** Se  $f(t, x)$  è una funzione continua su un aperto  $D$  del piano  $t, x$  e ivi ha derivata parziale rispetto a  $x$  continua, allora per ogni punto  $(t_0, x_0)$  di  $D$  passa una e una sola curva integrale della equazione  $x' = f(t, x)$ .

Esiste, dunque, un intervallo  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  sul quale è definita una soluzione  $x(t)$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

e tale soluzione è unica.

Il teorema ha carattere locale, nel senso che assicura l'esistenza e l'unicità della soluzione in un opportuno intorno del punto iniziale  $t_0$ , ma non fornisce informazioni sulla ampiezza di tale intorno. In realtà si può dire di più: se, per esempio,  $[a, b] \times [c, d]$  è un rettangolo contenuto in  $D$  e contenente il punto iniziale  $(t_0, x_0)$  si può dimostrare che la soluzione  $x(t)$  si può prolungare in modo che il suo grafico raggiunga i bordi del rettangolo. Può così avvenire che la soluzione risulti definita nell'intero intervallo  $[a, b]$  (Figura 7.4 (b)) oppure esisterà un intervallo "massimale"  $[a_1, b_1]$  contenuto in  $(a, b)$  tale che  $x(a_1)$  e  $x(b_1)$  sono uguali a  $c$  oppure a  $d$ , mentre per  $a_1 < t < b_1$  si ha  $c < x(t) < d$  (Figura 7.4 (a)).

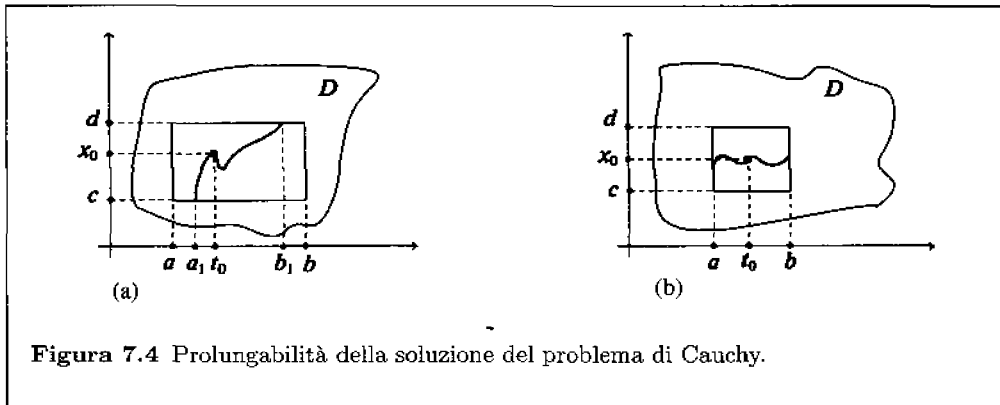


Figura 7.4 Prolungabilità della soluzione del problema di Cauchy.

In particolare si osservi che se  $f(t, x)$  è continua, assieme alla sua derivata parziale rispetto a  $x$ , su tutto il piano e se si riesce a provare che le soluzioni di  $x' = f(t, x)$  sono limitate, allora tali soluzioni sono definite per ogni  $t$ .

Osserviamo finalmente che se  $f$  è definita su una striscia  $[a, b] \times \mathbb{R}$  ed è limitata, oltre che continua, allora è possibile dimostrare che le soluzioni sono definite sull'intero intervallo  $[a, b]$ . È questo il caso delle equazioni lineari (vedi pag. 304).

## ANALISI QUALITATIVA DELLE SOLUZIONI

Mostreremo, tramite alcuni esempi, come sia possibile in molti casi studiare il comportamento qualitativo delle soluzioni di una equazione differenziale utilizzando direttamente l'equazione stessa e senza usufruire di una rappresentazione analitica della soluzione.

**ESEMPIO 7.4** Si consideri nuovamente l'equazione (Esempio 7.1)

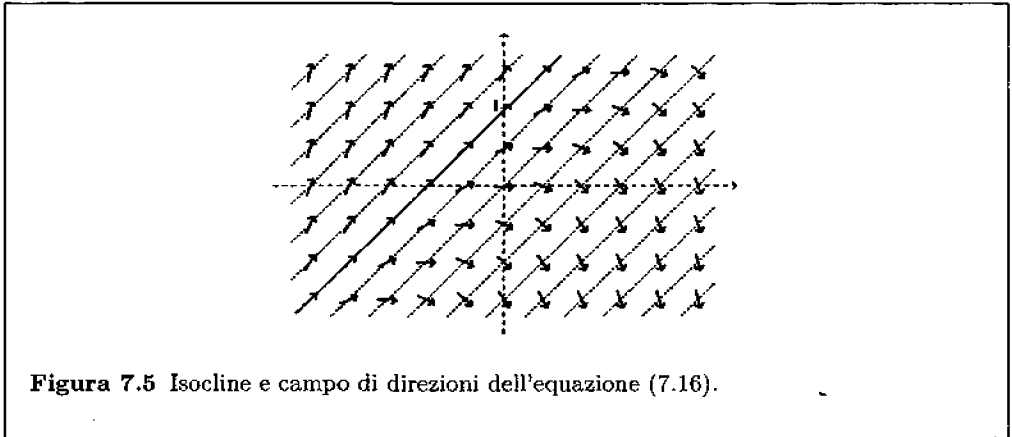
$$x' = x - t. \quad (7.16)$$

Ad essa è applicabile, su tutto il piano, il teorema di esistenza e di unicità, dunque per ogni punto del piano passa una e una sola soluzione di (7.16). Determiniamo le *curve isocline*, vale a dire le curve sulle quali le soluzioni dell'equazione hanno tutte la stessa pendenza; nel caso in esame esse sono le rette

$$x = t + C, \quad C = \text{costante}.$$

Sui punti della isoclina  $x = t$  le soluzioni hanno tangente orizzontale, sono crescenti per  $x > t$ , decrescenti per  $x < t$ , dunque sulla retta  $x = t$  hanno dei punti di massimo.

Si noti, inoltre, che  $x = t + 1$  è soluzione dell'equazione data e che per  $x > t + 1$  si ha  $x' > 1$ , mentre per  $x < t + 1$  si ha  $x' < 1$ , dunque le soluzioni intersecano ogni isoclina diversa da  $x = t + 1$  (Figura 7.5).



**Figura 7.5** Isocline e campo di direzioni dell'equazione (7.16).

Determiniamo le regioni di convessità e di concavità delle soluzioni; derivando l'equazione si ha

$$x'' = x' - 1 = x - 1 - t$$

e dunque, nel semipiano  $x > 1 + t$  le soluzioni sono convesse mentre nel semipiano  $x < 1 + t$  sono concave.

Le informazioni ottenute sono sufficienti a determinare l'andamento delle curve integrali riprodotto nella Figura 7.2.



**ESEMPIO 7.5** Studiamo ora l'equazione

$$x' = t \left( 1 + \frac{1}{x} \right), \quad x \neq 0. \quad (7.17)$$

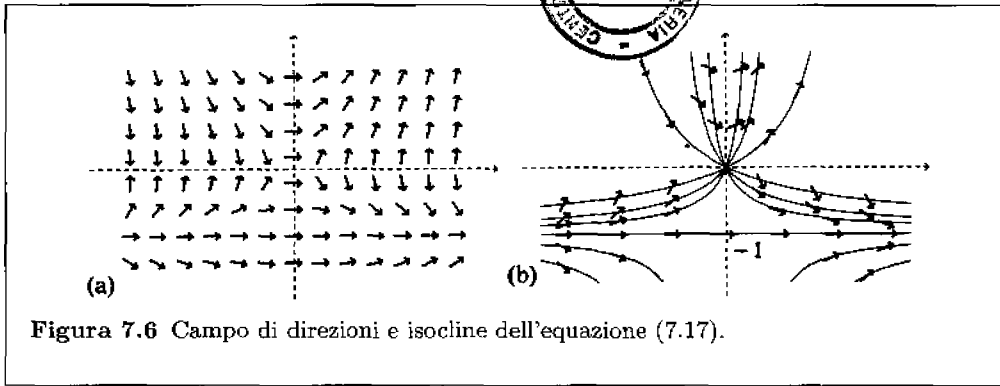


Figura 7.6 Campo di direzioni e isocline dell'equazione (7.17).

Il teorema di esistenza e di unicità è applicabile in ogni punto dei due semipiani  $x > 0$  e  $x < 0$ . Le curve isocline sono le iperboli di equazione

$$x = \frac{t}{k - t}$$

e hanno per asintoti le rette  $x = -1$ ,  $t = k$  (Figura 7.6 (b)).

Si ha  $x'' = \frac{(x+1)(x-t)(x+t)}{x^3}$  e quindi il piano può essere suddiviso nelle regioni di convessità e di concavità dalle soluzioni mostrate nella Figura 7.7.

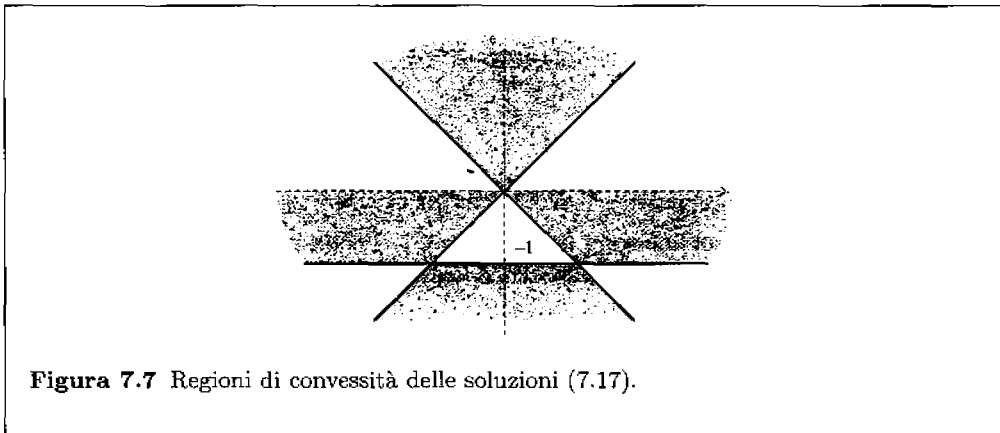


Figura 7.7 Regioni di convessità delle soluzioni (7.17).

Si noti che per  $t < 0$  e  $x > 0$  oppure  $x < -1$  le soluzioni sono decrescenti, mentre sono crescenti per  $t < 0$  e  $-1 < x < 0$ ; esse, inoltre, sono simmetriche rispetto alla retta  $t = 0$ , in quanto la funzione  $t(1 + 1/x)$  è dispari in  $t$ , dunque se  $x(t)$  è soluzione anche  $x(-t)$  lo è.

La retta  $x = -1$  è una curva integrale dell'equazione e quindi, per il teorema di unicità, non viene attraversata da alcuna altra curva integrale.

Si osservi inoltre che per  $x > 0$  si ha  $|x'| > |t|$  (vale a dire  $x' \rightarrow +\infty$  per  $t \rightarrow +\infty$ ) dunque non vi sono asintoti obliqui.

Nella Figura 7.8 sono riprodotte alcune curve integrali, il cui andamento può essere determinato sulla base delle considerazioni precedenti.

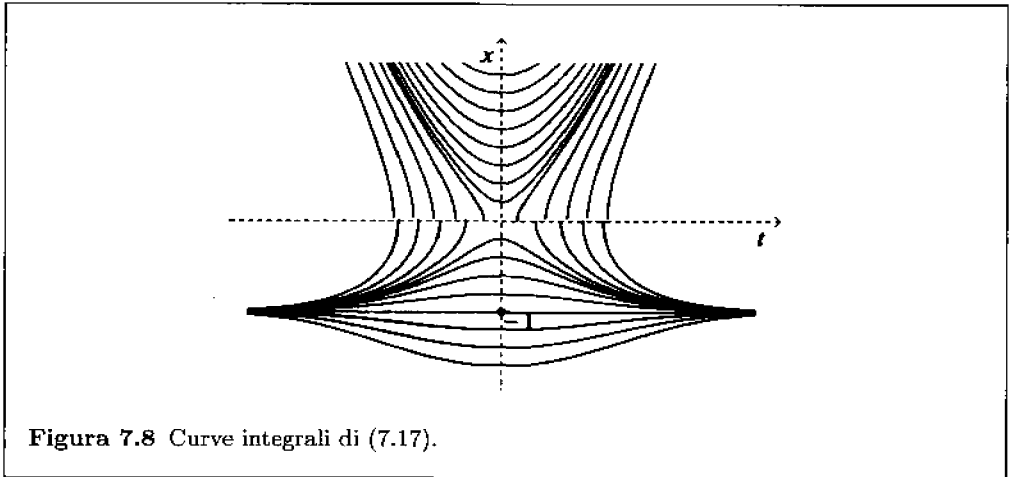


Figura 7.8 Curve integrali di (7.17).

Come vedremo l'equazione differenziale data si può integrare analiticamente; le soluzioni  $x(t)$  verificano l'equazione

$$x - \ln|x+1| = \frac{1}{2}t^2 + C$$

ma da essa non è possibile ricavare facilmente informazioni qualitative sulle soluzioni  $x(t)$ .



**ESEMPIO 7.6** Si consideri l'equazione

$$x' = 4x(1-x). \tag{7.18}$$

In questo caso le curve isocline sono le rette  $x = C$ ; vi sono inoltre le soluzioni stazionarie  $x = 0$ ,  $x = 1$  che separano il piano  $x, t$  in tre zone in ciascuna delle quali  $x'$  ha segno costante.

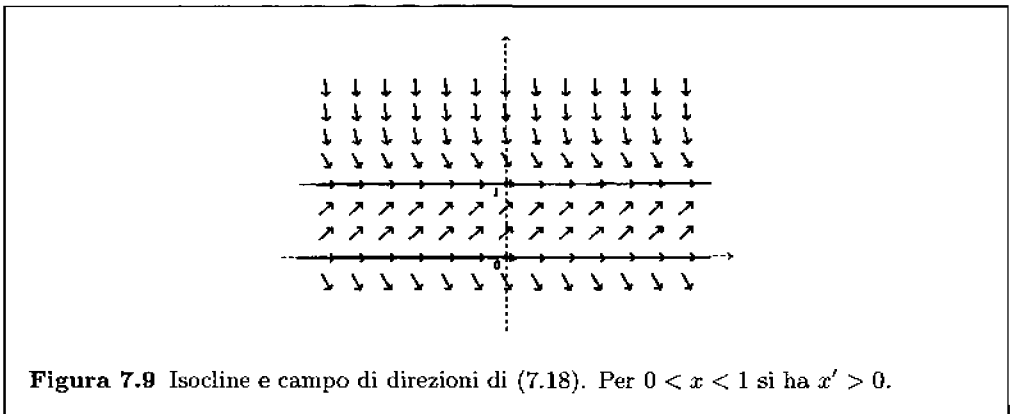


Figura 7.9 Isocline e campo di direzioni di (7.18). Per  $0 < x < 1$  si ha  $x' > 0$ .

Inoltre si ha  $x'' = 16x(1-x)(1-2x)$  e dunque  $x > 1$  e per  $0 < x < \frac{1}{2}$  le soluzioni sono convesse.

È importante in questo esempio studiare il comportamento asintotico delle soluzioni; si consideri una curva integrale  $x(t)$  uscente da un punto di coordinate  $(0, A)$  con  $0 < A < 1$ . Per quanto visto,  $x(t)$  è crescente ed è contenuta nella striscia  $0 < x < 1$  (infatti  $x = 1$  è soluzione); per il teorema di esistenza si ha, quindi, che  $x(t)$  esiste per ogni  $t$ . Se  $x_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$  (tale limite esiste in quanto la funzione è monotona) si deve avere  $\lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$  e allora, passando al limite nell'equazione, si ha  $0 = 4x_0(1-x_0)$ , vale a dire  $x_0 = 1$ , cioè le curve integrali hanno la soluzione  $x_0 = 1$  come asintoto. In modo analogo si studia il comportamento delle traiettorie che giacciono nel semipiano  $x > 1$ .

Si noti il diverso comportamento delle curve integrali attorno alla soluzione stazionaria  $x = 0$ ; al crescere di  $t$  esse si allontanano da tale soluzione (Figura 7.10).

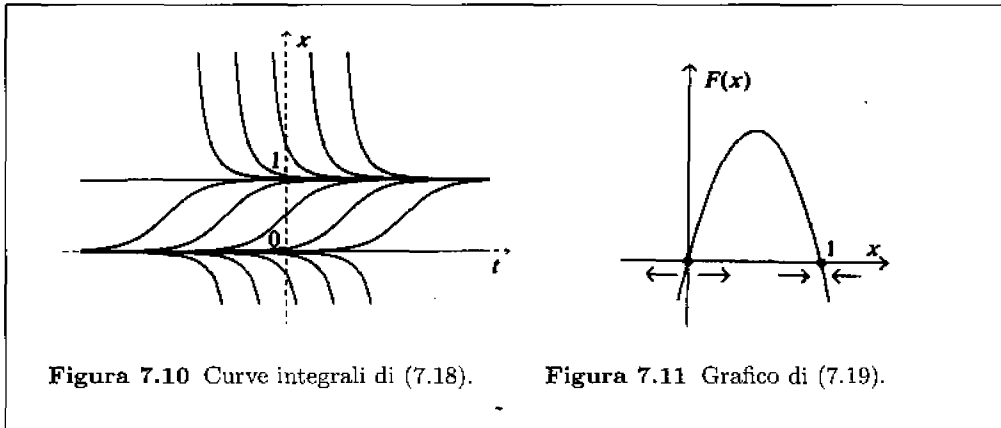


Figura 7.10 Curve integrali di (7.18).

Figura 7.11 Grafico di (7.19).

Si può interpretare tale differente comportamento tracciando il grafico (Figura 7.11) della funzione

$$F(x) = 4x(1-x). \quad (7.19)$$

Per  $x = 0$  la curva  $F(x)$  passa da valori negativi (le soluzioni decrescono) a valori positivi (le soluzioni crescono); il contrario accade nel punto  $x = 1$ .

La soluzione stazionaria  $x = 0$  si dice dunque *instabile*, mentre la soluzione  $x = 1$  si dice *asintoticamente stabile*.

## RISOLUZIONE DI ALCUNI TIPI NOTEVOLI DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Vengono studiate alcune classi di equazioni differenziali la cui soluzione può essere ricondotta a "quadrature", cioè al calcolo di opportuni integrali: si tratta di un problema che in passato è stato oggetto di molte ricerche e la cui soluzione, nel caso generale, è un problema ancora aperto.

## Equazioni lineari

Studiamo l'equazione differenziale lineare

$$x' + p(t)x = g(t) \quad (7.20)$$

ove  $p$  e  $g$  sono funzioni assegnate che supporremo continue per  $\alpha < t < \beta$ . Una tale equazione si dice *lineare* in quanto essa dipende dalla funzione incognita e dalla sua derivata in modo lineare.

Le equazioni (7.5) e (7.7) rientrano in questa classe.

Per analogia con il metodo utilizzato nel caso (7.7) cerchiamo un *fattore integrante*  $\mu(t)$  tale che, se si moltiplicano ambo i membri dell'equazione data per  $\mu(t)$ , il primo membro si possa scrivere come derivata di  $\mu(t)x(t)$ . Richiediamo dunque:

$$\mu(t)[x'(t) + p(t)x(t)] = \frac{d}{dt}[\mu(t)x(t)] = \mu(t)x'(t) + \mu'(t)x(t), \quad (7.21)$$

e imponiamo anche che sia  $\mu(t) > 0$ ; dalla (7.21) si ricava

$$\frac{\mu'(t)}{\mu(t)} = p(t)$$

cioè

$$\frac{d}{dt} \ln(\mu(t)) = p(t).$$

Un fattore integrante  $\mu(t)$  è quindi dato dalla funzione

$$\mu(t) = e^{\int p(t) dt} \quad (7.22)$$

ove, di nuovo, il simbolo  $\int p(t) dt$  indica una qualunque primitiva di  $p(t)$ . Con tale scelta di  $\mu$  l'equazione (7.20) equivale a

$$\mu(t)[x'(t) + p(t)x(t)] = \frac{d}{dt}[\mu(t)x(t)] = \mu(t)g(t),$$

che può essere integrata ottenendo

$$\mu(t)x(t) = \int \mu(t)g(t) dt + C,$$

vale a dire

$$x(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[ \int \mu(t)g(t) dt + C \right] = e^{-\int p(t) dt} \left[ \int g(t)e^{\int p(t) dt} dt + C \right]. \quad (7.23)$$

La (7.23) fornisce, dunque, la soluzione generale dell'equazione lineare (7.20).

Si noti che si può scegliere una qualunque primitiva per rappresentare gli integrali indefiniti; modificare tale primitiva equivale a cambiare la costante arbitraria  $C$  <sup>(3)</sup>.

<sup>(3)</sup>Infatti se  $\phi(t)$ ,  $\phi(t) + M$  sono due primitive di  $p(t)$  si ha

$$e^{(-\phi(t)+M)} \left[ \int g(s)e^{(\phi(s)+M)} ds + C \right] = e^{-\phi(t)} \left[ \int g(s)e^{\phi(s)} ds + Ce^{-M} \right].$$

Si osservi anche che una condizione del tipo

$$x(t_0) = x_0, \quad \alpha < t_0 < \beta$$

consente di determinare in modo unico la costante  $C$ . Infatti, assumendo come primitive quelle che si annullano in  $t_0$ , cioè

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t p(r) dr} \left[ \int_{t_0}^t g(s) e^{\int_{t_0}^s p(r) dr} ds + C \right],$$

dalla condizione  $x(t_0) = x_0$  si ottiene  $C = x_0$ . Dunque, il problema ai valori iniziali

$$\begin{cases} x' + xp(t) = g(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ha soluzione unica per  $\alpha < t < \beta$ , che può essere scritta nel modo seguente

$$x(t) = \int_{t_0}^t e^{-\int_s^t p(r) dr} g(s) ds + x_0 e^{-\int_{t_0}^t p(r) dr}.$$

—≡—

**ESEMPIO 7.7** Si consideri il problema

$$\begin{cases} x' - 2xt = 1 \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (7.24)$$

Determiniamo il fattore integrante:

$$\mu(t) = e^{\int (-2t) dt} = e^{-t^2}.$$

L'equazione è allora equivalente a  $\frac{d}{dt}(x(t)e^{-t^2}) = e^{-t^2}$ , vale a dire

$$x(t)e^{-t^2} = \int e^{-t^2} dt + C.$$

Per determinare la costante  $C$  conviene scegliere come primitiva di  $e^{-t^2}$  il suo integrale avente primo estremo uguale a 0; moltiplicando ambo i membri per  $e^{t^2}$  si ha:

$$x(t) = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + C e^{t^2}, \quad (7.25)$$

e la condizione iniziale  $x(0) = 1$  impone che sia

$$1 = x(0) = 1 \cdot 0 + C \cdot 1,$$

da cui  $C = 1$ . Quindi la soluzione del problema (7.24) è

$$x(t) = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + e^{t^2}.$$



Si noti che l'integrale di  $e^{-s^2}$  non si può esprimere in termini di funzioni elementari<sup>(4)</sup>; questo esempio mostra come, anche in casi molto semplici quale quello in esame, sia necessario lasciare scritta la soluzione in forma integrale.

Nella Figura 7.12 è riportato il grafico di alcune curve integrali dell'equazione qui studiata.

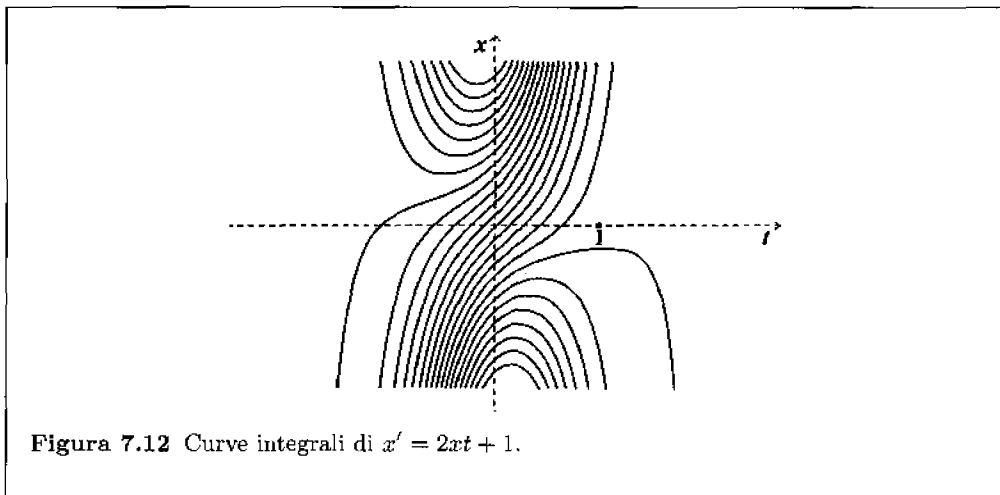


Figura 7.12 Curve integrali di  $x' = 2xt + 1$ .

### Equazioni a variabili separabili

Sono le equazioni del tipo

$$x' = f(x)g(t), \quad (7.26)$$

in cui cioè il secondo membro è il prodotto di due fattori l'uno dipendente dalla sola  $t$  e l'altro dipendente dalla sola  $x$ . L'uso della notazione di Leibniz  $\frac{dx}{dt}$  per la derivata di  $x(t)$  consente di ottenere magicamente la risoluzione analitica di tali equazioni: trattando  $dx$  e  $dt$  come entità indipendenti si possono "separare le variabili"

$$\frac{dx}{f(x)} = g(t)dt,$$

quindi si pone un simbolo di integrazione a ciascun membro

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int g(t)dt$$

e calcolando le primitive ... si risolve il problema!

Per esempio, per l'equazione

$$\frac{dx}{dt} = tx^2,$$

<sup>(4)</sup>La funzione  $\text{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-s^2} ds$  è nota come *funzione d'errore* (erroris functio) e i suoi valori approssimati sono riportati in ogni tavola di integrali.

separando le variabili si ha

$$\frac{dx}{x^2} = t dt$$

e integrando

$$-\frac{1}{x} = \frac{1}{2}t^2 + C,$$

cioè

$$x(t) = \frac{-1}{C + t^2/2}, \quad C \text{ costante arbitraria.} \quad (7.27)$$

Di fatto, derivando la (7.27), si ha  $x' = \frac{t}{(C + t^2/2)^2}$ , dunque  $x' = tx^2$ , trovando così conferma che le funzioni (7.27) sono soluzioni dell'equazione data.

In effetti il procedimento informale seguito per risolvere l'equazione si giustifica rigorosamente.

**TEOREMA 7.8** Siano  $f$  e  $g$  funzioni continue. Se  $f$  si annulla in qualche punto  $x_0$  allora  $x(t) = x_0$  è soluzione stazionaria della (7.26). Siano  $F$  una primitiva di  $\frac{1}{f}$  e  $G$  una primitiva di  $g$ , cioè

$$F' = \frac{1}{f}, \quad G' = g;$$

allora ogni funzione derivabile  $x(t)$  tale che

$$F(x(t)) = G(t) + C, \quad C = \text{costante} \quad (7.28)$$

è una soluzione dell'equazione differenziale (7.26) <sup>(5)</sup>.

**DIMOSTRAZIONE** Derivando la (7.28), dalla regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$F'(x(t))x'(t) = G'(t),$$

cioè

$$\frac{x'(t)}{f(x(t))} = g(t)$$

che equivale all'equazione  $x' = f(x)g(t)$ . □

Si noti che il teorema non afferma che ogni soluzione della (7.26) si può ottenere nella forma (7.28). Per esempio, per l'equazione

$$x' = x^{2/3}$$

il metodo di separazione delle variabili fornisce le soluzioni  $x(t) = \frac{(t+C)^3}{27}$ , con  $C$  costante arbitraria; tuttavia l'equazione ha anche la soluzione stazionaria  $x = 0$ , e anche soluzioni che sono a tratti di un tipo o dell'altro.

<sup>(5)</sup>Sia nella (7.26), sia nella (7.28) si assume tacitamente che la funzione incognita  $x(t)$  assuma valori appartenenti all'intervallo in cui  $f$  è continua.

Osserviamo anche che nella (7.28) può non essere possibile invertire la funzione  $F$  e quindi non è detto che tale formula si riesca a ottenere effettivamente una forma esplicita della soluzione.



**ESEMPIO 7.9** Si consideri nuovamente l'equazione (7.17)

$$x' = t \left( 1 + \frac{1}{x} \right);$$

separando le variabili e integrando

$$\int \frac{x}{1+x} dx = \int t dt$$

si perviene a

$$x - \ln(|1+x|) = \frac{1}{2}t^2 + C; \quad (7.29)$$

dalla (7.33) non è tuttavia possibile ricavare  $x$  in funzione di  $t$ .



### Equazioni autonome

Ogni equazione del tipo

$$x' = F(x),$$

si dice *autonoma* in quanto non vi figura esplicitamente la variabile indipendente  $t$ . Si supponrà che la funzione  $F$  sia definita ovunque e che sia di classe  $C^1$ .

Queste equazioni possono essere risolte analiticamente come equazioni a variabili separabili ((7.26) con  $g(t) = 1$ ), ma è spesso più utile determinare l'andamento qualitativo delle loro soluzioni.

Una prima osservazione riguarda il fatto che se  $x(t)$  è soluzione allora anche  $x(t+T)$  lo è, qualunque sia  $T$ ; vale a dire costruita una curva integrale se ne possono ottenere altre per semplice traslazione. Basterà, dunque, studiare il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = F(x) \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (7.30)$$

Studiando poi gli zeri di  $F(x)$  si ha che, se  $F(x_1) = 0$ , la retta  $x = x_1$  è una soluzione dell'equazione  $x' = F(x)$ ; tali soluzioni si dicono *stazionarie*.

Ragionando come nell'Esempio 7.7 si vede allora che se  $F(x_0) < 0$  ed esistono zeri di  $F(x)$  minori di  $x_0$ , allora la soluzione  $x(t)$  di (7.30) esiste per ogni  $t$  e si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_1$$

(con  $x_1$  viene indicato il massimo fra gli zeri di  $F$  che sono minori di  $x_0$ ).

Analogamente se  $F(x_0) > 0$  e vi sono zeri di  $F(x)$  maggiori di  $x_0$  (sia  $x_2$  il minimo di tali zeri), la soluzione  $x(t)$  del problema (7.30) è definita per ogni  $t$  e si ha

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_2.$$

Si noti, dunque, che gli integrali stazionari  $x = x_1$  sono asintoti, per  $t \rightarrow +\infty$ , di soluzioni  $x(t)$  "dall'alto" e "dal basso" solo se  $F(x) > 0$  per  $x < x_1$  e  $F(x) < 0$  per  $x > x_1$ : in tal caso  $x = x_1$  si dice *soluzione stazionaria asintoticamente stabile*; una condizione necessaria affinché ciò avvenga è ovviamente che risulti

$$F(x_1) = 0 \quad \text{e} \quad F'(x_1) < 0. \quad (7.31)$$

Al contrario gli integrali stazionari  $x = x_1$  con  $F(x) < 0$  per  $x < x_1$  e  $F(x) > 0$  per  $x > x_1$  (ciò accade, per esempio, quando  $F'(x_1) > 0$ ) si dicono *punti stazionari instabili* in quanto le soluzioni "si allontanano" da essi per  $t \rightarrow +\infty$ .

Nelle Figure 7.13, 7.14 sono disegnate le curve integrali relative alle equazioni

$$x' = x(1-x) \left( x - \frac{1}{2} \right), \quad (7.32)$$

$$x' = \frac{1}{2}(x^2 - 1). \quad (7.33)$$

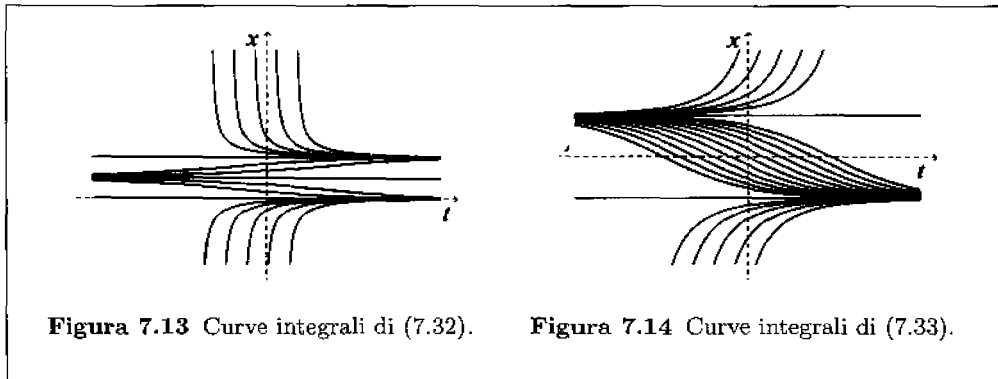


Figura 7.13 Curve integrali di (7.32).

Figura 7.14 Curve integrali di (7.33).

### Equazioni esatte

Si consideri una equazione differenziale della forma

$$A(t,x) + B(t,x)x' = 0; \quad (7.34)$$

se esiste una funzione  $F(t,x)$  tale che

$$\frac{\partial F}{\partial t} = A, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = B \quad (7.35)$$

e se  $x(t)$  è una soluzione di (7.34), dalla regola di derivazione della funzione composta si ottiene

$$0 = A(t,x) + B(t,x)x' = F_t(t,x) + F_x(t,x)x'(t) = \frac{d}{dt} F(t,x(t)).$$

Le curve integrali di (7.34) sono, dunque, tali che

$$F(t, x(t)) = C, \text{ con } C \text{ costante;}$$

esse sono allora le *curve di livello* della superficie  $z = F(t, x)$ .

Se le funzione  $A$  e  $B$  sono di classe  $C^1$  dal Teorema 5.7 si ottiene facilmente una condizione *necessaria* affinché esista una funzione  $F(t, x)$  che soddisfa le (7.35).

Siccome  $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t \partial x}$  deve infatti risultare

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (7.36)$$

Come si vedrà in seguito, con qualche restrizione sul dominio di definizione delle funzioni  $A$  e  $B$ , tale condizione è anche sufficiente.



**ESEMPIO 7.10** Si consideri l'equazione  $2tx^3 + 3t^2x^2x' = 0$ ; si vede direttamente che il primo fattore è la derivata parziale rispetto a  $t$  della funzione  $t^2x^3$ , mentre la stessa funzione derivata parzialmente rispetto a  $x$  dà  $3t^2x^2$ , che nella equazione è il coefficiente di  $x'$ . Per quanto detto sopra le curve integrali si possono così esprimere tramite la formula

$$t^2x^3 = C,$$

la quale può essere esplicitata e fornisce le soluzioni  $x = kt^{-2/3}$ .

Nel caso ora considerato la semplice ispezione dell'equazione ha consentito di trovare la funzione  $F$ ; in generale, però, la situazione è ben più complessa. Nell'esempio che segue illustriamo un metodo generale, sul quale torneremo nel Capitolo 10, che consente di costruire la funzione  $F$ .

**ESEMPIO 7.11** L'equazione

$$\frac{x}{t} + (\ln(xt) + 1)x' = 0 \quad (7.37)$$

verifica la condizione (7.36), in quanto  $\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{t}) = \frac{1}{t} = \frac{\partial}{\partial t}(\ln(xt) + 1)$ . Vediamo se si riesce a costruire una funzione  $F(t, x)$  per la quale si abbia

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{x}{t}, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \ln(xt) + 1. \quad (7.38)$$

Dalla prima delle (7.38) si ha che  $F$ , se esiste, deve essere della forma

$$F(t, x) = x \ln|t| + h(x) \quad (7.39)$$

ove  $h(x)$  è un'arbitraria funzione della sola  $x$ . Derivando parzialmente rispetto a  $x$  la (7.39) e tenendo conto della seconda Formula (7.38):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \ln|t| + h'(x) = \ln(xt) + 1.$$

Osservando che deve essere  $xt > 0$ , e dunque  $\ln(xt) = \ln|x| + \ln|t|$ , tale relazione diviene

$$h'(x) = \ln|x| + 1$$

che fornisce, integrando per parti,

$$h(x) = x \ln |x| - x + x + C = x \ln |x| + C.$$

Una funzione  $F(t, x)$  che verifica le (7.38) è quindi data da

$$F(t, x) = x[\ln |t| + \ln |x|] = x \ln |xt|$$

e, dunque, le curve integrali della (7.37) verificano l'equazione

$$x(t) \ln |tx(t)| = C.$$



## ESERCIZI

**7.1.1** Verificare che le seguenti funzioni (alcune delle quali sono in forma implicita) sono soluzioni delle corrispondenti equazioni differenziali:

- (a)  $x = 5t^2$ ,  $tx' = 2x$ ;  
 (b)  $x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$ ,  $x'' - 4x = 0$ ;  
 (c)  $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ ,  $x'' + \omega^2 x = 0$ ;  
 (d)  $t^2 = 2x^2 \ln x$ ,  $x' = \frac{xt}{x^2 + t^2}$ ;  
 (e)  $t^2 - tx + x^2 = C$ ,  $(t - 2x)x' = 2t - x$ .

**7.1.2** Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni immediatamente risolubili:

- (a)  $x' = 3 - 4t^2$  su  $(-\infty, +\infty)$   
 (b)  $x'' = \cos t + t$  su  $(-\infty, +\infty)$   
 (c)  $x' = \ln t + \frac{1}{\sqrt{2+t^2}}$  per  $t > 0$ .

**7.1.3** Trovare le soluzioni comuni alle due equazioni

$$\begin{aligned} x' &= x^2 + 2t - t^4 \\ x' &= -x^2 - x + 2t + t^2 + t^4 \end{aligned}$$

**7.1.4** Determinare un'equazione differenziale che abbia come curve integrali le funzioni  $x(t) = \frac{a + \cos t}{\sin t}$ , in  $0 < t < 2\pi$ , dove  $a$  è un parametro reale.

**7.1.5** Verificare mediante uno studio qualitativo che il comportamento delle soluzioni delle equazioni

- (a)  $x' = x^2 - t^2 - 1$ ; (b)  $x' = t^2 + x^2$ ;  
 (c)  $x' = t - t/x$ ; (d)  $x' = \frac{t+x}{t-x}$ ,

è quello indicato nelle Figure 7.15 - 7.18.

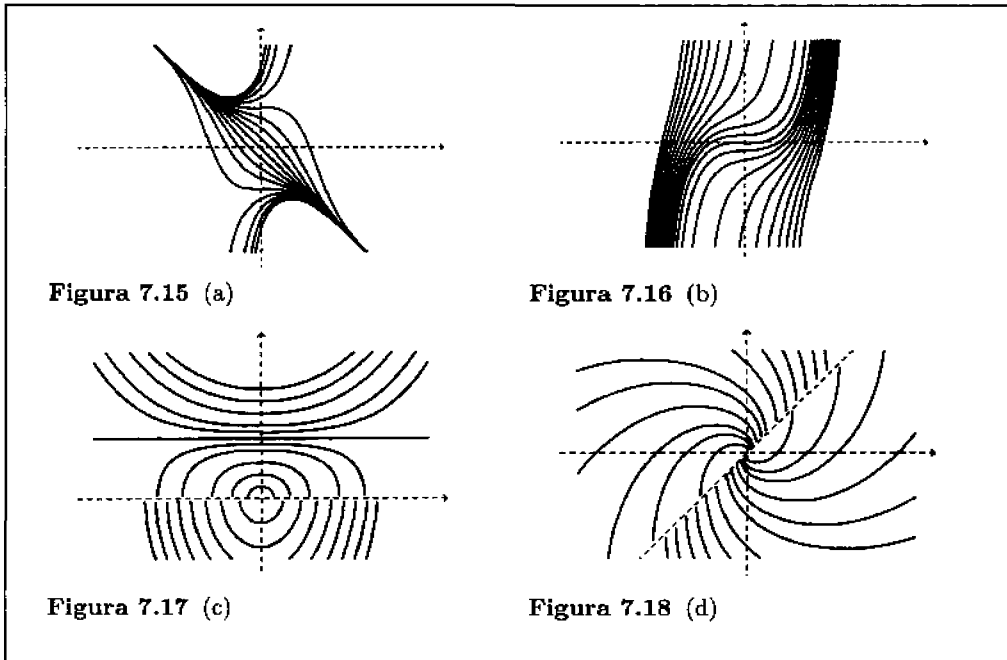


Figura 7.15 (a)

Figura 7.16 (b)

Figura 7.17 (c)

Figura 7.18 (d)

7.1.6 Studiare qualitativamente le curve integrali delle equazioni seguenti:

$$(a) \quad x' = \frac{1}{x-t}; \quad (b) \quad x' = \frac{x+t}{x-t}.$$

7.1.7 Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni lineari

$$\begin{aligned} (a) \quad x' + 2xt &= 2te^{-t^2}; & (b) \quad x' &= \operatorname{sen} t (x + \cos t); \\ (c) \quad (1+t^2)x' + 2tx &= 1; & (d) \quad x' - \frac{2}{t}x &= t^2; \\ (e) \quad tx' - x + \ln t &= 0 \quad (t > 0); & (f) \quad x' + \frac{x}{t+t^2} &= t-2; \\ (g) \quad x' + 2tx &= te^{-t^2}; & (h) \quad x' - x \operatorname{tg} t &= \frac{1}{\operatorname{sen} t}. \end{aligned}$$

7.1.8 Per stimare l'efficacia di una campagna pubblicitaria, è stato proposto il seguente modello: l'analisi di dati raccolti indica che l'importo  $x$  delle vendite, in assenza di pubblicità, diminuisce al tasso<sup>(6)</sup>

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x$$

e quindi, è  $\ln x = -\lambda t + \mu$ , ( $\lambda > 0$ ,  $\mu > 0$  sono costanti).

<sup>(6)</sup>In effetti  $x(t)$ , essendo una funzione a valori discreti, non può essere derivabile né continua a meno di non essere costante. Tuttavia, è consuetudine trattare questo tipo di grandezze come funzioni regolari; la miglior giustificazione per questa procedura, poco rigorosa, è che essa dà risultati sperimentalmente soddisfacenti.

In presenza di pubblicità, si indica con  $A(t)$  l'attività pubblicitaria e con  $M$  il livello di saturazione del mercato; ragionevolmente, si ritiene che la pubblicità incida su quella parte del mercato che non ha ancora acquistato il prodotto. Si ha quindi

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x + rA \frac{M-x}{M}$$

( $r > 0$  costante).

Ponendo  $b = \frac{rA}{M} + \lambda$  si scrive

$$\frac{dx}{dt} + bx = rA.$$

In particolare, supponiamo che l'attività pubblicitaria  $A(t)$  abbia il valore costante  $\bar{A} > 0$  per un certo tempo, poi cessi, cioè

$$A(t) = \begin{cases} \bar{A}, & 0 < t \leq T \\ 0, & t > T. \end{cases}$$

Risolvere l'equazione e tracciare i grafici delle funzioni  $A(t)$  ed  $x(t)$ . Confrontare, alla luce di questo modello, l'effetto di una campagna pubblicitaria intensa e breve con quello di una più moderata ma duratura.

**7.1.9** Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$x' = \psi'(t)(\psi(t) - x).$$

**7.1.10** Integrare le seguenti equazioni a variabili separabili

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \quad x' = -\frac{t}{x}; & \text{(b)} \quad t^2 x x' = x - 1; \\ \text{(c)} \quad e^{-x}(1+x') = 1; & \text{(d)} \quad x' = \frac{2xt}{1+t^2}; \\ \text{(e)} \quad x' = \frac{\log t \cdot \cos x}{t \sin 2x}; & \text{(f)} \quad x' = -3x^{4/3} \sin t; \\ \text{(g)} \quad x' \operatorname{tg} t + \operatorname{tg} x = 0; & \text{(h)} \quad x' = \frac{t - tx^2}{x + t^2 x}. \end{array}$$

**7.1.11** Provare che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = \sqrt{1-x^2} \\ x(0) = -1 \end{cases}$$

ha infinite soluzioni (il grafico di alcune di esse è riportato nella Figura 7.19).



Figura 7.19



- 7.1.12** Risolvere le seguenti equazioni dopo averle ricondotte con una opportuna sostituzione a equazioni a variabili separabili:

$$(a) \quad x'' + (x')^2 = 0; \quad (b) \quad (t + 1)x'' = x'.$$

- 7.1.13** Un meteorite che penetra nell'atmosfera della Terra ha approssimativamente una velocità inversamente proporzionale a  $\sqrt{x}$ , ove  $x$  indica la sua distanza dal centro della Terra. Si provi che la accelerazione è inversamente proporzionale a  $x^2$ .

- 7.1.14** La velocità di un grave è proporzionale a  $\sqrt{x}$  nell'istante in cui ha percorso uno spazio  $x$ . Si provi che il grave si muove di moto uniformemente accelerato.

- 7.1.15** Quando una fabbrica introduce un processo innovativo, come avviene la sua diffusione nelle altre fabbriche?

Sia  $N$  il numero di fabbriche presenti sul territorio e  $x(t)$  il numero di quelle che, al tempo  $t$ , hanno adottato l'innovazione ( $x(0) = 1$ ). Il tasso di diffusione sarà proporzionale sia ad  $x(t)$  che al numero delle fabbriche che non hanno ancora introdotto il nuovo processo

$$\frac{dx(t)}{dt} = ax(N - x)$$

con  $a > 0$  costante. Risolvere l'equazione.

- 7.1.16** Se nel problema precedente si vuole considerare la presenza della pubblicità, occorre aggiungere al tasso di diffusione un termine  $b(N - x)$ , proporzionale al numero di chi non ha ancora adottato l'innovazione, dove  $b > 0$  è costante; l'equazione che descrive il problema è quindi

$$\frac{dx(t)}{dt} = (ax + b)(N - x).$$

Risolvere il problema con la condizione  $x(0) = 1$ .

- 7.1.17** Integrare le seguenti equazioni differenziali dopo aver verificato che si tratta di equazioni esatte in opportune regioni:

$$(a) \quad t^2 + \cos 2x \cdot x' = 0; \quad (b) \quad xe^{tx} + te^{tx} \cdot x' = 0;$$

$$(c) \quad t(2t^2 + x^2) + x(t^2 + 2x^2) x' = 0; \quad (d) \quad x' = \frac{x + t}{x - t};$$

$$(e) \quad x' = -\frac{2tx^2 + 2x}{2t^2x + 2t}; \quad (f) \quad x' = -\frac{e^t \cos x + 3x}{3t - e^t \sin x}.$$

- 7.1.18** (*Equazione di Bernoulli*). Si consideri l'equazione

$$x' + p(t)x = g(t)x^\alpha, \quad (7.40)$$

ove  $\alpha$  è un numero reale diverso da 0 e da 1. Mediante la sostituzione

$$v = x^{1-\alpha}$$

si verifichi che la (7.40) si può ricondurre a una equazione lineare.

7.1.19 Usufruedo dell'esercizio precedente, integrare le equazioni

$$(a) \quad x' = Ax - Bx^2; \quad (b) \quad x' = -2tx + t^3x^3.$$

7.1.20 Trovare la soluzione corrispondente ai valori iniziali dati per le seguenti equazioni

$$(a) \quad (1 + t^2)x' + 4tx = t, \quad x(1) = \frac{1}{4};$$

$$(b) \quad t^3 \operatorname{sen} x \cdot x' = 2, \quad x(1) = \frac{\pi}{2};$$

$$(c) \quad tx' + x = e^t, \quad x(a) = b;$$

$$(d) \quad 2tx^3 + 3t^2x^2x' = 0, \quad x(1) = 1;$$

$$(e) \quad x \ln x + tx' = 0, \quad x(1) = 1;$$

$$(f) \quad (t + e^{t/x}) + e^{t/x} \left(1 - \frac{t}{x}\right) x' = 0, \quad x(0) = 3;$$

$$(g) \quad (1 + e^t) x x' = e^t, \quad x(0) = 1;$$

$$(h) \quad (1 + t^2)x' + tx = (1 + t^2)^{5/2}, \quad x(0) = 2;$$

$$(i) \quad x' + \frac{1}{t}x = 3 \cos 2t, \quad x(\pi/4) = 1, \quad t > 0;$$

$$(l) \quad tx' + 2x = t^2 - t + 1, \quad x(1) = -\frac{1}{3};$$

$$(m) \quad x' = e^{t+x}, \quad x(1) = 1.$$

7.1.21 Determinare per quali condizioni iniziali le curve integrali dell'equazione  $x' = 2tx^2$  sono definite per ogni  $t$ .

7.1.22 L'equazione  $\frac{df(x)}{dx} \frac{dx}{dt} + P(t)f(x) = Q(t)$  è un'equazione differenziale lineare per  $f(x)$ . Sfruttare questo fatto per risolvere l'equazione  $x' + tg x = \frac{t}{\cos x}$ .

7.1.23 Il più semplice esempio di dinamica di popolazioni animali è dato dalla *crescita malthusiana*: se una popolazione è composta da  $x(t)$  individui nell'istante  $t$ ,  $x'(t)$  rappresenta il suo tasso di crescita; in questo modello (adatto a descrivere le fasi iniziali dell'accrescimento di una colonia di batteri in un brodo di coltura), si ha

$$x'(t) = \mu x(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

dove  $x_0$  è la popolazione all'istante  $t = t_0$  e  $\mu > 0$  è il *fattore di crescita*.

Si determini la soluzione esplicita di questo problema e ci si renda conto che il modello proposto è ragionevole solo per tempi brevi.

7.1.24 Alle condizioni del problema 7.1.23 si aggiunga l'effetto, negativo sulla crescita della popolazione, dovuto all'affollamento o alla limitazione delle risorse elementari. Si ottiene così la cosiddetta *equazione logistica*

$$x' = ax - bx^2$$

in cui le costanti  $a$  e  $b$  sono positive e di norma  $b$  è piccola rispetto ad  $a$ ; in tal modo il termine  $-bx^2$  (che esprime l'effetto negativo dell'affollamento) non ha rilevanza quando la popolazione è scarsa, mentre diviene sempre più importante quando essa cresce. Risolvere l'equazione logistica con la condizione iniziale  $x(t_0) = x_0$  e farne uno studio qualitativo.

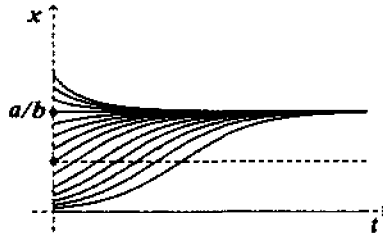


Figura 7.20 Soluzioni dell'equazione logistica.

**7.1.25** Si supponga che in un allevamento di pesci in mare aperto la legge di crescita sia del tipo malthusiano descritto nell'esercizio 7.1.23 e che si effettui una pesca con prelievo costante. L'equazione che governa l'allevamento è allora

$$x' = ax - h, \quad x(t_0) = x_0.$$

Si studino le soluzioni al variare dei parametri  $x_0$  e  $h$ .

**7.1.26** Studiare l'equazione logistica generalizzata

$$x' = ax - bx^\mu, \quad x(t_0) = x_0,$$

nei casi  $\mu = \frac{3}{2}$  e  $\mu = 3$ .

[Si usi il cambiamento di variabile  $z = x^{1-\mu}$  (Esercizio 7.1.18)].

## 7.2 Equazioni differenziali lineari

Nelle applicazioni intervengono frequentemente equazioni differenziali del tipo

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u = f(t); \quad (7.41)$$

esse si dicono lineari in quanto l'applicazione  $L$  che associa alla funzione  $u = u(t)$  la funzione

$$L(u) = u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u$$

è lineare, verifica cioè la relazione

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v) \quad (7.42)$$

per ogni coppia di numeri reali  $\alpha$ ,  $\beta$  e ogni coppia di funzioni  $u$ ,  $v$  (di classe  $C^n$ ). Dalla (7.42) seguono immediatamente i seguenti fatti.

**PROPOSIZIONE 7.12 (a)** (*Principio di sovrapposizione*) Se  $u$  e  $v$  sono soluzioni dell'equazione omogenea

$$u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u = 0, \quad (7.43)$$

cioè risulta  $L(u) = L(v) = 0$ , allora ogni loro combinazione lineare  $\alpha u + \beta v$  è ancora soluzione di tale equazione.

(b) Se  $u$  e  $v$  sono soluzioni dell'equazione non omogenea (7.41) allora la loro differenza  $u - v$  risolve l'equazione omogenea (7.43).

In altri termini: se si conosce una particolare soluzione dell'equazione non omogenea, allora ogni altra soluzione di questa si ottiene sommando a essa una soluzione dell'equazione omogenea corrispondente.

Nel seguito considereremo solo equazioni differenziali del secondo ordine; la teoria sviluppata costituisce tuttavia un buon modello per trattare il caso generale.

Si considerino, dunque, equazioni del tipo

$$L(u) = u'' + a(t)u' + b(t)u = f(t) \quad (7.44)$$

ove si suppone che le funzioni  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $f(t)$ , siano continue in un intervallo  $I$ . Un semplice, ma importante, esempio di equazione del tipo (7.44) è dato dalla

$$u'' + \frac{\mu}{m}u' + \frac{k}{m}u = \frac{1}{m}F(t)$$

che governa il moto di una particella di massa  $m$ , legata elasticamente con una molla, sulla quale agiscono una forza esterna  $F(t)$  e una reazione viscosa. Altri esempi sono dati dall'equazione di scarica di un condensatore (7.2), dall'equazione di Legendre

$$(1 - t^2)u'' - 2tu' + n(n + 1)u = 0,$$

dall'equazione di Bessel<sup>(7)</sup>

$$t^2u'' + tu' + (t^2 - n^2)u = 0.$$

Come già osservato, una equazione del secondo ordine è equivalente a un sistema di due equazioni del primo ordine. Nel nostro caso l'equazione lineare (7.44), con le posizioni

$$u(t) = x(t), \quad u'(t) = y(t),$$

è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -a(t)y - b(t)x + f(t). \end{cases} \quad (7.45)$$

Se le funzioni  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $f(t)$  sono continue in un intervallo  $I$ , allora per ogni  $t_0$  in  $I$  e per ogni coppia di numeri  $x_0$ ,  $y_0$  esiste unica la soluzione  $(x(t), y(t))$  del sistema (7.45) che verifica le condizioni iniziali

$$x(t_0) = x_0 \quad y(t_0) = y_0$$

<sup>(7)</sup>L'equazione di Bessel interviene in diverse questioni fisiche in cui si ha simmetria radiale, per esempio, nella determinazione della distribuzione di temperatura in una piastra circolare.

e tale soluzione si può prolungare a tutto  $I$ . Ciò significa che il *problema di Cauchy*

$$\begin{cases} L(u) = f(t) \\ u(t_0) = x_0 \\ u'(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (7.46)$$

ha soluzione unica, definita su tutto  $I$ .

Vogliamo ora calcolare esplicitamente le soluzioni dell'equazione (7.44). Si consideri dapprima il caso dell'equazione omogenea

$$L(u) = u'' + a(t)u' + b(t)u = 0; \quad (7.47)$$

in base alla Proposizione 7.12 (a) ogni combinazione lineare di due soluzioni  $u_1, u_2$  di tale equazione

$$\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \quad (7.48)$$

è ancora soluzione di (7.47). Se viceversa, avviene che ogni soluzione di tale equazione può essere espressa nella forma (7.48) (mediante opportuna scelta delle costanti  $\alpha, \beta$ ) allora si dice che  $u_1$  e  $u_2$  costituiscono un *sistema fondamentale di soluzioni* per la (7.47); in tal caso si dice anche che la (7.48) fornisce l'*integrale generale* dell'equazione.

Per decidere se due soluzioni  $u_1, u_2$  formano un sistema fondamentale si consideri l'espressione

$$W[u_1, u_2] = u_1 u_2' - u_1' u_2 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix};$$

essa si chiama *wronskiano* di  $u_1$  e  $u_2$  ed è, ovviamente, una funzione della variabile indipendente  $t$ . Il wronskiano verifica la seguente notevole proprietà

**PROPOSIZIONE 7.13** Date due soluzioni  $u_1, u_2$  dell'equazione (7.47) allora  $W[u_1, u_2]$  è identicamente uguale a 0 in tutto l'intervallo  $I$ , oppure in tale intervallo non è mai nullo.

**DIMOSTRAZIONE** Per ipotesi si ha

$$\begin{cases} u_1'' + a(t)u_1' + b(t)u_1 = 0 \\ u_2'' + a(t)u_2' + b(t)u_2 = 0; \end{cases}$$

moltiplicando la prima equazione per  $-u_2$ , la seconda per  $u_1$  e sommando si ha

$$(u_1 u_2'' - u_2 u_1'') + a(t)(u_1 u_2' - u_1' u_2) = 0. \quad (7.49)$$

Ponendo, per brevità,  $W(t) = W[u_1(t), u_2(t)]$  e osservando che  $W' = u_1 u_2'' - u_2 u_1''$ , la (7.49) si può porre nella forma

$$W' + a(t)W = 0,$$

la quale può essere immediatamente integrata fornendo

$$W(t) = C e^{-\int a(t) dt},$$

da cui segue subito la tesi. □

Si può allora provare la seguente proprietà:

**PROPOSIZIONE 7.14** Due soluzioni  $u_1$  e  $u_2$  dell'equazione (7.47) formano un sistema fondamentale se e solo se  $W[u_1, u_2]$  è diverso da zero in almeno un punto di  $I$  (e quindi, per la Proposizione 7.13, in tutto  $I$ ).

**DIMOSTRAZIONE** Si supponga che risulti  $W[u_1, u_2] \neq 0$  e sia  $\varphi(t)$  una qualunque soluzione di (7.47); occorre provare che esistono due costanti  $\alpha, \beta$ , tali che

$$\varphi(t) = \alpha u_1(t) + \beta u_2(t). \quad (7.50)$$

Fissato un punto  $t_0 \in I$ , il sistema lineare, nelle incognite  $\alpha, \beta$ :

$$\begin{cases} \alpha u_1(t_0) + \beta u_2(t_0) = \varphi(t_0) \\ \alpha u_1'(t_0) + \beta u_2'(t_0) = \varphi'(t_0) \end{cases} \quad (7.51)$$

ha un'unica soluzione, in quanto il determinante dei coefficienti è non nullo. Per il teorema di unicità vi è una sola soluzione dell'equazione (7.47) che assume in  $t_0$  il valore  $\varphi(t_0)$  e la cui derivata prima assume in  $t_0$  il valore  $\varphi'(t_0)$ ; da ciò segue che la (7.50) è soddisfatta per ogni  $t$ . Con lo stesso ragionamento si prova che la condizione  $W[u_1, u_2] \neq 0$  è anche necessaria, in quanto in tal caso il sistema (7.51) deve avere soluzione unica  $\alpha, \beta$  per ogni scelta dei secondi membri  $\varphi(t_0), \varphi'(t_0)$  e ciò è possibile solo se il determinante dei coefficienti è non nullo.  $\square$

Proviamo, infine, l'esistenza di un sistema fondamentale di soluzioni.

**PROPOSIZIONE 7.15** L'equazione lineare

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0 \quad (7.52)$$

(ove le funzioni  $a(t)$  e  $b(t)$  sono continue in un intervallo  $I$ ) ammette un sistema fondamentale di soluzioni.

**DIMOSTRAZIONE** Sia  $t_0$  un punto di  $I$ ; in base al teorema di esistenza e unicità esistono uniche le soluzioni  $u_1, u_2$  dei problemi

$$\begin{cases} u'' + a(t)u' + b(t)u = 0 \\ u(t_0) = 0 \\ u'(t_0) = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} u'' + a(t)u' + b(t)u = 0 \\ u(t_0) = 1 \\ u'(t_0) = 0 \end{cases}$$

e tali soluzioni sono definite su tutto  $I$ .

Si ha  $u_1(t_0)u_2'(t_0) - u_1'(t_0)u_2(t_0) = -1$ , quindi per la precedente proposizione  $u_1$  e  $u_2$  formano un sistema fondamentale di soluzioni.  $\square$

Due soluzioni  $u_1, u_2$  dell'equazione (7.52) si dicono *linearmente indipendenti* se le sole costanti  $\alpha$  e  $\beta$  per cui si ha

$$\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) = 0 \quad \text{per ogni } t \text{ in } I \quad (7.53)$$

sono  $\alpha = 0, \beta = 0$ . In caso contrario i due integrali  $u_1, u_2$ , si dicono *linearmente dipendenti*.

Si noti che  $u_1$  e  $u_2$  sono linearmente dipendenti se e solo se

$$W[u_1, u_2] = 0 \quad \text{per ogni } t \text{ in } I.$$

Infatti se vi sono due costanti  $\alpha, \beta$ , non entrambe nulle, che verificano la (7.53) allora si ha anche

$$\alpha u_1'(t) + \beta u_2'(t) = 0 \quad (7.54)$$

e, dunque, il determinante dei coefficienti del sistema formato dalle equazioni (7.53) e (7.54) deve essere nullo. Viceversa, se  $W[u_1, u_2] = 0$ , fissato  $t_0$ , vi sono due numeri non entrambi nulli  $\alpha, \beta$  tali che

$$\begin{cases} \alpha u_1(t_0) + \beta u_2(t_0) = 0 \\ \alpha u_1'(t_0) + \beta u_2'(t_0) = 0; \end{cases}$$

allora la funzione  $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t)$  è soluzione della (7.52) ed è tale che  $u(t_0) = u'(t_0) = 0$ . Dal teorema di unicità segue allora che  $\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) = 0$  per ogni  $t$  e, dunque,  $u_1$  e  $u_2$  sono linearmente dipendenti.

In conclusione la proposizione 7.15 può essere riassunta dicendo che l'equazione lineare

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0$$

ha due soluzioni linearmente indipendenti  $u_1, u_2$ ; ogni altra soluzione è espressa da una loro combinazione lineare.

Il problema di determinare una coppia di soluzioni linearmente indipendenti è, in genere, piuttosto difficile ed è stato oggetto di molte indagini.

Considereremo a titolo esemplificativo qualche caso tipico.

### RIDUZIONE DELL'ORDINE

Se si conosce una soluzione  $u_1(t)$  dell'equazione lineare

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0, \quad (7.55)$$

allora se ne può determinare una seconda linearmente indipendente con un metodo dovuto a D'Alembert. Il metodo consiste nel cercare tale soluzione nella forma

$$u_2(t) = v(t) \cdot u_1(t),$$

ove  $v(t)$  è una nuova funzione incognita: sostituendo nell'equazione (7.55) si trova una equazione lineare del primo ordine in  $v'$  risolvendo la quale e scegliendone una soluzione con  $v' \neq 0$  si può determinare (non univocamente)  $v$  e quindi  $u_2$ . È facile verificare che la soluzione così ottenuta è linearmente indipendente da  $u_1$ .



**ESEMPIO 7.16** L'equazione di Legendre, per  $n = 1$ ,

$$(1 - t^2)u'' - 2tu' + 2u = 0 \quad (7.56)$$

ha ovviamente la soluzione  $u_1 = t$ . Determiniamone una seconda soluzione con il metodo di D'Alembert. Posto

$$u_2(t) = tv(t)$$

si ha

$$u_2' = tv' + v, \quad u_2'' = tv'' + 2v'$$

e sostituendo nell'equazione (7.56)

$$(1 - t^2)(tv'' + 2v') - 2t(tv' + v) + 2tv = 0,$$

vale a dire, dividendo per  $t(1 - t^2)$ ,

$$v'' + \left( \frac{2}{t} - \frac{2t}{1 - t^2} \right) v' = 0, \quad t \neq 0, \quad t \neq \pm 1. \quad (7.57)$$

La (7.57) è un'equazione lineare in  $v'$  che si integra facilmente:

$$t^2(1 - t^2)v' = C,$$

da cui

$$v(t) = C \int \frac{dt}{t^2(1 - t^2)} = C \int \left( \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1 - t^2} \right) dt = C \left( -\frac{1}{t} + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right).$$

Di conseguenza una seconda soluzione dell'equazione (il fattore costante si può sopprimere) è data da

$$u_2(t) = tv(t) = -1 + \frac{t}{2} \ln \left| \frac{1+t}{1-t} \right|.$$

È facile verificare che  $u_2$  e  $u_1$  sono linearmente indipendenti.



## EQUAZIONI A COEFFICIENTI COSTANTI

Nel caso dell'equazione

$$L(u) = au'' + bu' + cu = 0, \quad (7.58)$$

ove  $a, b, c$  sono costanti (con  $a \neq 0$ ), è molto semplice determinare due soluzioni linearmente indipendenti.

È naturale infatti cercare soluzioni  $u$  tali che  $u, u', u''$  differiscono solo per una (opportuna) costante moltiplicativa, dunque della forma  $u(t) = e^{rt}$ . Sostituendo nella (7.58) si ha

$$L(e^{rt}) = e^{rt}(ar^2 + br + c) = 0;$$

poiché  $e^{rt}$  è sempre diverso da zero, si deve avere

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (7.59)$$

L'equazione algebrica (7.59) viene detta *equazione caratteristica* dell'equazione differenziale (7.58). Siano  $r_1$  e  $r_2$  le sue radici. Vi sono tre casi possibili.

**Radici reali distinte.** In questo caso  $e^{r_1 t}, e^{r_2 t}$  sono soluzioni della (7.58) ed è immediato verificare che si ha  $W[e^{r_1 t}, e^{r_2 t}] \neq 0$ . Dunque

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

è la soluzione generale dell'equazione data.



*Radici reali coincidenti.* Se  $b^2 - 4ac = 0$  si ha  $r_1 = r_2 = -b/2a$  e si ha quindi un'unica soluzione  $e^{r_1 t} = e^{-bt/2a}$ . Tuttavia usufruendo del metodo di riduzione dell'ordine si trova facilmente che anche la funzione  $te^{r_1 t}$  è soluzione della (7.58). Poiché le funzioni

$$e^{r_1 t}, \quad te^{r_1 t}$$

sono linearmente indipendenti (si ha  $W[e^{r_1 t}, te^{r_1 t}] = e^{2r_1 t}$ ), l'integrale generale è dato da

$$u(t) = Ae^{r_1 t} + Bte^{r_1 t}, \quad r_1 = -\frac{b}{2a}.$$

*Radici complesso-coniugate.* Se  $b^2 - 4ac < 0$  le radici della equazione caratteristica sono due numeri complessi  $\lambda + i\mu$  e  $\lambda - i\mu$ . Le funzioni  $e^{(\lambda+i\mu)t}$  e  $e^{(\lambda-i\mu)t}$  sono integrali della equazione differenziale, ma hanno valori complessi. Poiché l'equazione è reale, è più opportuno cercarne soluzioni reali; a ciò si perviene sfruttando le formule di Eulero (2.21):

$$\frac{e^{(\lambda+i\mu)t} + e^{(\lambda-i\mu)t}}{2} = e^{\lambda t} \frac{e^{i\mu t} + e^{-i\mu t}}{2} = e^{\lambda t} \cos \mu t$$

$$\frac{e^{(\lambda+i\mu)t} - e^{(\lambda-i\mu)t}}{2i} = e^{\lambda t} \frac{e^{i\mu t} - e^{-i\mu t}}{2i} = e^{\lambda t} \sin \mu t.$$

Le funzioni  $e^{\lambda t} \cos \mu t$ ,  $e^{\lambda t} \sin \mu t$  sono reali, sono linearmente indipendenti (si ha  $W[e^{\lambda t} \cos \mu t, e^{\lambda t} \sin \mu t] = \mu e^{2\lambda t}$ ) e sono ovviamente soluzioni dell'equazione differenziale. Essa ha pertanto il seguente integrale generale

$$u(t) = Ae^{\lambda t} \cos \mu t + Be^{\lambda t} \sin \mu t.$$

—  
—  
—

**ESEMPI 7.17** Si considerino le equazioni a coefficienti costanti

$$(a) \quad u'' + 3u' - 10u = 0, \quad (b) \quad u'' - 4u' + 4u = 0, \quad (c) \quad u'' + u' + u = 0.$$

Le corrispondenti equazioni caratteristiche sono

$$(a) \quad r^2 + 3r - 10 = 0, \quad \text{con soluzioni } r_1 = 2, r_2 = -5.$$

$$(b) \quad r^2 - 4r + 4 = 0, \quad \text{con soluzione } r = 2,$$

$$(c) \quad r^2 + r + 1 = 0, \quad \text{con soluzioni } r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, r_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Gli integrali generali sono dunque rispettivamente

$$(a) \quad u(t) = Ae^{2t} + Be^{-5t},$$

$$(b) \quad u(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t},$$

$$(c) \quad u(t) = e^{-t/2} \left( A \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right).$$

—  
—  
—

## L'EQUAZIONE NON OMOGENEA

Si consideri ora l'equazione completa

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = f(t); \quad (7.60)$$

in base alla Proposizione 7.12 (b) tutte le sue soluzioni si possono ottenere sommando a una particolare soluzione un integrale dell'equazione omogenea associata. In altri termini l'integrale generale della (7.60) è somma di un integrale particolare di essa e dell'integrale generale dell'equazione omogenea.

Vi è un metodo generale per determinare un integrale particolare dell'equazione (7.60), a condizione di conoscere due soluzioni  $u_1, u_2$  linearmente indipendenti della equazione omogenea

$$u'' + a(t)u' + b(t)u = 0. \quad (7.61)$$

Tale metodo (attribuito a Lagrange) va sotto il nome di metodo della *variazione delle costanti* e consiste nel cercare una soluzione della forma

$$u(t) = \alpha(t)u_1(t) + \beta(t)u_2(t),$$

ove  $u_1, u_2$  sono un sistema fondamentale di soluzioni di (7.61). Illustriamo il metodo con un esempio.



**ESEMPIO 7.18** Si consideri l'equazione

$$u'' + u = \frac{1}{\cos t}. \quad (7.62)$$

Due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione omogenea sono  $u_1(t) = \cos t$ ,  $u_2(t) = \sin t$ ; cerchiamo una soluzione di (7.62) della forma

$$u(t) = \alpha(t)\cos t + \beta(t)\sin t. \quad (7.63)$$

Per determinare  $\alpha(t)$  e  $\beta(t)$  occorrono due condizioni: una di esse è data dall'equazione differenziale; una seconda può essere imposta in modo arbitrario e sarà scelta in modo da semplificare i calcoli. Derivando la (7.63) si ha

$$u'(t) = (-\alpha(t)\sin t + \beta(t)\cos t) + (\alpha'(t)\cos t + \beta'(t)\sin t). \quad (7.64)$$

Imponiamo la condizione

$$\alpha'(t)\cos t + \beta'(t)\sin t = 0; \quad (7.65)$$

derivando ulteriormente la (7.64) e sostituendo nell'equazione si ha

$$(-\alpha'(t)\sin t + \beta'(t)\cos t) + (-\alpha(t)\cos t - \beta(t)\sin t) + \alpha(t)\cos t + \beta(t)\sin t = \frac{1}{\cos t}.$$

Si noti che, avendo imposto la (7.65), si è ottenuta un'equazione che non contiene derivate seconde delle funzioni  $\alpha$  e  $\beta$  che si vogliono determinare; tale equazione si può semplificare:

$$-\alpha'(t)\sin t + \beta'(t)\cos t = \frac{1}{\cos t}.$$

Da questa, assieme alla (7.65), si ricava facilmente

$$\alpha'(t) = -\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}, \quad \beta'(t) = 1,$$

e quindi

$$\alpha(t) = \log |\cos t|, \quad \beta(t) = t.$$

La funzione

$$u(t) = (\log |\cos t|)(\cos t) + t \operatorname{sen} t$$

è una soluzione particolare dell'equazione (7.62) (come si può agevolmente verificare); l'integrale generale di tale equazione è dunque

$$u(t) = A \cos t + B \operatorname{sen} t + (\log |\cos t|)(\cos t) + t \operatorname{sen} t.$$



Non appena l'ordine dell'equazione sale, il metodo della variazione delle costanti porta a calcoli molto complessi. Per questo motivo è utile conoscere anche il metodo dei *coefficienti indeterminati*, che, pur essendo limitato alle equazioni a coefficienti costanti che hanno termine noto  $f(t)$  particolare (funzione polinomiale, esponenziale o sinusoidale), consente di risolvere abbastanza agevolmente diversi problemi interessanti.

Occorre prima "immaginare" una soluzione dell'equazione non omogenea osservandone il termine noto, poi determinarne le costanti in modo da soddisfare l'equazione stessa. Se la funzione immaginata  $g(t)$  compare tra le soluzioni dell'equazione omogenea, la si sostituirà con la funzione  $t \cdot g(t)$  (si veda pag. 322).

**ESEMPIO 7.19** Per risolvere l'equazione

$$x'' + x' - 6x = f(t)$$

occorre in primo luogo risolvere l'omogenea corrispondente  $x'' + x' - 6x = 0$ . Si ottiene  $x(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t}$ .

Se è  $f(t) = 5e^{4t}$ , la soluzione particolare della equazione non omogenea si cercherà nella forma  $g(t) = Ce^{4t}$ , e sostituendo si ricaverà  $C = 5/14$ . L'equazione completa sarà risolta quindi da

$$x(t) = Ae^{2t} + Be^{-3t} + \frac{5}{14}e^{4t}.$$

Se è  $f(t) = 5e^{2t}$ , si cercherà  $g(t) = Cte^{2t}$ , e sostituendo si ricaverà  $C = 1$ . Per  $f(t) = 5t$  sarà  $g(t) = Ct + D$ , per  $f(t) = 5 \cos t$  si avrà  $g(t) = A \cos t + B \operatorname{sen} t$ , per  $f(t) = te' \operatorname{sen} t$  sarà  $g(t) = (Ct + D)e^t(E \operatorname{sen} t + F \cos t)$ .

## ESERCIZI

**7.2.1** Eliminando le costanti  $A$  e  $B$  fra  $x$ ,  $x'$  e  $x''$  trovare le equazioni differenziali che hanno come soluzioni le seguenti famiglie di funzioni:

(a)  $x(t) = At + B \operatorname{sen} t$ ;      (b)  $x(t) = A \operatorname{senh} t + B \operatorname{cosh} t$ ;

(c)  $x(t) = At + Bt^2$ ;      (d)  $x(t) = (A + Bt)e^t$ .

**7.2.2** Verificare che le funzioni 1 e  $\sqrt{t}$  sono soluzioni della equazione differenziale

$$t^2 u'' + (u')^2 = 0$$

ma che una loro combinazione lineare  $A + B\sqrt{t}$  non è, in generale, una soluzione. Perché?

**7.2.3** Determinare con il metodo della riduzione dell'ordine una seconda soluzione delle seguenti equazioni differenziali e scriverne l'integrale generale:

- (a)  $t^2 x'' + 2tx' = 0$ ;  $x_1(t) = 1$ ;  
 (b)  $t^2 x'' + 2tx' + x = 0$ ;  $x_1(t) = 1/t$  ( $t > 0$ );  
 (c)  $(1 - t^2)x'' - 2tx' + 2x = 0$ ;  $x_1(t) = t$  ( $-1 < t < 1$ );  
 (d)  $t^2 x'' + 2tx' - 2x = 0$ ;  $x_1(t) = t$ ;  
 (e)  $t^2 x'' + 3tx' + x = 0$ ;  $x_1(t) = \frac{1}{t}$ ,  $t > 0$ .

**7.2.4** Si verifichi che  $x_1(t) = (\sin t)/\sqrt{t}$  è soluzione dell'equazione di Bessel di ordine  $1/2$ :

$$t^2 x'' + tx' + (t^2 - 1/4)x = 0 \quad (t > 0)$$

e se ne trovi una seconda soluzione.

**7.2.5** Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni a coefficienti costanti:

- (a)  $x'' + x' = 0$ ; (b)  $x'' + x = 0$ ;  
 (c)  $x''' - x'' = 0$ ; (d)  $x''' + 3x'' + 3x' + x = 0$ ;  
 (e)  $x''' + x = 0$ ; (f)  $x'' + x' - 2x = 0$ .

**7.2.6** Usando il metodo della variazione delle costanti trovare una soluzione particolare delle seguenti equazioni:

- (a)  $x' - \frac{2}{t}x = t^2$ ; (b)  $x' + 2tx = 2te^{-t^2}$ ;  
 (c)  $x'' + 4x = \frac{3}{\sin 2t}$ ,  $0 < t < \frac{\pi}{2}$ ; (d)  $x'' + 4x' + 4x = \frac{e^{-2t}}{t^2}$ ,  $t > 0$ ;  
 (e)  $x'' + 2x' + x = \frac{e^{-t}}{t}$ .

**7.2.7** Mediante ispezione diretta del secondo membro, si determini una soluzione particolare delle equazioni seguenti:

- (a)  $x'' + x' - 2x = 1$ ;      (b)  $x'' + 2x = t(e^t - 1)$ ;  
 (c)  $x'' + x - 1 = t \operatorname{sen} t$ ;      (d)  $x'' + x' - 2x = t$ ;  
 (e)  $x'' + x' - 2x = e^t$ ;      (f)  $x'' + 2x' + 5x = \cos 2t \cdot e^{-t}$ ;  
 (g)  $x''' - x' = t^2$ ;      (h)  $x''' - x' = \cos^2 t$ ;  
 (i)  $x'' + x - 1 = t \operatorname{sen} t$ ;      (l)  $x''' + 3x'' + 3x' + x = t + e^{-t}$ .

**7.2.8** Un modello semplificato per l'economia nazionale è descritto dalle seguenti variabili:

$x$  - prodotto interno,  
 $I$  - investimenti,  
 $S$  - spese correnti,  
 $C$  - consumi.

Si assume che per i consumi sia  $C = (1 - s)x$ , prevedendo un coefficiente di risparmio  $s$ , e che il prodotto si evolva rispondendo all'eccesso di domanda:

$$\frac{dx}{dt} = l(C + I + S - x),$$

con  $l > 0$  costante.

Se per gli investimenti si può assumere

$$\frac{dI}{dt} = m \left( a \frac{dx}{dt} - I \right)$$

dove  $a$  ed  $m$  sono costanti, il prodotto  $x$  obbedisce ad una equazione differenziale. Ricavare l'equazione e specificare quali previsioni consente di fare.

**7.2.9** L'equazione

$$t^2 x'' + \alpha t x' + \beta x = 0$$

è nota come *equazione di Eulero*, o *equazione equidimensionale* ed è il prototipo delle equazioni che presentano per  $x = 0$  un *punto singolare regolare*. Per risolverla, in un intervallo che non contenga l'origine, si cerchino soluzioni della forma  $x(t) = t^r$ , discutendo i casi in cui l'equazione  $F(r) = r^2 + (\alpha - 1)r + \beta = 0$  ha radici reali distinte, coincidenti o complesse-coniugate.

**7.2.10** Determinare l'integrale generale delle seguenti equazioni di Eulero:

- (a)  $t^2 x'' + 4t x' + 2x = 0$ ;      (b)  $t^2 x'' - 3t x' + 4x = 0$ ;  
 (c)  $t^2 x'' + 3t x' + 5x = 0$ ;      (d)  $(t - 1)^2 x'' + 8(t - 1)x' + 12x = 0$ .

**7.2.11** Si consideri il problema con condizioni omogenee  $x'' + x = g(t)$ ,  $x(0) = 0$ ,  $x'(0) = 0$  e si verifichi che la sua soluzione è data dall'*integrale di convoluzione*

$$x(t) = \int_0^t g(s) \operatorname{sen}(t - s) ds.$$

**7.2.12** Determinare la soluzione del problema

$$x'' + x = p(t), \quad x(0) = M, \quad x'(0) = N.$$

**7.2.13** Consideriamo una particella di massa  $m$  che si muove lungo una retta ed è soggetta a una forza di richiamo elastica, proporzionale allo spostamento. In base alla legge di Newton il moto della particella verifica l'equazione

$$mx'' = -kx$$

dove  $x = x(t)$  è lo spostamento al tempo  $t$  rispetto alla posizione di equilibrio e  $k > 0$  è la *costante elastica*.

Risolvere il problema di Cauchy con le condizioni iniziali

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 2.$$

**7.2.14** Alle condizioni del problema 7.2.13 si aggiunga anche una forza di *resistenza viscosa*, così da ottenere l'equazione

$$mx'' = -\mu x' - kx$$

dove  $\mu > 0$  è la *costante di smorzamento*. Risolvere il problema di Cauchy nei seguenti casi particolari

$$(a) \quad m = 1, \quad k = 1, \quad \mu = 0,1; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 10;$$

$$(b) \quad m = 4, \quad k = 1, \quad \mu = 5; \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$$

**7.2.15** Un corpo di massa  $m$  cade incontrando una resistenza viscosa, proporzionale alla sua velocità attraverso il coefficiente positivo  $\mu$ ; il suo moto è descritto dalla legge

$$mx'' = mg - \mu x'.$$

Risolvere il problema di Cauchy nel caso

$$m = 10^{-3}, \quad g = 10, \quad \mu = 0,01, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$$

**7.2.16** Se un corpo di massa  $m$  nel cadere incontra una *resistenza idraulica*, proporzionale al quadrato della sua velocità attraverso il coefficiente  $\mu$ , il moto è descritto dalla legge

$$mx'' = mg - \mu(x')^2.$$

Risolvere il problema di Cauchy nel caso

$$m = 1, \quad g = 10, \quad \mu = 0,05, \quad x(0) = 100, \quad x'(0) = 0.$$

In questo come nei precedenti problemi le costanti che intervengono sono espresse in unità di misura coerenti.

## UN CENNO AI METODI NUMERICI

Forse si può affermare che la maggior parte dei problemi scientifici e tecnologici che si possono risolvere tramite gli elaboratori elettronici riguardano le equazioni differenziali in tutte le varie forme nelle quali queste si presentano.

Il campo è molto vasto: si va dalle semplici equazioni differenziali del primo ordine ai grandi sistemi di equazioni alle derivate parziali la cui soluzione mette a dura prova la potenzialità dei computer più potenti finora costruiti.

La letteratura su questo argomento è sterminata e il lettore, speriamo, potrà apprezzare questi rapidi cenni introduttivi in cui toccheremo solo la superficie di un argomento molto, molto complesso.

Supponiamo di essere nelle condizioni descritte nel Teorema 7.3; possiamo allora affermare che la soluzione del problema di Cauchy

$$x' = f(t, x) \quad x(t_0) = x_0 \quad (7.66)$$

esiste localmente ed è unica. Il problema che affrontiamo è quello di determinare un valore approssimato della soluzione  $x$  in dipendenza da un valore assegnato della variabile  $t$ . Più precisamente, se  $t = t_1 = t_0 + h$ , si vuole determinare un valore approssimato della grandezza  $x_1 = x(t_1)$ , ove  $x$  è la soluzione del problema (7.66).

Il metodo più semplice che si può immaginare (detto *metodo di Eulero*) consiste nell'usufruire della definizione stessa di derivata (3.31)

$$x_1 = x_0 + hx'(t_0) + hO(h)$$

che, omettendo il termine  $O(h)$ , corrisponde a

$$x_1 = x_0 + hf(t_0, x_0).$$

Avendo così ricavato  $(t_1, x_1)$  dai dati iniziali si può ripartire daccapo ed ottenere un nuovo punto  $(t_2, x_2)$ , dunque impostare un procedimento del tipo

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + h \\ x_{i+1} &= x_i + hf(t_i, x_i) \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Si può dire che il metodo di Eulero produce una soluzione che segue il campo di direzioni determinato dalla equazione differenziale (vedi Figure 7.21 e 7.22).

Occorre però notare che il primo segmento utilizzato nella approssimazione di Eulero è parte della tangente alla soluzione "vera", ma il secondo è una parte della tangente alla soluzione di un altro problema, quello che ha come condizioni iniziali  $x(t_1) = x_1$ , e altrettanto si può dire per i passi successivi. È chiaro allora che, dopo molti passi, la soluzione approssimata si discosta anche sensibilmente dalla soluzione esatta.

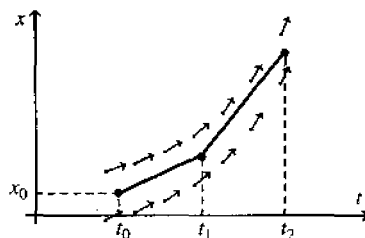
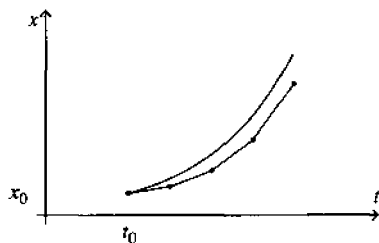
Si potrebbe obiettare che, prendendo un incremento molto piccolo, gli errori che si accumulano diventano trascurabili, ma questo è vero solo in teoria. Infatti più piccolo è  $h$  più numerosi sono i calcoli da eseguire e questo fatto, oltre ad allungare il tempo di calcolo, aumenta gli *errori di arrotondamento*, che il computer inevitabilmente commette in quanto non manipola numeri reali ma valori approssimati.

Consideriamo il seguente semplice esempio

$$x' = t + x, \quad x(0) = 1 \quad (7.67)$$

che ha la soluzione esplicita

$$x = 2e^t - t - 1.$$



**Figura 7.21** Soluzione esatta del problema **Figura 7.22** Soluzione approssimata con il metodo di Eulero.  
 $y' = y, y(0) = 1$ .

Questo esempio è così semplice che non solo si possono applicare i metodi numerici facendo i calcoli con carta e matita, ma si possono anche calcolare le soluzioni esatte per diversi valori di  $t$  con una semplice calcolatrice tascabile. Questo esempio, dunque, permette di valutare in modo sperimentale l'accuratezza dei diversi metodi.

Nella tabella seguente sono riportati i valori

Tavola dei valori della soluzione esatta del problema (7.67) e dei suoi valori approssimati con il metodo di Eulero, con passi  $h = 0,2$  e  $h = 0,1$ .

$t_i$	$x_i$	Esatta	Errore (%)	$t_i$	$x_i$	Esatta	Errore (%)
0,0	1,00000	1,00000	0,0	0,0	1,00000	1,00000	0,0
0,2	1,20000	1,24281	3,4	0,1	1,10000	1,11034	0,9
0,4	1,48000	1,58365	6,5	0,2	1,22000	1,24281	1,8
0,6	1,85600	2,04424	9,2	0,3	1,36200	1,39972	2,7
0,8	2,34720	2,65108	11,5	0,4	1,52820	1,58365	3,5
1,0	2,97664	3,43656	13,4	0,5	1,72102	1,79744	4,3
				0,6	1,94312	2,04424	4,9
				0,7	2,19743	2,32751	5,6
				0,8	2,48718	2,65108	6,2
				0,9	2,81590	3,01921	6,7
				1,0	3,18748	3,43656	7,2

Come mostra la Figura 7.23 nel metodo di Eulero l'incremento della funzione incognita (al primo passo) viene calcolato, in dipendenza dell'incremento  $h$  della variabile, come

$$k_1 = hf(x_0, y_0) \quad (7.68)$$

Sembrerebbe più ragionevole, per ottenere una approssimazione migliore, usufruire del valore di  $x'$  in un punto compreso fra i punti  $A$  e  $B$ , ma questo non si può fare, in quanto a priori non si conosce la soluzione "esatta".

Si può tuttavia pensare di calcolare l'incremento in una forma *intermedia* come

$$k_2 = hf(t_0 + \alpha h, x_0 + \beta k_1), \quad (7.69)$$



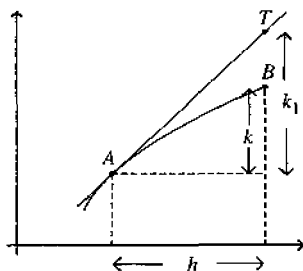


Figura 7.23

con  $\alpha$  e  $\beta$  opportune frazioni comprese tra 0 e 1. Tutto questo è intuitivamente chiaro, ma l'intuizione non ci può aiutare nell'individuare i valori ottimali per le costanti  $\alpha$  e  $\beta$ . Occorre approfondire l'analisi del problema.

Dopo aver espresso  $k_1$  e  $k_2$  tramite le (7.68), (7.69), pensiamo di approssimare l'incremento  $k$  della nostra soluzione esatta nella forma

$$k \simeq Ak_1 + Bk_2 \quad (7.70)$$

e cerchiamo di trovare  $\alpha, \beta, A, B$  in modo da ottenere una approssimazione ragionevole. Per semplicità di notazioni indichiamo con  $F, P, Q$  i valori di  $f, \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial x}$  nel punto  $(t_0, x_0)$ . Avremo allora

$$k_1 = hF, \quad (7.71)$$

$$k_2 = h\{F + \alpha hP + \beta k_1 Q + O(h^2)\}, \quad (7.72)$$

ove nella (7.72) si è utilizzato lo sviluppo di Taylor al primo ordine. Tale formula si può riscrivere nel modo seguente

$$k_2 = hF + \alpha h^2 P + \beta h^2 FQ + O(h^3).$$

Sempre dalla formula di Taylor si ha

$$x_1 = x(t_0 + h) = x_0 + hx'_0 + \frac{1}{2}h^2 x''_0 + \dots$$

e dunque

$$k = x_1 - x_0 = hx'_0 + \frac{1}{2}h^2 x''_0 + O(h^3);$$

ma siccome

$$x'_0 = F$$

e

$$x'' = \frac{d}{dt}f(t, x) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt},$$

si ha

$$x_0'' = P + FQ$$

e dunque

$$k = hF + \frac{1}{2}h^2(P + FQ) + O(h^3). \quad (7.73)$$

L'equazione di approssimazione (7.70) proposta diviene allora

$$k \simeq (A + B)hF + B\alpha h^2P + B\beta h^2FQ + O(h^3)$$

mentre il valore "esatto" di  $k$  è dato dalla (7.73).

È ragionevole dunque porre

$$\begin{aligned} A + B &= 1 \\ B\alpha &= \frac{1}{2} \\ B\beta &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (7.74)$$

Ma, avendo solo tre equazioni e quattro parametri incogniti  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $a$ ,  $b$ , resta una possibilità di scelta: prendiamo  $\alpha$  a piacere (eccetto lo 0) e poi sarà

$$\beta = \alpha, \quad A = 1 - \frac{1}{2\alpha}, \quad B = \frac{1}{2\alpha}.$$

Ad esempio possiamo prendere  $\alpha = \beta = 1$ ,  $A = B = \frac{1}{2}$ ; otteniamo così la procedura seguente, che si dice *metodo di Runge-Kutta del secondo ordine*:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_0, x_0) \\ k_2 &= hf(t_0 + h, x_0 + k_1) \\ x_1 &= x_0 + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) + O(h^3). \end{aligned} \quad (7.75)$$

La denominazione "del secondo ordine" proviene dal fatto che l'errore *locale* di discretizzazione è dell'ordine di  $h^3$ , cioè la soluzione determinata è precisa nell'ordine di  $h^2$  (supponendo di poter eseguire calcoli esatti).

Con metodo identico, ma calcoli tedious, proseguendo nello sviluppo del polinomio di Taylor, si arriva al popolare *metodo di Runge-Kutta del quarto ordine*, adottato da moltissimi fogli elettronici sui moderni computer:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_0, x_0) \\ k_2 &= hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}k_1\right) \\ k_3 &= hf\left(t_0 + \frac{1}{2}h, x_0 + \frac{1}{2}k_2\right) \\ k_4 &= hf(t_0 + h, x_0 + k_3) \\ x_1 &= x_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) + O(h^5). \end{aligned}$$

La tabella seguente riporta i risultati relativi all'esempio precedente.

Tavola dei valori della soluzione esatta del problema (7.67) e dei suoi valori approssimati con il metodo di Runge-Kutta del secondo ordine, con passi  $h = 0,2$  e  $h = 0,1$ .

$t_i$	$x_i$	Esatta	Errore (%)	$t_i$	$x_i$	Esatta	Errore (%)
0,0	1,00000	1,00000	0,00	0,0	1,00000	1,00000	0,0
0,2	1,24000	1,24281	0,23	0,1	1,11000	1,11034	0,0
0,4	1,57680	1,58365	0,43	0,2	1,24205	1,24281	0,1
0,6	2,03170	2,04424	0,61	0,3	1,39847	1,39972	0,1
0,8	2,63067	2,65108	0,77	0,4	1,58180	1,58365	0,1
1,0	3,40542	3,43656	0,91	0,5	1,79489	1,79744	0,1
				0,6	2,04086	2,04424	0,2
				0,7	2,32315	2,32751	0,2
				0,8	2,64558	2,65108	0,2
				0,9	3,01236	3,01921	0,2
				1,0	3,42816	3,43656	0,2

Tavola dei valori della soluzione esatta del problema (7.67) e dei suoi valori approssimati con il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine, con passi  $h = 0,2$  e  $h = 0,1$ .

$t_i$	$x_i$	Esatta	Errore (%)	$t_i$	$x_i$	Esatta	Errore (%)
0,0	1,00000	1,00000	0,00000	0,0	1,00000	1,00000	0,00000
0,2	1,24280	1,24281	0,00044	0,1	1,11034	1,11034	0,00002
0,4	1,58364	1,58365	0,00085	0,2	1,24281	1,24281	0,00003
0,6	2,04421	2,04424	0,00125	0,3	1,39972	1,39972	0,00004
0,8	2,65104	2,65108	0,00152	0,4	1,58365	1,58365	0,00006
1,0	3,43650	3,43656	0,00179	0,5	1,79744	1,79744	0,00007
				0,6	2,04424	2,04424	0,00008
				0,7	2,32750	2,32751	0,00009
				0,8	2,65108	2,65108	0,00010
				0,9	3,01920	3,01921	0,00011
				1,0	3,43656	3,43656	0,00012

La discussione qui succintamente descritta sembra essere esauriente, ma lascia molti problemi aperti. Abbiamo infatti dato una ragionevole stima degli errori locali dovuti alla discretizzazione, ma questo è soltanto il primo passo per arrivare al risultato che interessa agli effetti pratici, cioè ad una stima dell'*errore globale*, relativo ad un intervallo finito. Dalla discussione fatta si vede che, per ridurre l'errore teorico globale, occorre usare un metodo preciso (meglio il metodo Runge-Kutta del quarto piuttosto che del secondo ordine) e scegliere l'intervallo  $h$  piccolo.

D'altra parte, per ridurre gli errori di arrotondamento che il computer commette ad ogni calcolo e che si accumulano nel risultato finale, occorre scegliere un metodo di calcolo più semplice e fissare un intervallo  $h$  relativamente grande.

Le due esigenze confliggono e la strategia ottimale, oggetto di molti studi, in generale porta ad una scelta intermedia.

Ma resta ancora una difficoltà: il medesimo metodo di calcolo numerico può dare risultati di attendibilità molto diversa a seconda della funzione e dei dati iniziali assunti (7.66). Nel successivo paragrafo si esporranno gli elementi fondamentali di questa problematica.

## DIPENDENZA CONTINUA DAI DATI

Ci poniamo ora il problema del comportamento della soluzione del problema di Cauchy (7.66) quando si fanno variare la funzione  $f$  oppure il valore iniziale  $x_0$ . Sarà vero in particolare che a "piccole" variazioni di  $f$  o di  $x_0$  corrispondono "piccole" variazioni della soluzione? Quando ciò accade si dice che *la soluzione dipende con continuità dai dati*.

Si comprende che la questione posta è di grande importanza quando l'equazione differenziale è la modellizzazione matematica di un sistema concreto: solitamente sia il valore iniziale  $x_0$ , sia eventuali parametri da cui dipende la funzione  $f$  provengono da misure e queste sono ovviamente soggette a errori. È importante allora garantirsi che tali errori non abbiano ripercussioni catastrofiche sulla soluzione e quindi sul risultato. In effetti si ha il teorema seguente.

**TEOREMA 7.20** Si supponga che  $f(t, x, \lambda)$  sia una funzione che verifica le ipotesi del teorema di esistenza e di unicità per ogni  $\lambda$  di un certo intorno  $|\lambda - \lambda_0| < \delta$ , che in tale intorno  $f(t, x, \lambda)$  sia una funzione continua di  $\lambda$  e che

$$|f_x(t, x, \lambda)| \leq K \quad (7.76)$$

per ogni  $\lambda$  di tale intorno con la stessa costante  $K$ . Allora la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t, \lambda) = f(t, x, \lambda) \\ x(t_0, \lambda) = x_0 \end{cases}$$

è una funzione continua del parametro  $\lambda$  e del dato iniziale  $x_0$  (in intorni opportuni).

Diamo un'idea della dimostrazione di questo teorema. Se  $x(t, \lambda)$  e  $\bar{x}(t, \lambda)$  sono le soluzioni relative ai dati iniziali  $x(t_0, \lambda) = x_0$  e  $\bar{x}(t_0, \lambda) = \bar{x}_0$ , usufruendo della formulazione integrale per le soluzioni si ha

$$\begin{aligned} x(t, \lambda) &= x_0 + \int_{t_0}^t f(t, x(s, \lambda), \lambda) ds, \\ \bar{x}(t, \lambda) &= \bar{x}_0 + \int_{t_0}^t f(t, \bar{x}(s, \lambda), \lambda) ds. \end{aligned}$$

Facendo la differenza e sfruttando la (7.76)

$$|x(t, \lambda) - \bar{x}(t, \lambda)| \leq |x_0 - \bar{x}_0| + K|t - t_0| \max_t |x(t, \lambda) - \bar{x}(t, \lambda)|$$

da cui si ricava, se  $|t - t_0| \leq 1/2K$ ,

$$\max |x(t, \lambda) - \bar{x}(t, \lambda)| \leq 2|x_0 - \bar{x}_0|,$$

cioè la dipendenza continua della soluzione dal dato iniziale. La restrizione  $|t - t_0| \leq 1/2K$  non è essenziale in quanto ogni intervallo  $|t - t_0| < \alpha$  si può ricoprire con un numero finito di intervalli di quel tipo e applicando la maggiorazione ora trovata a ciascuno di essi si migliora la differenza fra le due soluzioni con una costante moltiplicata per  $|x_0 - \bar{x}_0|$ . Un calcolo non dissimile mostra la dipendenza continua dal parametro  $\lambda$ .

## Sistemi di equazioni differenziali

---

Questo capitolo è dedicato allo studio dei sistemi di equazioni differenziali; viene precisata la nozione di stabilità (già incontrata nel Paragrafo 7.1) e si descrivono alcune applicazioni. L'enfasi sarà posta non sulla determinazione esplicita delle soluzioni, operazione che come si è già visto ha raramente successo, ma sulla loro descrizione qualitativa.

Nell'ultima parte vengono presentate alcune applicazioni della teoria delle equazioni differenziali. L'esposizione presuppone una certa "sensibilizzazione" (almeno informale) da parte del lettore nei confronti dei problemi presi in esame e non pretende certo di essere organica.

Ci limiteremo a studiare i sistemi di due equazioni differenziali, sia perché la teoria è in questo caso considerevolmente più completa, sia perché la visualizzazione delle soluzioni nel piano consente di illuminare efficacemente la discussione.

Consideriamo dunque il sistema

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \quad (8.1)$$

ove  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  sono funzioni scalari incognite, mentre  $f(x,y)$  e  $g(x,y)$  sono funzioni assegnate che supporremo differenziabili in una certa regione  $R$  del piano. Un sistema di questo tipo si dice *autonomo* in quanto le funzioni  $f$  e  $g$  non dipendono esplicitamente da  $t$ .

Le (8.1) si possono scrivere in forma vettoriale nel modo seguente

$$\mathbf{u}' = \mathbf{F}(\mathbf{u}), \quad (8.2)$$

ove si è posto  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{u}) = (f(x,y), g(x,y))$  e si definisce

$$\mathbf{u}'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Una *soluzione* del sistema (8.1) è data da una coppia di funzioni  $x(t)$ ,  $y(t)$  derivabili in un certo intervallo. Come nel caso di una variabile, se  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  sono soluzioni di (8.1), anche  $x = x(t+c)$ ,  $y = y(t+c)$  lo sono, qualunque sia la costante reale  $c$ .

In generale le soluzioni di (8.1) coinvolgono due costanti arbitrarie, per determinare le quali possono essere assegnati valori iniziali, vale a dire si considera il *problema*

di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases} \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0, \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (8.3)$$

Sussiste un teorema di esistenza e di unicità del tutto analogo al Teorema 7.3:

**TEOREMA 8.1** Se le funzioni  $f$  e  $g$  sono differenziabili in una regione di piano  $R$  esiste unica la soluzione locale del problema (8.3); essa è definita in un intorno di  $t_0$  ed è tale che  $(x(t), y(t))$  appartiene a un opportuno intorno del punto  $(x_0, y_0)$ .

Anche nel caso dei sistemi di equazioni differenziali si può dimostrare che se  $f$  e  $g$  sono  $C^1$  e si sa a priori che la soluzione di (8.3) è limitata, allora tale soluzione esiste per ogni  $t$  (Teorema 7.3).

Al variare di  $t$  ogni soluzione  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  del sistema (8.1) descrive parametricamente nel piano  $x, y$  una curva che viene detta *orbita* o *traiettoria* del sistema.

**PROPOSIZIONE 8.2** Per ogni punto della regione  $R$  passa una orbita e una sola del sistema (questo fatto non è più vero per sistemi di equazioni differenziali in cui il secondo membro dipende esplicitamente da  $t$ ).

**DIMOSTRAZIONE** Se  $C_1 : x = x_1(t)$ ,  $y = y_1(t)$  e  $C_2 : x = x_2(t)$ ,  $y = y_2(t)$  sono due orbite distinte con un punto in comune:

$$(x_0, y_0) = (x_1(t_1), y_1(t_1)) = (x_2(t_2), y_2(t_2)),$$

si considerino le funzioni  $\tilde{x}(t) = x_1(t+t_1-t_2)$ ,  $\tilde{y}(t) = y_1(t+t_1-t_2)$ . Esse costituiscono, per l'osservazione precedente, una soluzione del sistema e corrispondono all'orbita  $C_1$ . Siccome  $(\tilde{x}(t_2), \tilde{y}(t_2)) = (x_0, y_0) = (x_2(t_2), y_2(t_2))$ , per il teorema di unicità si deve avere  $\tilde{x}(t) = x_2(t)$ ,  $\tilde{y}(t) = y_2(t)$  e, dunque, le orbite  $C_1$  e  $C_2$  coincidono.

Si faccia attenzione a non confondere le orbite con le soluzioni; una orbita è una curva  $\Gamma$  che è rappresentata parametricamente da più di una soluzione:  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $x(t+c)$ ,  $y(t+c)$  con  $c \neq 0$  sono soluzioni distinte ma individuano la stessa orbita.

Le orbite possono essere *orientate* pensando di percorrerle nel verso crescente di  $t$ .

Come nel caso delle equazioni autonome lo studio qualitativo delle soluzioni del sistema (8.1) inizia determinando i *punti critici* o *stazionari*, cioè le soluzioni del sistema algebrico

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases} \quad (8.4)$$

Se  $(x_0, y_0)$  è soluzione di (8.4), allora  $x(t) = x_0$ ,  $y(t) = y_0$  è soluzione del sistema (8.1) per ogni  $t$ ; l'orbita che passa per  $(x_0, y_0)$  coincide con il punto stesso. A differenza, però, del caso delle equazioni, il comportamento delle orbite "vicine" al punto critico può essere di tipo molto differente, come mostrano gli esempi seguenti (Figura 8.1) nei quali il punto  $(0,0)$  è critico (ed è l'unico punto critico).

## STABILITÀ E STABILITÀ ASINTOTICA

Le equazioni (8.1) si possono interpretare da un punto di vista cinematico nel modo seguente: si consideri sulla regione  $R$  un campo di vettori di componenti  $f(x,y)$ ,  $g(x,y)$ ; il sistema di equazioni differenziali (8.1) descrive il moto di una particella  $(x,y)$  la cui velocità  $(x',y')$  è data in ogni punto di  $R$  da  $(f(x,y), g(x,y))$ . Le orbite del sistema sono le traiettorie descritte dalla particella e i punti critici sono i punti di equilibrio. Il piano  $x, y$  viene anche detto *piano delle fasi*.

Si dicono *isolati* quei punti critici tali che in un loro intorno non ve ne siano altri. La precedente analogia meccanica conduce naturalmente alla definizione seguente.

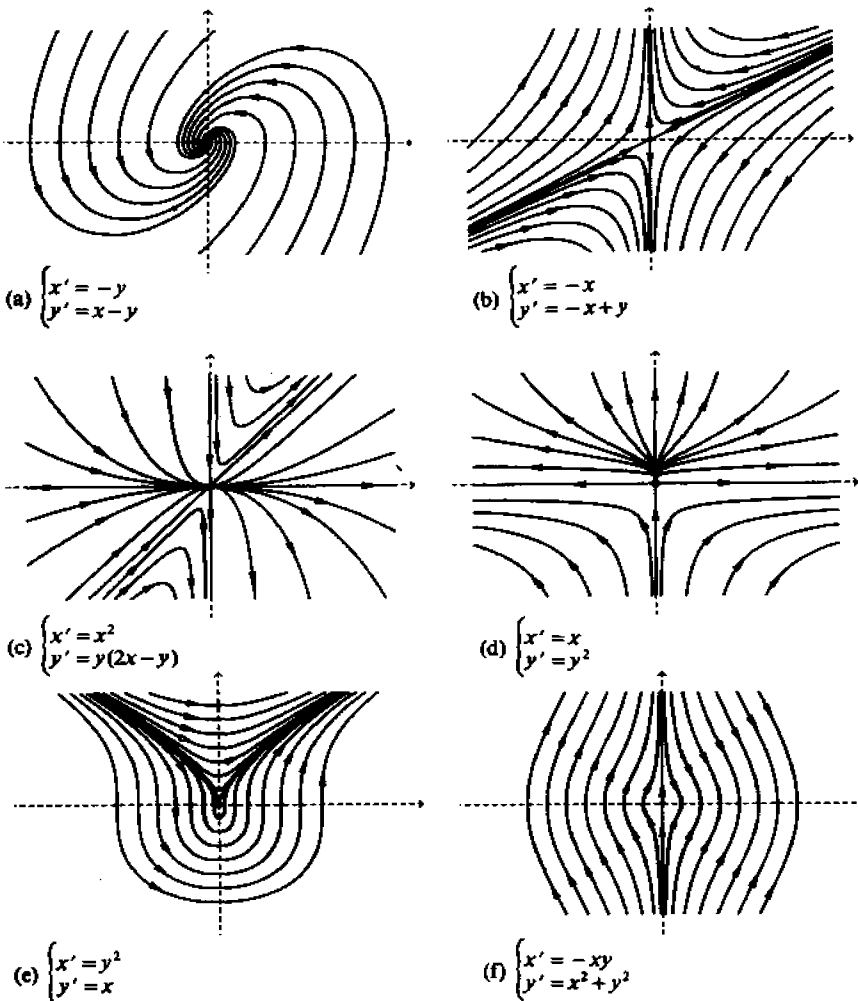
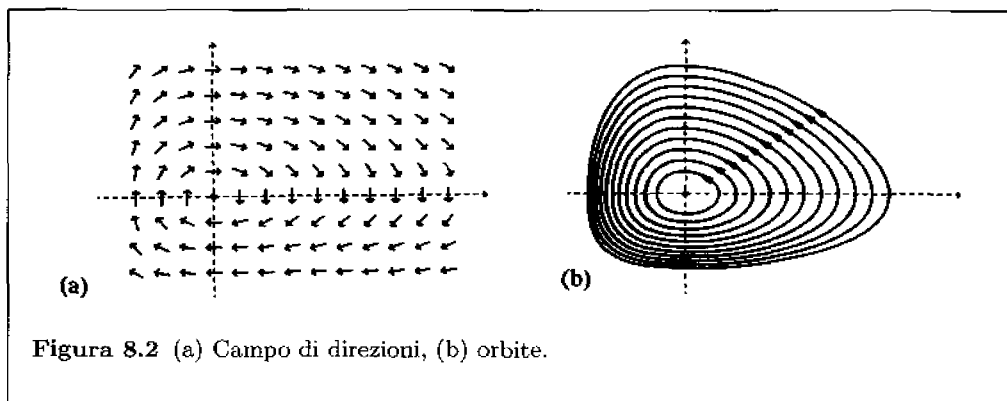


Figura 8.1 Esempi di orbite di sistemi che hanno l'origine come unico punto critico.

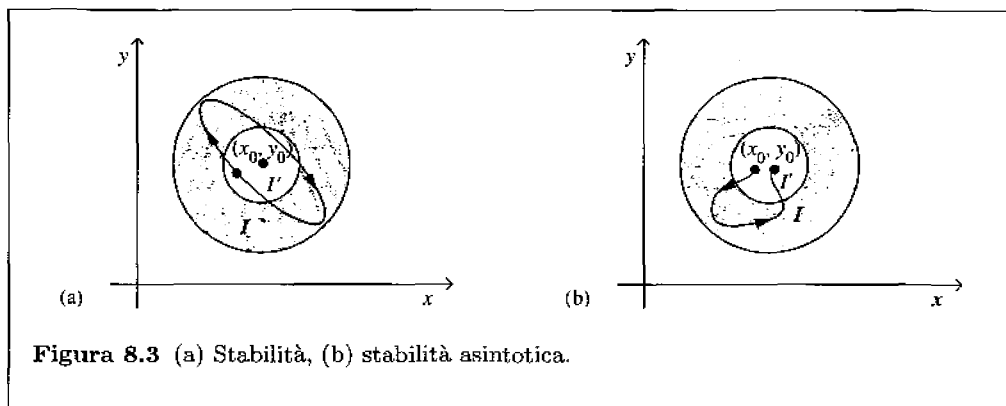


**DEFINIZIONE 8.3** Un punto critico isolato  $(x_0, y_0)$  del sistema (8.1) si dice *stabile* se per ogni suo intorno  $I$  se ne può trovare un altro,  $I'$ , contenuto in  $I$  in modo che ogni soluzione  $x(t), y(t)$  che passa per un punto di  $I'$  rimanga in  $I$  per ogni  $t$  successivo. Il punto  $(x_0, y_0)$  si dice poi *asintoticamente stabile* se è stabile e vi è un suo intorno  $I$  tale che per ogni orbita  $x(t), y(t)$  che passa per un punto di  $I$  si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_0$ .

Un punto critico isolato che non è stabile si dice *instabile*.

In altri termini un punto critico è stabile se le orbite che partono vicino a esso rimangono sempre vicine, è asintoticamente stabile se le orbite tendono al punto critico per  $t \rightarrow +\infty$ . Ovviamente si possono dare definizioni analoghe quando interessa il comportamento per  $t \rightarrow -\infty$ , anziché per  $t \rightarrow +\infty$ .

La Figura 8.3 illustra geometricamente le nozioni di stabilità e di stabilità asintotica.



Allo scopo di individuare alcuni comportamenti tipici delle traiettorie nell'intorno di un punto stazionario conviene studiare dapprima i sistemi lineari a coefficienti costanti.



## 8.1 Sistemi lineari omogenei a coefficienti costanti

Sono i sistemi della forma

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (8.5)$$

in cui  $a, b, c, d$  sono numeri assegnati.

Il punto  $(0,0)$  è un punto critico per il sistema considerato e, se  $ad - bc \neq 0$ , non ve ne sono altri. Studieremo solo questo caso lasciando al lettore l'analisi del caso in cui  $ad - bc = 0$  (Esercizio 8.1.4).

Non è difficile ottenere la soluzione esplicita del sistema (8.5) ma, dato che il nostro obiettivo prevalente è lo studio qualitativo delle soluzioni, conviene seguire un'altra strada. Anzitutto osserviamo che se  $x(t), y(t)$  è una soluzione di (8.5), derivando la prima equazione e usufruendo della seconda si ha

$$x'' = ax' + bcx + bdy; \quad (8.6)$$

ma, dalla prima equazione si ricava  $by = x' - ax$  e sostituendo in (8.6) otteniamo  $x'' = (a + d)x' + (bc - ad)x$ . Pertanto  $x(t)$  è soluzione dell'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti

$$z'' - (a + d)z' + (ad - bc)z = 0; \quad (8.7)$$

in modo analogo si verifica che anche  $y(t)$  è soluzione di (8.7). Abbiamo così dimostrato che se  $x(t), y(t)$  è una soluzione del sistema lineare (8.5) allora le funzioni  $x(t)$  e  $y(t)$  risolvono l'equazione (8.7).

Si noti che l'equazione caratteristica di (8.7) (Paragrafo 7.2) è

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0, \quad (8.8)$$

e coincide con il polinomio caratteristico della matrice dei coefficienti del sistema assegnato:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix}.$$

Dunque le radici

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} [(a + d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}]$$

di (8.8) sono gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Ricordando quanto si è visto circa la soluzione delle equazioni lineari a coefficienti costanti risulta che il comportamento delle soluzioni del sistema dato dipende dalla natura di tali autovalori; occorrerà distinguere i casi in cui tali autovalori sono reali distinti, reali coincidenti oppure complesso-coniugati.

### CLASSIFICAZIONE DEI PUNTI CRITICI

Per semplificare la descrizione del comportamento delle orbite attorno al punto critico, conviene effettuare una opportuna trasformazione lineare del tipo

$$\begin{cases} \xi = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \delta y \end{cases}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0. \quad (8.9)$$

Tale trasformazione è biunivoca, manda il punto  $(0,0)$  in sé, gli intorno di  $(0,0)$  in intorno di  $(0,0)$ , modifica le orbite deformandole ma ne mantiene inalterato il comportamento qualitativo nelle vicinanze dell'origine. Sarà nostra cura scegliere, nei vari casi che si presenteranno, i parametri  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  in modo che, assoggettando il sistema (8.5) a tale trasformazione, esso si riduca a un sistema più semplice, in modo che lo studio delle traiettorie risulti pressoché immediato.

**1° caso.** Gli autovalori  $\lambda_1, \lambda_2$  sono reali, distinti e non nulli. In questo caso si ha dunque

$$(a-d)^2 + 4bc > 0,$$

e supporremo  $\lambda_1 > \lambda_2$ .

Scambiando eventualmente  $x$  con  $y$  si può ritenere  $c \neq 0$ . Allora la trasformazione

$$\begin{cases} \xi = cx + (\lambda_1 - a)y \\ \eta = cx + (\lambda_2 - a)y \end{cases} \quad (8.10)$$

manda il sistema (8.5) nel sistema

$$\begin{cases} \xi' = \lambda_1 \xi \\ \eta' = \lambda_2 \eta. \end{cases}$$

Infatti, essendo  $\lambda_1 \lambda_2 = ad - bc$  e  $\lambda_1 + \lambda_2 = a + d$ , si ha

$$\begin{aligned} \xi' &= cx' + (\lambda_1 - a)y' = cax + cby + (\lambda_1 - a)(cx + dy) = \\ &= \lambda_1 cx + (-\lambda_1 \lambda_2)y + \lambda_1 dy = \lambda_1 cx + \lambda_1(\lambda_1 - a)y = \lambda_1 \xi \end{aligned}$$

e analogamente per  $\eta$ .

Studiamo, dunque, il sistema

$$x' = \lambda_1 x; \quad y' = \lambda_2 y \quad (8.11)$$

(ove  $\lambda_1, \lambda_2$  sono numeri reali, distinti e non nulli) che chiameremo *sistema canonico*. Le soluzioni di (8.11) sono date da

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y(t) = C_2 e^{\lambda_2 t} \quad (8.12)$$

ove  $C_1$  e  $C_2$  sono delle costanti. Distinguiamo due sottocasi.

**A)**  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  hanno lo stesso segno.

La forma della traiettoria è individuata dal rapporto  $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$ , in quanto  $x^{\lambda_2}$  è proporzionale a  $y^{\lambda_1}$ , mentre il verso di percorrenza è individuato dal segno di  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Le orbite hanno il comportamento riportato in Figura 8.4.

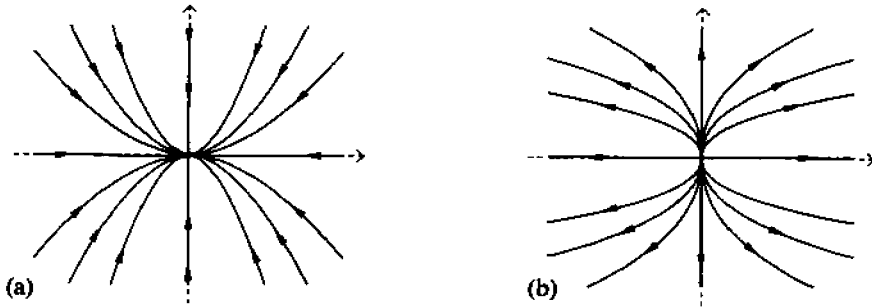


Figura 8.4 Autovalori reali distinti dello stesso segno: (a)  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ , (b)  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ .

Il punto critico  $(0,0)$  si dice *nodo*; se le orbite sono orientate verso l'origine (caso (a)) esso è *asintoticamente stabile*, in caso contrario (caso (b)) è *instabile*.

Quattro particolari orbite sono date dalle semirette che individuano gli assi cartesiani. Si noti che risulta

$$\frac{dy}{dx} = kx^{\gamma-1}$$

con  $k = \gamma \frac{C_2}{C_1^\gamma}$  e, dunque, per  $x \rightarrow 0$  si ha

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \gamma > 1 \\ \infty & \text{se } \gamma < 1. \end{cases}$$

**B)**  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  hanno segno opposto.

Le traiettorie hanno la forma riportata nella Figura 8.5.

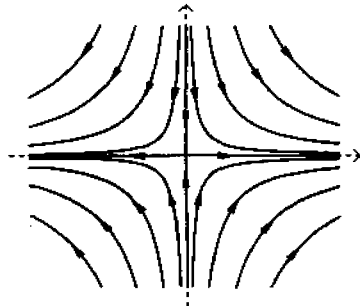


Figura 8.5 Autovalori reali di segno opposto:  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ .

L'origine si dice *punto di sella* ed è instabile. Gli assi coordinati contengono, ciascuno, una coppia di orbite che sono dirette verso l'origine o in direzione opposta a seconda che il corrispondente autovalore sia quello positivo o quello negativo; tali traiettorie si dicono *separatrici*. Ogni altra orbita ha tali separatrici come asintoti.

**ESEMPI 8.4** (a) Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = -2x + \frac{1}{2}y \\ y' = 2x - 2y. \end{cases} \quad (8.13)$$

L'equazione caratteristica è

$$\det \begin{pmatrix} -2-\lambda & 1/2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2+\lambda)^2 - 1 = 0$$

e, dunque,  $\lambda_1 = -1$  e  $\lambda_2 = -3$  sono gli autovalori. L'origine è allora un *nodo stabile*. La trasformazione (8.10) si scrive

$$\begin{cases} \xi = 2x + y \\ \eta = 2x - y \end{cases}$$

e, dunque, manda la retta  $y = 2x$  nell'asse delle ascisse  $\eta = 0$  e la retta  $y = -2x$  nell'asse delle ordinate  $\xi = 0$ . Le soluzioni del sistema canonico  $\xi' = -\xi$ ,  $\eta' = -3\eta$  sono del tipo  $\xi(t) = c_1 e^{-t}$ ,  $\eta(t) = c_2 e^{-3t}$  e, dunque, le orbite giacciono sulle curve  $\eta = K\xi^3$ . Dall'andamento delle orbite di tale sistema (Figura 8.6 (a)) si ricava allora il comportamento di quelle del sistema originario (Figura 8.6 (b)).

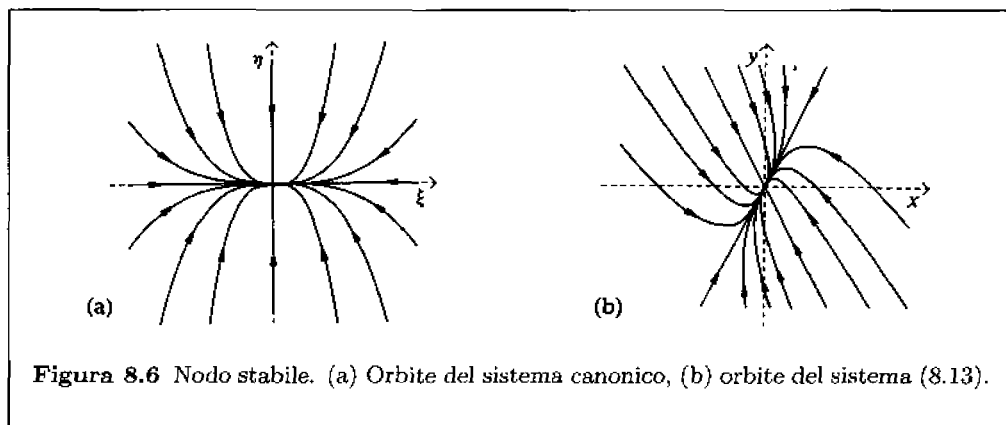


Figura 8.6 Nodo stabile. (a) Orbite del sistema canonico, (b) orbite del sistema (8.13).

(b) Il sistema

$$\begin{cases} x' = 2x - \frac{3}{2}y \\ y' = x - \frac{3}{2}y \end{cases} \quad (8.14)$$

ha autovalori  $\lambda_1 = 3/2$ ,  $\lambda_2 = -1$ . L'origine è, dunque, un punto di sella. La trasformazione (8.10) in questo caso è

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{1}{2}y \\ \eta = x - 3y \end{cases}$$

e manda il sistema (8.14) nel sistema canonico  $\xi' = \frac{3}{2}\xi$ ,  $\eta' = -\eta$ . Le separatrici  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  di quest'ultimo corrispondono alle rette  $y = 2x$ ,  $y = \frac{1}{3}x$  (Figura 8.7).

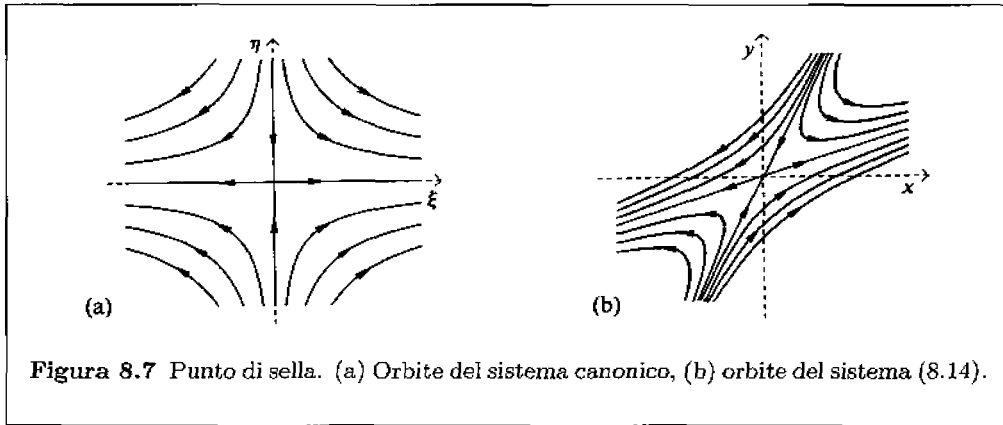


Figura 8.7 Punto di sella. (a) Orbite del sistema canonico, (b) orbite del sistema (8.14).

2° caso. Un solo autovalore  $\lambda = \frac{a+d}{2} \neq 0$ .

Si ha  $(a-d)^2 + 4bc = 0$ . Se  $b = c = 0$  (la matrice  $A$  è diagonale) il sistema è del tipo  $x' = \lambda x$ ,  $y' = \lambda y$  e, dunque, le orbite sono rettilinee. Se  $\lambda < 0$  l'origine è asintoticamente stabile, altrimenti è instabile.

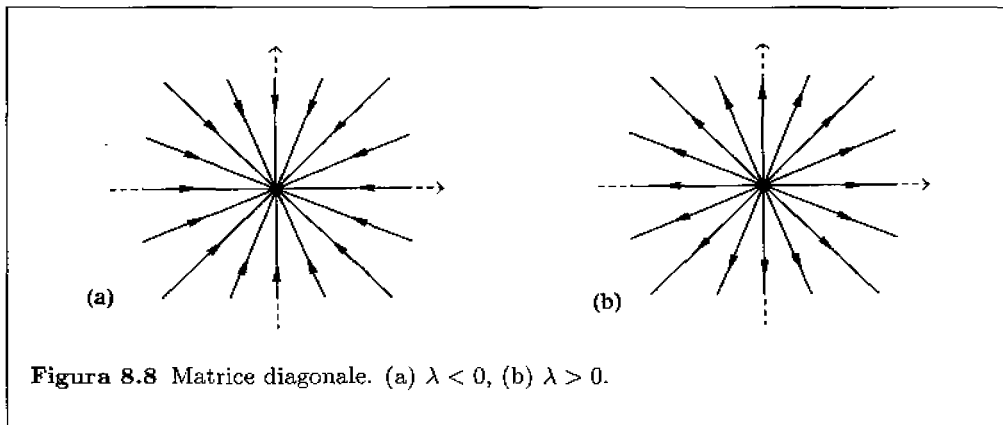


Figura 8.8 Matrice diagonale. (a)  $\lambda < 0$ , (b)  $\lambda > 0$ .

Se invece si ha (per esempio)  $b \neq 0$ , la trasformazione

$$\xi = \frac{1}{b}x, \quad \eta = \frac{a-d}{2b}x + y$$

manda il sistema (8.5) in

$$\xi' = \frac{a+d}{2}\xi + \eta, \quad \eta' = \frac{a+d}{2}\eta$$

che, anche in questo caso, vien detto *sistema canonico*<sup>(1)</sup>.

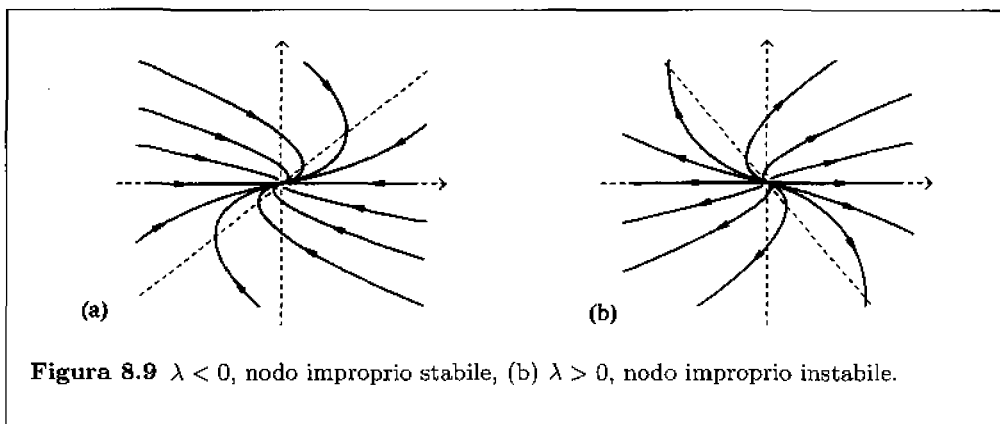
Basta, dunque, considerare un sistema del tipo

$$x' = \lambda x + y, \quad y' = \lambda y \tag{8.15}$$

le cui soluzioni sono

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t}, \quad y(t) = c_2 e^{\lambda t}.$$

Due orbite sono contenute nell'asse  $x$  (per  $c_2 = 0$ ), tutte le altre orbite sono "tangenti" nell'origine all'asse  $x$ . L'origine si dice *nodo improprio* ed è stabile se  $\lambda < 0$ , instabile se  $\lambda > 0$ .



La retta lungo la quale  $x(t)$  cambia direzione (tratteggiata in figura) è la isoclina  $x' = 0$  e, dunque, ha equazione  $y = -\lambda x$ .

**3° caso.** Gli autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono complessi.

Si ha dunque  $(a-d)^2 + 4bc < 0$ . Poniamo

$$\lambda_1 = \alpha + i\beta, \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta \quad \text{con } \alpha \text{ e } \beta \text{ reali, } \beta \neq 0.$$

<sup>(1)</sup>Se invece è  $c \neq 0$ , allora la trasformazione  $\xi = x - \frac{a-d}{2c}y$ ,  $\eta = \frac{1}{c}y$  porta al sistema  $\xi' = \frac{a+d}{2}\xi$ ,  $\eta' = \xi + \frac{a+d}{2}\eta$ .

La trasformazione lineare<sup>(2)</sup>

$$\begin{cases} \xi = cx + (\alpha - a)y \\ \eta = \beta y \end{cases} \quad (8.16)$$

manda il sistema (8.5) nel *sistema canonico*:

$$\begin{cases} \xi' = \alpha\xi - \beta\eta \\ \eta' = \beta\xi + \alpha\eta. \end{cases}$$

Basterà dunque considerare sistemi del tipo

$$x' = \alpha x - \beta y, \quad y' = \beta x + \alpha y. \quad (8.17)$$

Per studiare tale sistema passiamo a coordinate polari

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

dunque

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}, \quad x \neq 0. \quad (8.18)$$

Derivando le (8.18) rispetto a  $t$  otteniamo

$$2rr' = 2xx' + 2yy', \quad (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)\theta' = \frac{xy' - x'y}{x^2}$$

e sostituendo in queste le (8.17) si trovano le equazioni

$$r' = \alpha r, \quad \theta' = \beta,$$

che integrate forniscono

$$r(t) = C_1 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \beta t + C_2.$$

La forma delle traiettorie dipende, dunque, dal segno di  $\alpha$  ed è mostrata nelle figure seguenti.

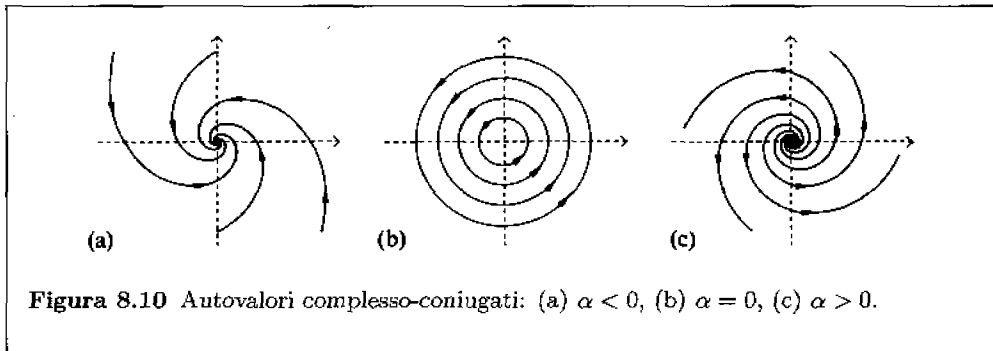


Figura 8.10 Autovalori complesso-coniugati: (a)  $\alpha < 0$ , (b)  $\alpha = 0$ , (c)  $\alpha > 0$ .

<sup>(2)</sup>Si noti che  $c$  è necessariamente diverso da zero.

Se  $\alpha \neq 0$  le traiettorie sono delle spirali (esponenziali); si dice allora che l'origine è un *fuoco* (asintoticamente stabile se  $\alpha < 0$ , instabile se  $\alpha > 0$ ). Se invece  $\alpha = 0$  le traiettorie sono dei cerchi e si dice che l'origine è un *centro*; il punto critico è in questo caso stabile ma non asintoticamente stabile. Le soluzioni sono periodiche di periodo  $\frac{2\pi}{\beta}$  e si possono esprimere nella forma

$$x(t) = C_1 \cos(\beta t + C_2), \quad y(t) = C_1 \sin(\beta t + C_2).$$

Si noti che questa è la sola possibilità, per un sistema lineare, di avere traiettorie periodiche.

Osserviamo infine che, modificando il segno di  $\beta$  cambia il "verso di avvitamento" delle orbite. Ciò d'altra parte corrisponde a invertire il ruolo dei due autovalori  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ .



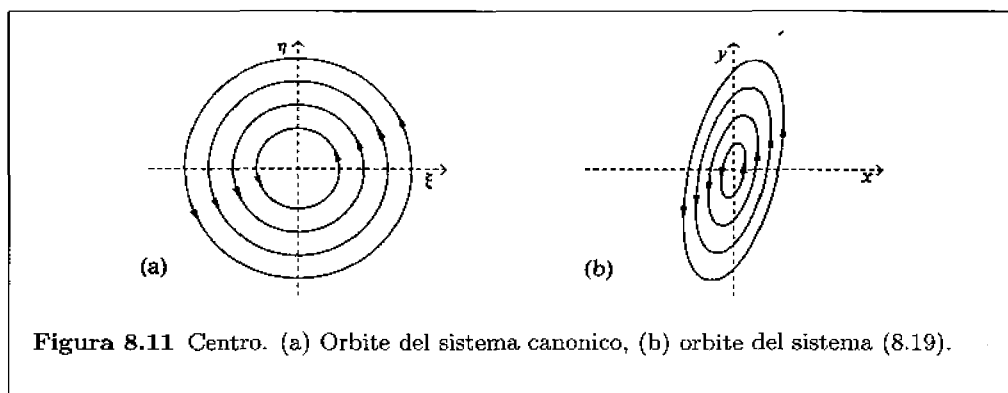
**ESEMPI 8.5 (a)** Il sistema

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 5x - y \end{cases} \quad (8.19)$$

ha autovalori  $\lambda_1 = 2i$ ,  $\lambda_2 = -2i$ . La trasformazione (8.16) si scrive

$$\xi = 5x - y, \quad \eta = 2y.$$

Le orbite del sistema canonico sono i cerchi  $\xi^2 + \eta^2 = k$ ,  $k$  costante, e corrispondono alle ellissi di equazione  $(5x - y)^2 + 4y^2 = 5x^2 - 2xy + y^2 = k$  che sono le orbite del sistema originario (Figura 8.11).



**Figura 8.11** Centro. (a) Orbite del sistema canonico, (b) orbite del sistema (8.19).

**(b)** Il sistema

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = 5x - 2y \end{cases} \quad (8.20)$$

ha autovalori  $\lambda_1 = -1 + 2i$ ,  $\lambda_2 = -1 - 2i$ . La trasformazione (8.16) è la stessa dell'esempio precedente e consente di descrivere qualitativamente le orbite del sistema



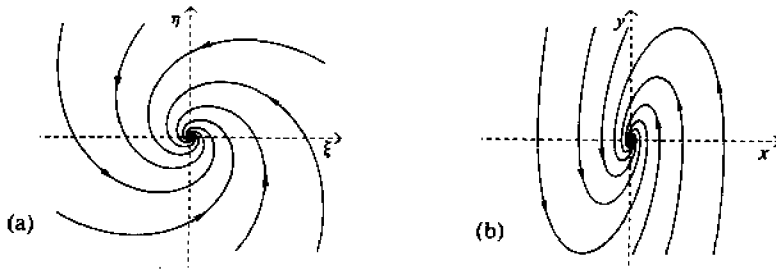


Figura 8.12 Fuoco stabile. (a) Orbite del sistema canonico, (b) orbite del sistema (8.20).

sulla base di quelle del corrispondente sistema canonico (Figura 8.12). Poiché  $\alpha < 0$ , l'origine è un punto critico asintoticamente stabile.



Oltre ai casi citati vi è la possibilità che 0 sia autovalore per la matrice  $A$ ; in tale caso vi sono altri punti stazionari oltre all'origine e tali punti formano una retta oppure sono tutti i punti del piano (Esercizio 8.1.4).

Riassumiamo i risultati ottenuti nel teorema seguente.

**TEOREMA 8.6** Il sistema

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}, \quad ad - bc \neq 0,$$

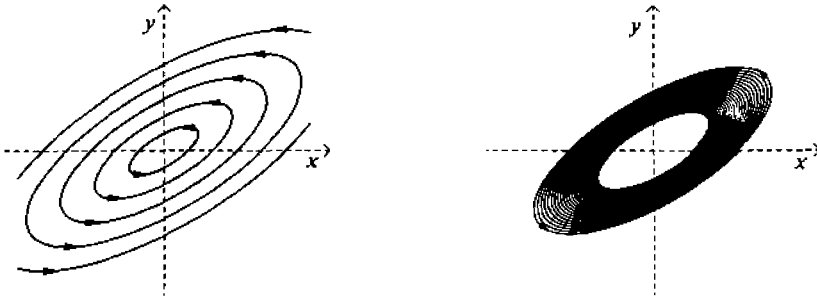
in cui  $a, b, c, d$  sono costanti reali assegnate, ha l'origine come unico punto critico. Tale punto è

- a) stabile se gli autovalori della matrice dei coefficienti sono immaginari puri,
- b) asintoticamente stabile se tali autovalori sono reali ed entrambi negativi, oppure complessi con parte reale negativa,
- c) instabile negli altri casi.

Dalla precedente discussione segue chiaramente che le caratteristiche qualitative e di stabilità del punto critico dipendono unicamente dagli autovalori di  $A$ ; poiché essi sono funzioni degli elementi  $a, b, c, d$  della matrice, è naturale chiedersi in che modo "piccole perturbazioni" dei coefficienti possano influire sulla stabilità delle soluzioni.

Vi sono due casi critici: se gli autovalori di  $A$  sono immaginari puri, le traiettorie sono curve chiuse, ma una piccola perturbazione dei coefficienti può portare tali autovalori fuori dall'asse immaginario e le traiettorie divengono allora spirali (stabili oppure instabili). Le caratteristiche di stabilità del punto stazionario vengono così radicalmente mutate (Figura 8.13).

Un'altra situazione "sensibile" si ha quando gli autovalori sono eguali; anche in questo caso una piccola perturbazione dei coefficienti può far perdere loro questa caratteristica



**Figura 8.13** Perturbazione dei coefficienti nel caso del centro: (a)  $x' = x - 2y, y' = x - y$ ;  
(b)  $x' = 1.01x - 2y, y' = x - y$ .

e, per esempio, far divenire tali autovalori una coppia di numeri complesso-coniugati  $\alpha \pm i\beta$ . Comunque piccolo sia  $\beta$  le traiettorie divengono allora spirali, mutando radicalmente comportamento. Si noti, tuttavia, che in questo ultimo caso vengono conservate le proprietà di instabilità o di asintotica stabilità del punto stazionario.

### ESERCIZI

**8.1.1** Sostituire ognuna delle seguenti equazioni differenziali con un sistema equivalente di equazioni del primo ordine:

(a)  $x'' - t^2 x' - tx = 0$  (si ponga  $x' = y$ );

(b)  $x''' = x'' - t^2(x')^2$  (si ponga  $y = x', z = y'$ ).

**8.1.2** Dai sistemi di equazioni differenziali del primo ordine dati, si ricavi una singola equazione differenziale di ordine superiore:

(a)  $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y \end{cases}$ , (b)  $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 4x - 2y \end{cases}$ .

**8.1.3** Descrivere la natura del punto critico  $(0,0)$  dei seguenti sistemi lineari e studiarne la geometria delle orbite:

(a)  $\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$ , (b)  $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = -\frac{1}{4}y \end{cases}$ ,

(c)  $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$ , (d)  $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x - y \end{cases}$ .

**8.1.4** Si consideri il sistema lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}$$

con  $ad - bc = 0$ ; si provi che si verifica una delle seguenti situazioni:

(a) vi è una retta di punti critici, le orbite sono rettilinee e si avvicinano oppure si allontanano da essa per  $t \rightarrow +\infty$ ,

(b) vi è una retta di punti critici e le orbite sono rettilinee e a essa parallele,

(c) ogni punto del piano è punto critico.

**8.1.5** Integrare esplicitamente i sistemi (a), (b), (c) dell'Esercizio 8.1.3.

**8.1.6** Due specie animali vivono nella medesima "nicchia" ecologica e sono in competizione per il cibo. Indicando con  $x$  e  $y$  la popolazione (o la densità di popolazione) delle due specie, il più semplice modello è dato da

$$\begin{cases} x' = ax - by, & x(0) = x_0 > 0 \\ y' = cy - dx, & y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

dove  $a, b, c, d$  sono costanti positive. Discutere la stabilità del punto di equilibrio non nullo e studiare il comportamento qualitativo delle soluzioni al variare dei dati.

Integrare esplicitamente il sistema e, in particolare, scrivere le soluzioni nel caso  $a = c = 2$ ,  $b = 0,2$ ,  $d = 0,1$ ,  $x_0 = 100$ ,  $y_0 = 200$  determinando se una delle due specie si estingue.

**8.1.7** Se il sistema lineare a coefficienti costanti non è omogeneo, ma il termine noto non è troppo complicato, si può usare il *metodo dei coefficienti indeterminati* (v. pag. 324): prima si risolve il sistema omogeneo autonomo, poi si cerca una soluzione particolare del sistema completo.

Risolvere i seguenti sistemi, con le condizioni a fianco indicate:

$$(a) \quad \begin{cases} x' = -x + 4y + e^{3t} & x(0) = 0 \\ y' = -x + 3y - 1 & y(0) = 0 \end{cases}$$

(si cerchi la soluzione particolare del sistema non omogeneo nella forma  $\bar{x} = A + Be^{3t}$ ,  $\bar{y} = C + De^{3t}$ );

$$(b) \quad \begin{cases} x' = -x + 4y + \cos t & x(0) = 0 \\ y' = -x + 3y & y(0) = 0 \end{cases}$$

( $\bar{x} = A \cos t + B \sin t$ ,  $\bar{y} = C \cos t + D \sin t$ );

$$(c) \quad \begin{cases} x' = x + 2y + e^{-t} & x(0) = 0 \\ y' = 2x + y & y(0) = 0 \end{cases}$$

( $\bar{x} = (At + B)e^{-t}$ ,  $\bar{y} = (Ct + D)e^{-t}$ );

$$(d) \quad \begin{cases} x' = x + 2y + e^t & x(0) = 0 \\ y' = 2x + y + 1 & y(0) = 0. \end{cases}$$

8.1.8 Si consideri l'equazione delle *oscillazioni smorzate*

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} + \mu \frac{du}{dt} + ku = 0;$$

si scriva un sistema di due equazioni differenziali del primo ordine per  $x = u$ ,  $y = \frac{du}{dt}$  e si studi la stabilità del punto critico  $(0,0)$  in funzione dei parametri  $m$ ,  $\mu$ ,  $k$ . Si effettui una analisi simile anche per l'equazione del *circuito oscillante*

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0.$$

8.1.9 Trovare la soluzione generale del sistema

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y. \end{cases}$$

Mostrare che una qualunque equazione lineare di ordine superiore ricavata dal sistema non è equivalente a esso.

## 8.2 Sistemi non lineari

Nella sezione precedente si è visto come si possa descrivere, sulla base degli autovalori della matrice dei coefficienti, il comportamento di un sistema lineare a coefficienti costanti. Scopo di questo paragrafo è quello di mostrare come si possa studiare il comportamento *locale* delle orbite di un sistema non lineare usufruendo di queste tecniche lineari.

### IL TEOREMA DI LINEARIZZAZIONE

Consideriamo un sistema non lineare

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \quad (8.21)$$

e supponiamo che vi sia un punto critico *isolato*; con una opportuna traslazione si può allora supporre che tale punto sia l'origine:

$$f(0,0) = g(0,0) = 0,$$

$$[f(x)]^2 + [g(x)]^2 \neq 0 \quad \text{per} \quad 0 < x^2 + y^2 < r^2.$$

Scriviamo la (8.21) nella forma seguente

$$\begin{cases} x' = ax + by + \varphi(x,y) \\ y' = cx + dy + \psi(x,y) \end{cases} \quad (8.22)$$

e facciamo l'ipotesi

$$\varphi(x,y) = o(r), \quad \psi(x,y) = o(r) \quad \text{per} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0. \quad (8.23)$$

Per esempio, supponendo  $f$  e  $g$  regolari, basterà sviluppare tali funzioni con la formula di Taylor di centro  $(0,0)$ ; si avrà dunque

$$a = f_x(0,0), \quad b = f_y(0,0), \quad c = g_x(0,0), \quad d = g_y(0,0). \quad (8.24)$$

Il sistema lineare

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (8.25)$$

con  $a, b, c, d$  dati da (8.24) si dice *sistema linearizzato* di (8.21) attorno al punto critico  $(0,0)$ .

Per esempio, per il sistema

$$\begin{cases} x' = x^2 - x + \text{sen } 2y \\ y' = e^y - 1 + 3x \end{cases} \quad (8.26)$$

si ha  $f_x(0,0) = -1$ ,  $f_y(0,0) = 2$ ,  $g_x(0,0) = 3$ ,  $g_y(0,0) = 1$ ; dunque, il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = 3x + y. \end{cases}$$

Il comportamento locale delle traiettorie del sistema (8.21) risulta, in certi casi ma non in tutti, strettamente correlato con quello delle traiettorie del corrispondente sistema linearizzato. Per descrivere tale comportamento usando la terminologia adottata per i sistemi lineari nel precedente paragrafo, passiamo a coordinate polari; se  $C : x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  è un'orbita del sistema (8.21) possiamo rappresentarla nel modo seguente

$$C : r = r(t), \quad \omega = \omega(t), \quad r(t) > 0$$

ove  $x(t) = r(t) \cos \omega(t)$ ,  $y(t) = r(t) \text{sen } \omega(t)$ .

Supponiamo che vi sia un intorno  $U$  del punto critico  $(0,0)$  nel quale:

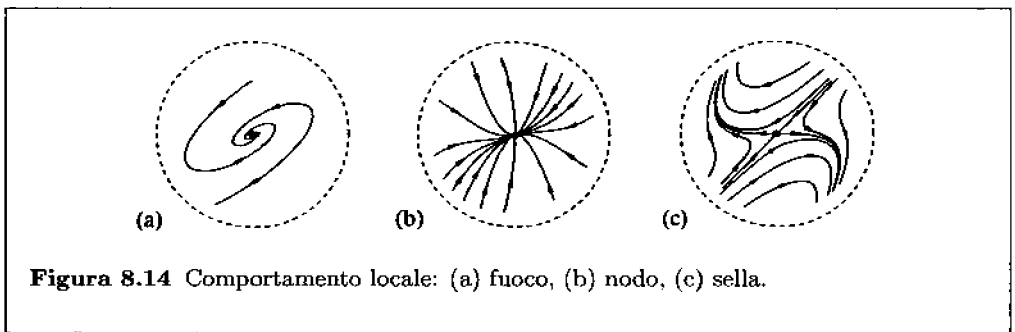
- a) tutte le traiettorie sono definite per ogni  $t$ ,
- b) si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$  oppure  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$ .

Allora se per ogni traiettoria si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\omega(t)| = \infty$  oppure  $\lim_{t \rightarrow -\infty} |\omega(t)| = \infty$  il punto  $(0,0)$  si dice *fuoco* (e sarà *asintoticamente stabile* nel primo caso, *instabile* nel secondo); se per ogni traiettoria, eccettuata una sola, si ha  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \omega(t) = c$ , oppure  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \omega(t) = c$ , ove  $c$  è una certa costante, il punto  $(0,0)$  si dice *nodo* (asintoticamente stabile o instabile).

Se poi vi sono due traiettorie per le quali  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = 0$  e due altre per le quali  $\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = 0$ , mentre ogni altra traiettoria è definita in un intorno di  $(0,0)$  solo in un intervallo finito  $(t_1, t_2)$ , allora si dice che  $(0,0)$  è *punto di sella*.

È facile riconoscere in queste definizioni l'andamento qualitativo delle orbite descritto per il caso lineare nel paragrafo precedente (Figura 8.14).

Un risultato molto importante è fornito dal teorema seguente.



**TEOREMA 8.7** (*di linearizzazione*) Se il sistema non lineare (8.22) ha in  $(0,0)$  un punto critico *isolato* e verifica le condizioni (8.23) si consideri il corrispondente sistema linearizzato (8.25). Se tale sistema ha in  $(0,0)$  un fuoco, un nodo o un punto di sella allora il punto critico  $(0,0)$  è dello stesso tipo anche per il sistema (8.22) e in tali casi si conserva, passando dal sistema dato al suo linearizzato, il carattere di asintotica stabilità o di instabilità.

Si noti che il teorema non contempla il caso in cui il sistema linearizzato ha un centro, e, dunque, i suoi autovalori sono immaginari puri, né il caso in cui tali autovalori sono uguali. Ciò è in accordo, del resto, col fatto che in questi due casi una piccola perturbazione dei coefficienti modifica radicalmente la natura del punto critico di un sistema lineare (Figura 8.13). Il teorema afferma invece che *in tutti gli altri casi* i termini non lineari aggiuntivi  $\varphi(x,y)$ ,  $\psi(x,y)$  non modificano la stabilità né la natura del punto critico e, dunque, tali caratteristiche si possono determinare studiando il sistema linearizzato (8.25), il che è assai più semplice.

Si può anche dimostrare che l'inclinazione con cui le orbite "entrano" o "escono" dal punto critico (nei casi del nodo o del punto di sella) sono le stesse nei due sistemi, ma per il resto, come mostrano gli esempi che studieremo, la forma "globale" delle orbite può essere considerevolmente diversa.

Una ulteriore osservazione: se un punto critico di un sistema *lineare* è asintoticamente stabile, allora non solo le traiettorie che partono vicino a esso si avvicinano al punto critico per  $t \rightarrow +\infty$ , di fatto *tutte* le orbite tendono al punto critico. In questi casi si dice che il punto è *globalmente asintoticamente stabile*. Questa proprietà è, in un certo senso, una prerogativa dei sistemi lineari e non è vera in generale per i sistemi non lineari. Per questi ultimi un problema per niente facile ma di rilevante interesse pratico è quello di determinare o almeno di stimare l'insieme delle condizioni iniziali per le quali il punto critico è asintoticamente stabile. Questo insieme di punti iniziali viene detto *bacino di attrazione* del punto critico.



**ESEMPI 8.8** (a) Sia  $\alpha$  un parametro reale. Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x' = -x + e^{\alpha y} - 1 \\ y' = e^{x-y} - 1. \end{cases} \quad (8.27)$$

Il corrispondente sistema linearizzato nell'origine è

$$x' = -x + \alpha y, \quad y' = x - y;$$

l'equazione caratteristica di questo sistema è

$$(-1 - \lambda)(-1 - \lambda) - \alpha = 0$$

e, dunque, i suoi autovalori sono

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{\alpha} \text{ se } \alpha \geq 0, \quad \lambda = -1 \pm i\sqrt{-\alpha} \text{ se } \alpha < 0.$$

Se  $\alpha < 0$  l'origine è un fuoco asintoticamente stabile, se  $0 < \alpha < 1$  l'origine è invece un nodo asintoticamente stabile, mentre se  $\alpha > 1$  essa è un punto di sella per il sistema (8.27). Il teorema di linearizzazione non consente di concludere alcunché nei casi  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1$ .

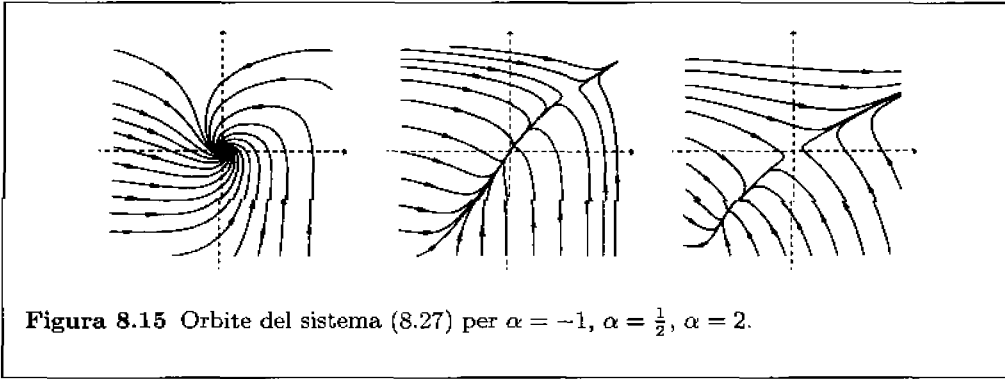


Figura 8.15 Orbite del sistema (8.27) per  $\alpha = -1$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = 2$ .

(b) Un *pendolo semplice* è costituito da una massa  $m$  ancorata a un punto  $O$  da un'asta di peso trascurabile e di lunghezza  $l$  (Figura 8.16).

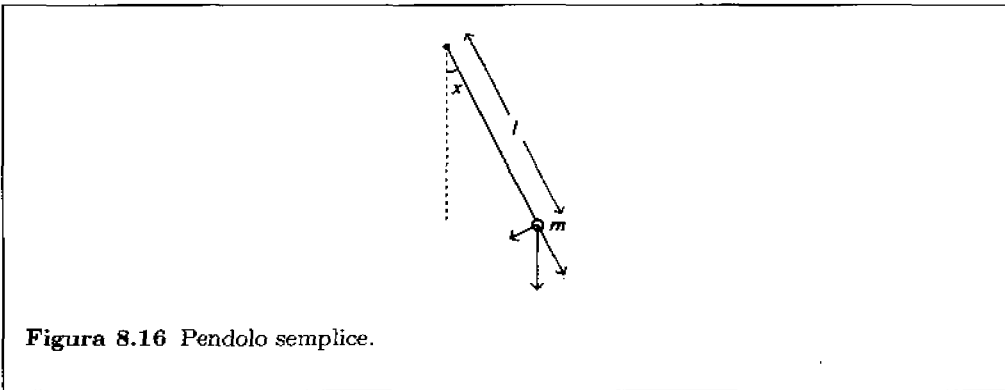


Figura 8.16 Pendolo semplice.

Se questo sistema si muove in un piano verticale la sua posizione è individuata dall'angolo  $x$  che l'asta forma con la verticale e lo stato del sistema all'istante  $t$  è completamente descritto dalle funzioni  $x(t)$ ,  $y(t) = x'(t)$  che denotano posizione e velocità

(angolare) all'istante  $t$ . Supponendo che sul pendolo agisca una forza viscosa proporzionale a  $x'$ , in base al secondo principio della dinamica, si ricavano subito le equazioni:

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -ky - \frac{g}{l} \operatorname{sen} x. \end{cases} \quad (8.28)$$

I punti critici del sistema (8.28) sono

$$(n\pi, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Nel punto  $(0,0)$  il sistema linearizzato di (8.28) è

$$x' = y, \quad y' = -\frac{g}{l}x - ky$$

e i suoi autovalori sono  $\frac{1}{2}(-k \pm \sqrt{k^2 - 4g/l})$ .

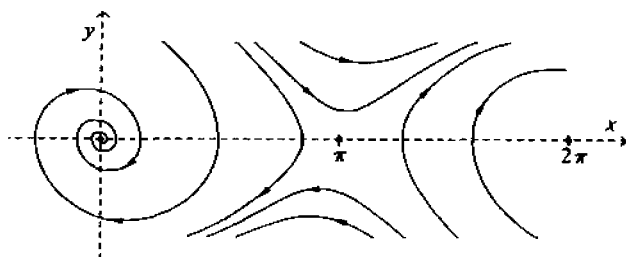
Supponendo  $k^2 < 4g/l$  si ha dunque che  $(0,0)$  è un fuoco asintoticamente stabile per tale sistema e quindi per il sistema originario.

Effettuando il cambiamento di variabile  $x = z + \pi$  si può scrivere il sistema linearizzato nel punto critico  $(\pi, 0)$ :

$$z' = y, \quad y' = \frac{g}{l}z - ky \quad (8.29)$$

e una analisi simile mostra che  $(0,0)$  è un punto di sella per il sistema (8.29), dunque  $(\pi, 0)$  è un punto di sella per il sistema originario.

Si può, pertanto, prevedere un comportamento qualitativo delle orbite del tipo riportato nella Figura 8.17.



**Figura 8.17** Pendolo smorzato.

Tuttavia con metodi più raffinati è possibile mostrare che il comportamento delle orbite del sistema (8.28) è quello illustrato nella figura seguente, che descrive sia il caso senza attrito ( $k = 0$ ), sia quello con  $k > 0$ , tipico delle oscillazioni smorzate.



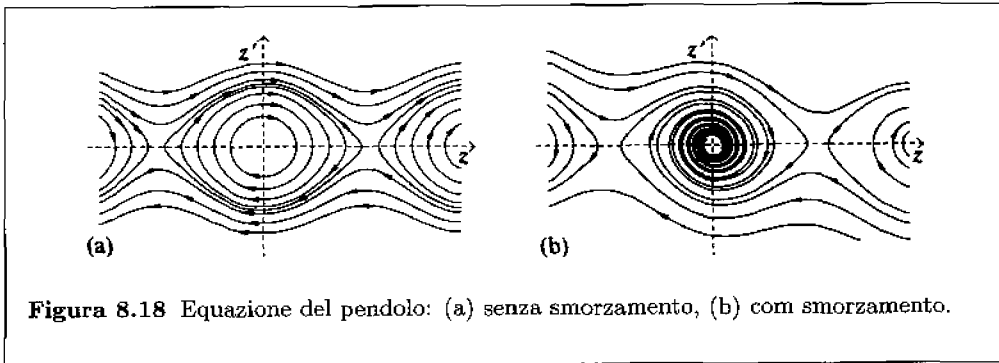


Figura 8.18 Equazione del pendolo: (a) senza smorzamento, (b) con smorzamento.

## ESERCIZI

8.2.1 Trovare i punti critici dei seguenti sistemi, scriverne i corrispondenti sistemi linearizzati e, quando possibile, studiare il comportamento qualitativo delle orbite in un intorno dei punti critici:

$$(a) \begin{cases} x' = y - 3 \\ y' = 2x + 2 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} x' = y \\ y' = -\operatorname{sen} x - y \end{cases},$$

$$(c) \begin{cases} x' = -x + y^2 \\ y' = y^2 - 2y \end{cases}, \quad (d) \begin{cases} x' = 2x - y^2 \\ y' = -y + xy \end{cases},$$

$$(e) \begin{cases} x' = y \\ y' = -x + x^3 \end{cases}, \quad (f) \begin{cases} x' = x - xy \\ y' = xy - y \end{cases}.$$

8.2.2 Descrivere le orbite dei seguenti sistemi:

$$(a) \quad x' = y, \quad y' = x;$$

$$(b) \quad x' = -y - y^3 - x, \quad y' = x;$$

$$(c) \quad x' = 4y, \quad y' = x + xy^2.$$

8.2.3 Descrivere le orbite del seguente sistema:

$$x' = y(1 + x^2 + y^2), \quad y' = -x(1 + x^2 + y^2).$$

8.2.4 Dimostrare che se un sistema di equazioni differenziali ha la soluzione  $x(t)$  ed esistono due numeri  $t_0, T$  con  $T > 0$  tali che sia  $x(t_0 + T) = x(t_0)$ , allora è vero che  $x(t + T) = x(t)$ , cioè la funzione  $x(t)$  è periodica di periodo  $T$ .

8.2.5 Dimostrare che tutte le soluzioni  $x(t), y(t)$  del sistema

$$\frac{dx}{dt} = y(e^x - 1), \quad \frac{dy}{dt} = x + e^y$$

che iniziano nel semipiano  $x \geq 0$  rimangono nel medesimo semipiano.

**8.2.6** Sia  $x(t), y(t)$  una soluzione non costante del sistema non lineare (8.21) con  $f$  e  $g$  ovunque regolari. Si dimostri che se

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y_0$$

allora  $(x_0, y_0)$  non è un punto critico del sistema. Se ne deduca che per un tale sistema “occorre un tempo infinito” per raggiungere (o lasciare) un punto critico.

**8.2.7** Dato il sistema

$$x' = -x - \frac{y}{\ln r}, \quad y' = -y + \frac{x}{\ln r}$$

ove  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , si verifichi che  $(0,0)$  ne è un punto critico isolato. Passando a coordinate polari si verifichi che tale punto è un fuoco per il sistema dato ma è un “punto a stella” per il corrispondente sistema lineare.

**8.2.8** Si consideri il sistema

$$x' = -y + xr^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{r}, \quad y' = x + yr^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Provare che il punto  $(0,0)$  è il solo punto critico e i cerchi  $C_n : r = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots$  sono orbite.

**8.2.9** La descrizione della competizione tra due specie animali data nell'Esercizio 8.1.6 può essere modificata descrivendo l'effetto negativo sullo sviluppo della popolazione come proporzionale al numero di “incontri” tra gli individui delle due specie. Si arriva allora al modello seguente

$$\begin{cases} x' = ax - \alpha xy, & x(0) = x_0 > 0 \\ y' = by - \beta xy, & y(0) = y_0 > 0, \end{cases}$$

dove  $a, b, \alpha, \beta$  sono costanti positive. Discutere la stabilità del punto di equilibrio non nullo e studiare il comportamento qualitativo delle soluzioni al variare dei dati iniziali.

**8.2.10** Verificare che al seguente sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' = axy - bx, & x(0) = x_0 > 0 \\ y' = -axy + bx, & y(0) = y_0 \geq 0 \end{cases}$$

con la condizione  $x + y = N$ , dove  $a, b$  ed  $N$  sono costanti positive, non può essere applicato il teorema di linearizzazione. Ricavare l'equazione autonoma equivalente, studiarla qualitativamente e scriverne esplicitamente le soluzioni. (Si tratta del modello che descrive la diffusione di una malattia infettiva non mortale né immunizzante in una popolazione chiusa di  $N$  individui, dove  $x(t)$  rappresenta il numero degli individui infetti e  $y(t)$  quello dei sani.)

### 8.3 Alcune applicazioni delle equazioni differenziali

#### VIBRAZIONI LINEARI

Consideriamo una particella di massa  $m$  che si muove lungo una retta ed è soggetta a una forza di richiamo elastica, proporzionale allo spostamento, e a una resistenza viscosa, proporzionale alla velocità. In base alla *legge di Newton* il moto della particella verifica l'equazione differenziale

$$mx'' = -\mu x' - kx$$

ove  $x = x(t)$  è lo spostamento al tempo  $t$  rispetto alla posizione di equilibrio, mentre  $\mu$  e  $k$  sono costanti positive che caratterizzano la forza elastica e la resistenza viscosa, e che vengono chiamate *costante elastica* e *costante di smorzamento* del sistema.

Supponiamo che all'istante  $t = 0$  la particella occupi la posizione  $x_0$  e abbia velocità  $v_0$ ; il moto è descritto allora da

$$mx'' + \mu x' + kx = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0. \quad (8.30)$$

Questa stessa equazione interviene nella descrizione di molti modelli di sistemi lineari di natura assai diversa; poiché essa è omogenea e ha coefficienti costanti, per risolverla possiamo usare il metodo descritto per l'equazione (7.56). Le radici dell'equazione caratteristica  $m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0$  sono

$$\lambda = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}.$$

Occorrerà distinguere vari casi.

**1° caso.**  $\mu = 0$  (non vi è resistenza viscosa). Si ha  $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$  e, dunque, la soluzione generale dell'equazione è

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t,$$

ove si è posto  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Imponendo le condizioni iniziali si ricava  $A = x_0$ ,  $B = \frac{v_0}{\omega_0}$ ; dunque la soluzione del problema (8.30) è data da

$$x(t) = x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t. \quad (8.31)$$

Usufruento delle formule di somma per il seno possiamo scrivere la (8.31) nel modo seguente

$$x(t) = R \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (8.32)$$

ove

$$R = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{x_0}{R}, \quad \cos \varphi = \frac{v_0}{\omega_0 R}.$$

La particella si muove, dunque, di *moto armonico*; il numero  $R$  individua l'*ampiezza*,  $\frac{2\pi}{\omega_0}$  è il *periodo* e  $\varphi$  è lo *spostamento di fase*.

Si noti che il periodo è indipendente dalle condizioni iniziali.

**2° caso.**  $0 < \mu < 2\sqrt{mk}$ . Le radici dell'equazione caratteristica sono complesso-coniugate e quindi la soluzione dell'equazione differenziale è del tipo

$$x(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t),$$

ove  $\alpha = \frac{\mu}{2m}$ ,  $\omega_0 = \frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}$ . Imponendo le condizioni iniziali si trova

$$x(t) = e^{-\alpha t} \left( x_0 \cos \omega_0 t + \frac{v_0 + \alpha x_0}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right). \quad (8.33)$$

Il moto della particella è anche in questo caso oscillatorio, ma l'ampiezza delle oscillazioni tende rapidamente a zero al crescere di  $t$  (*oscillazioni smorzate*), (Figura 8.19).

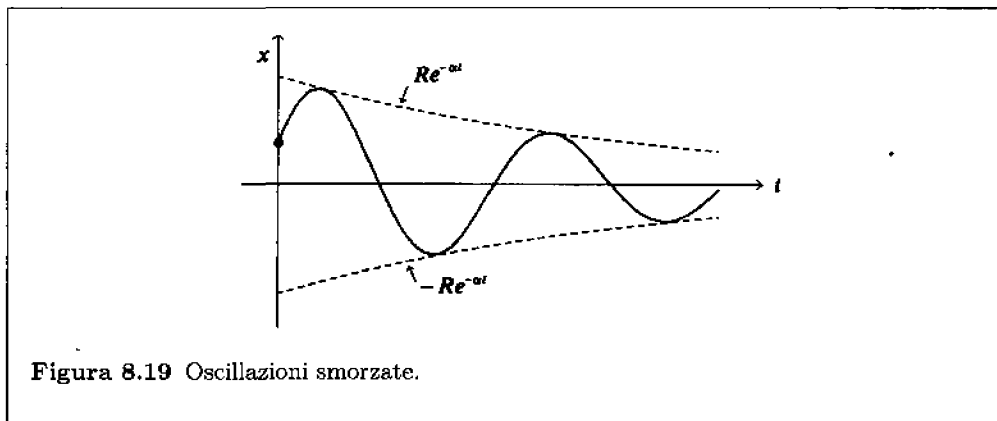


Figura 8.19 Oscillazioni smorzate.

La soluzione si può scrivere più sinteticamente nella forma

$$x(t) = R e^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

con opportuni parametri  $R$  e  $\varphi$ .

**3° caso.**  $\mu = 2\sqrt{mk}$ . L'equazione caratteristica ha una radice doppia e la soluzione del problema (8.30) è data da

$$x(t) = e^{-\alpha t}(x_0 + (v_0 + x_0 \alpha)t),$$

ove  $\alpha = \frac{\mu}{2m}$ .

Anche in questo caso per  $t \rightarrow \infty$  si ha  $x(t) \rightarrow 0$ , ma il moto non ha carattere oscillatorio. Questa situazione è detta di *smorzamento critico*. Nella Figura 8.20 sono raffigurati due comportamenti tipici della soluzione; la particella può attraversare la posizione di equilibrio al più una volta, e ciò dipende dalle condizioni iniziali.

**4° caso.**  $\mu > 2\sqrt{mk}$ . Indicando con  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  le due soluzioni reali dell'equazione caratteristica si ha che la soluzione del problema (8.30) è data da

$$x(t) = \frac{v_0 + x_0 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_1 t} - \frac{v_0 + x_0 \lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{\lambda_2 t}.$$

Il comportamento qualitativo della soluzione è analogo a quello del caso precedente in quanto  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono entrambi negativi; in questo caso si parla di *smorzamento supercritico*.

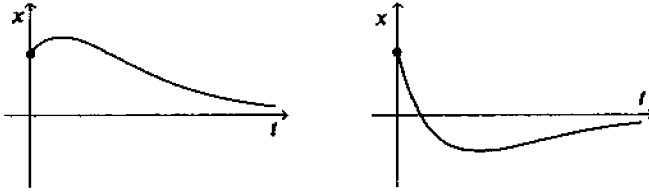


Figura 8.20 Smorzamento critico.

In tutti i casi predetti si può ottenere la descrizione qualitativa del comportamento delle soluzioni studiando nel piano delle fasi le orbite del sistema lineare

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\frac{\mu}{m}y - \frac{k}{m}x, \end{cases} \quad (8.34)$$

ovviamente equivalente all'equazione (8.30).

Se  $\mu \neq 0$  gli autovalori della matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{\mu}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

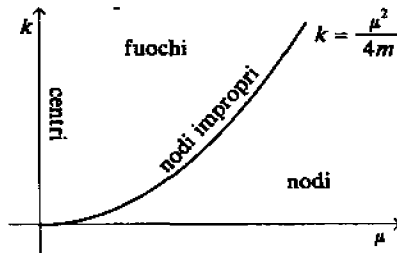
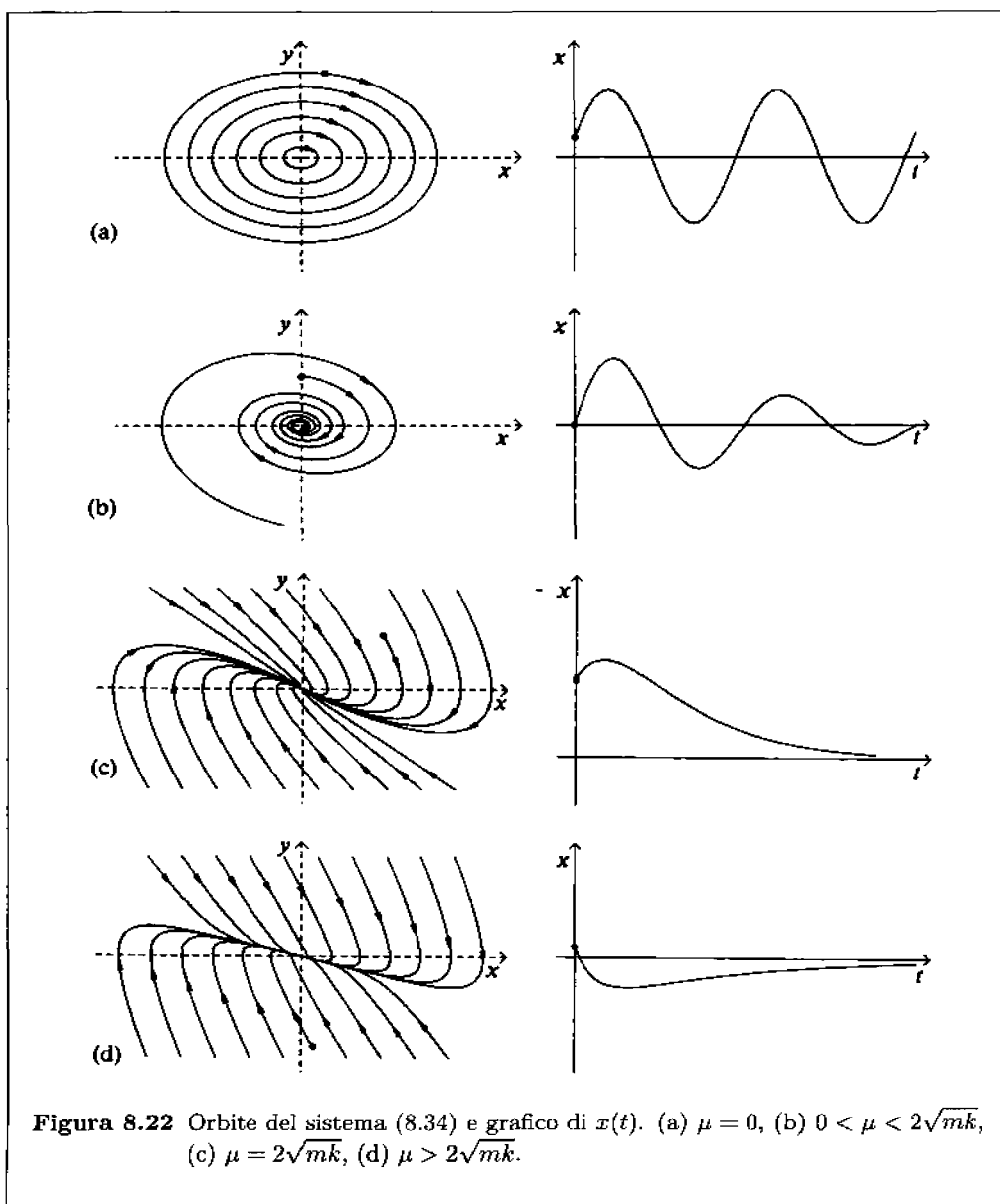


Figura 8.21 Comportamento del punto stazionario  $(0,0)$  per il sistema (8.34).

(che coincidono con le radici dell'equazione  $m\lambda^2 + \mu\lambda + k = 0$ ) hanno sempre parte reale negativa e, dunque, il punto critico  $(0,0)$  è asintoticamente stabile.

Il comportamento delle orbite dipende, però, dai valori di  $k$  e di  $\mu$  e può essere schematizzato nel piano  $k, \mu$  come mostrato dalla Figura 8.21.

La Figura 8.22 riporta il comportamento delle orbite e quello della funzione  $x = x(t)$ . Tornando ora al semplice sistema fisico descritto all'inizio, supponiamo che la particella sia soggetta anche a una forza esterna  $F(t)$  dipendente dal tempo; l'equazione del moto



sarà allora

$$mx'' + \mu x' + kx = F(t), \quad (8.35)$$

con le condizioni iniziali

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$$

Abbiamo già determinato l'integrale generale dell'equazione omogenea associata alla (8.35); usando il metodo della variazione delle costanti (Paragrafo 7.2) si riesce sempre

a individuare un integrale particolare della (8.35) e, dunque, a determinare la soluzione del problema. L'osservazione di tale soluzione consente di verificare alcune proprietà che nel problema fisico appaiono prevedibili: se  $F(t)$  è limitata, come è in generale ovvio, e  $\mu > 0$ , vale a dire è presente l'attrito, allora la soluzione è limitata per  $t \geq 0$ ; inoltre, se  $F(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$  anche  $x(t) \rightarrow 0$  per  $t \rightarrow +\infty$ , cioè se la forza esterna al crescere di  $t$  diviene trascurabile, allora la particella tende alla posizione di equilibrio.

Tali conclusioni non sono più vere nel caso in cui  $\mu = 0$ . Illustriamo questo fatto con un esempio. Consideriamo l'equazione

$$mx'' + kx = M \cos \omega t; \quad (8.36)$$

è facile trovarne la soluzione generale: se  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \neq \omega$  essa si scrive

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{M}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t. \quad (8.37)$$

Imponendo che la particella sia inizialmente ferma nella posizione di equilibrio ( $x(0) = x'(0) = 0$ ) si possono determinare le costanti  $A$  e  $B$ ; si ha allora

$$x(t) = \frac{2M}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t).$$

Il moto della particella è la sovrapposizione di due moti armonici; usufruendo delle formule di prostaferesi possiamo scrivere

$$x(t) = \frac{2M}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \left( \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \right);$$

$x(t)$ , quindi, è il prodotto di due funzioni una delle quali oscilla più rapidamente dell'altra, il che dà luogo a un fenomeno noto con il nome di "battimenti" (Figura 8.23).

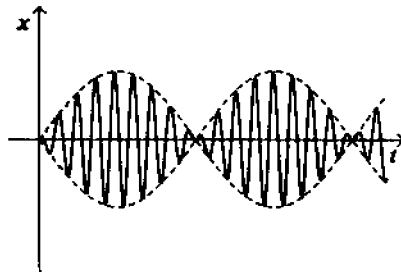


Figura 8.23 Battimenti.

Il comportamento della soluzione è, però, completamente diverso nel caso in cui  $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  (vale a dire la frequenza propria del sistema è uguale alla frequenza della

forza esterna). In tal caso, infatti, la soluzione generale dell'equazione è

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{M}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t \quad (8.38)$$

e la presenza del fattore moltiplicativo  $t$  indica che l'ampiezza di oscillazione del sistema cresce al crescere di  $t$ . Questo fenomeno va sotto il nome di *risonanza* (Figura 8.24).

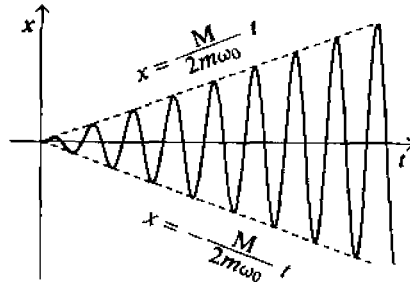


Figura 8.24 Risonanza.

Il fenomeno della risonanza può avere effetti catastrofici su costruzioni civili ed è grande cura degli ingegneri cercare di evitare che esso si determini. Nel 1831, in una cittadina vicino a Manchester, una compagnia di soldati stava attraversando “al passo” un ponte sospeso e il ponte è improvvisamente crollato: la frequenza propria di oscillazione delle strutture del ponte era vicina a quella del passo dei militari e il ponte era entrato in risonanza. Da allora è ferrea la regola militare di attraversare i ponti “a passo sciolto”. Nel 1940 nei pressi di Seattle, sulla costa occidentale degli Stati Uniti, un grande ponte costruito da pochi mesi (*Tacoma Bridge*) è entrato in risonanza: la causa era costituita in questo caso da un vento debole ma costante, che interagendo con le strutture del ponte, creava sollecitazioni periodiche con frequenza vicina a quella propria del ponte. In seguito a tali oscillazioni durate più di tre ore e diventate alla fine fortissime, il ponte è interamente crollato.

## CIRCUITI OSCILLANTI

Consideriamo il circuito rappresentato in Figura 8.25 comprendente un generatore, una resistenza  $R$ , una induttanza  $L$  e una capacità  $C$  collegate in serie.

Le cadute di tensione ai capi della resistenza, dell'induttanza e del condensatore sono rispettivamente  $RI$ ,  $\frac{1}{C}q$ ,  $L\frac{dI}{dt}$ , ove  $q$  è la carica del condensatore e  $I$  è l'intensità di corrente che attraversa il circuito. Il flusso di corrente è governato dalla legge di Kirckhoff: la somma algebrica delle cadute di tensione in un circuito chiuso è uguale a zero. Indicando con  $E(t)$  la forza elettromotrice del generatore si ha

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}q - E(t) = 0. \quad (8.39)$$



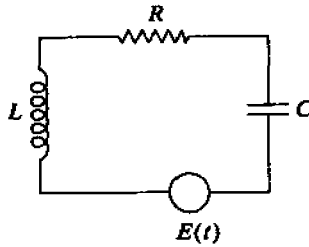


Figura 8.25

Poiché  $I = \frac{dq}{dt}$ , derivando la (8.39) otteniamo

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E'(t); \quad (8.40)$$

tale equazione è formalmente identica alla (8.35): l'induttanza svolge il ruolo della massa, la resistenza quello del termine viscoso e la capacità quello della forza elastica<sup>(3)</sup>.

In particolare, quando  $E(t)$  è costante, le soluzioni di (8.40) si comportano come il sistema meccanico studiato in precedenza e danno luogo a oscillazioni sinusoidali quando  $R = 0$ , a oscillazioni smorzate, a smorzamento critico oppure a smorzamento supercritico quando  $R \neq 0$  e a seconda del segno di  $R^2 - 4\frac{L}{C}$ .

È interessante considerare il caso di una forza elettromotrice *alternata*  $E(t) = E_0 \sin \omega t$ , vale a dire  $E'(t) = E_0 \omega \cos \omega t$ .

Con qualche calcolo, noioso ma non difficile, si riesce a scrivere l'integrale generale della (8.40):

$$I(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} + \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \cos(\omega t + \delta),$$

ove  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sono le radici dell'equazione caratteristica  $L\lambda^2 + R\lambda + \frac{1}{C} = 0$  e  $\delta$  è definito dalla relazioni

$$\sin \delta = \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{Z}, \quad \cos \delta = \frac{R}{Z}, \quad \text{ove } Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Come si è visto in precedenza, se  $R \neq 0$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  hanno entrambi parte reale negativa e quindi  $e^{\lambda_1 t}$  e  $e^{\lambda_2 t}$  tendono entrambi a zero per  $t \rightarrow \infty$ . La soluzione è, dunque, somma della *componente* cosiddetta *transiente*  $Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$  che dipende dalle condizioni iniziali e tende rapidamente a 0, e della *componente stazionaria*

$$I_s(t) = \frac{E_0}{Z} \cos(\omega t + \delta), \quad (8.41)$$

<sup>(3)</sup>Ciò significa che si può studiare un sistema meccanico tramite un circuito elettrico e viceversa. Questo principio è stato utilizzato nella costruzione dei calcolatori elettronici analogici, i quali sono sistemi elettrici molto flessibili in grado di emulare una grande quantità di sistemi fisici di altra natura.

alla quale  $I(t)$  tende per  $t \rightarrow \infty$  e che, dunque, caratterizza il comportamento del circuito in condizioni di regime.

L'ampiezza delle oscillazioni in condizioni di regime è, pertanto, individuata dal termine  $\frac{E_0}{Z}$ ;  $Z$  viene chiamata *impedenza* del circuito e la (8.41) può considerarsi una estensione della *legge di Ohm*. Ovviamente  $Z$  dipende, oltre che dal circuito, anche dalla frequenza di eccitazione  $\omega$ ; la funzione  $K(\omega) = \frac{E_0}{Z}$  ha una derivata che si annulla per  $\omega = \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , mentre è positiva per  $\omega < \omega_1$  e negativa per  $\omega > \omega_1$ . Dunque  $K(\omega)$  ha un massimo nel punto  $\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ; per tale valore della frequenza di eccitazione si raggiunge il massimo dell'ampiezza della componente stazionaria. È questo il fenomeno della *risonanza*:  $\omega_1$  viene anche detta *frequenza naturale* o *di risonanza* del circuito. Si noti che il valore di  $K(\omega)$  nel punto massimo  $\omega = \omega_1$  è  $E_0/R$ , dunque il fenomeno della risonanza è tanto più pronunciato quanto più piccola è la resistenza: pur di prendere  $R$  piccolo a sufficienza si riesce a rendere un circuito *RCL* uno strumento molto selettivo che discrimina fortemente le frequenze diverse dalla frequenza naturale.

Un altro parametro da prendere in considerazione è la *larghezza di banda*  $\Delta\omega = \omega_3 - \omega_2$ , differenza fra i due valori  $\omega_3, \omega_2$  per i quali  $K(\omega)$  è la metà dell'ampiezza di risonanza  $K(\omega_1)$ . Per tali valori si deve avere

$$4R^2 = R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2,$$

da cui  $L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm\sqrt{3}R$ ,  $\Delta\omega = \sqrt{3}\frac{R}{L}$ .

Per avere massima selettività occorrerà allora assumere  $L$  piuttosto grande (volendo mantenere fissata la frequenza di risonanza  $1/\sqrt{LC}$ , occorrerà di conseguenza prendere  $C$  piccolo).

Nella Figura 8.26 sono riportate le curve di risonanza relative a  $R = \alpha$ ,  $L = \frac{1}{\alpha}$ ,  $C = \alpha$  con  $\alpha = 0,2$ ,  $\alpha = 0,5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 2$ .

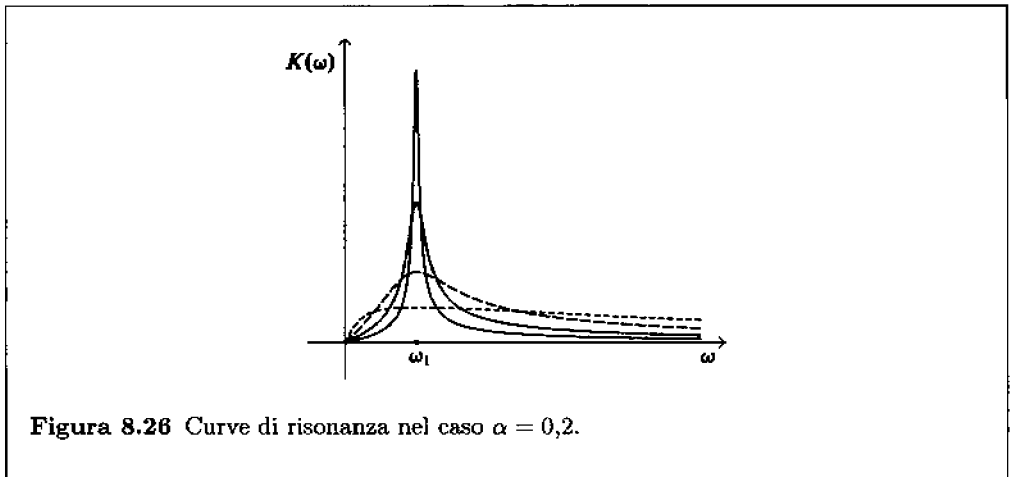


Figura 8.26 Curve di risonanza nel caso  $\alpha = 0,2$ .

## ESERCIZI

- 8.3.1 Una molla  $M$  (come quella di una sospensione di un autoveicolo) è caricata verticalmente da un massa  $m = 300$  kg; il peso corrispondente accorcia la molla di 3 cm. Le vibrazioni della molla vengono frenate da un ammortizzatore idraulico  $A$  (Figura 8.27) con costante di smorzamento  $\mu = 1,2 \cdot 10^4$  newton · s/m. Determinare il moto della massa  $m$  sapendo che all'istante  $t = 0$  essa è nella posizione di equilibrio e che si sta abbassando con velocità  $v_0 = 1$  m/s.

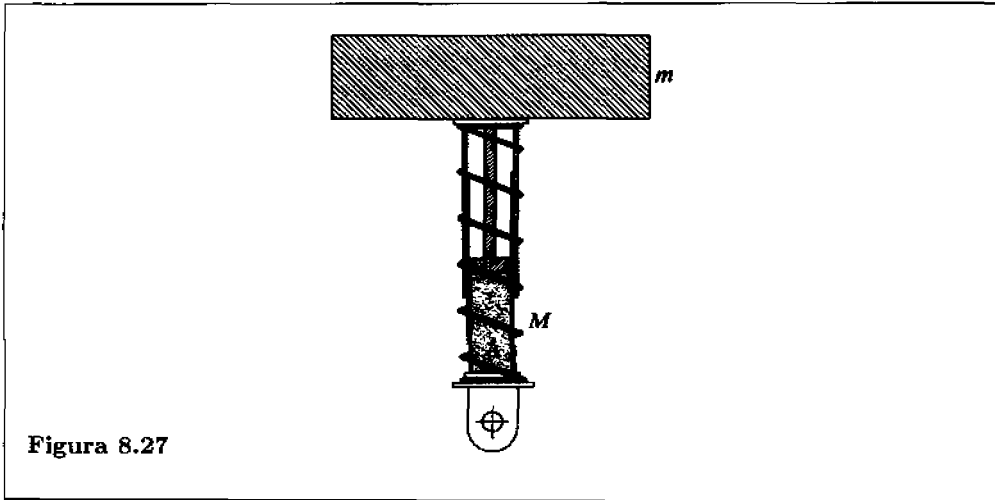


Figura 8.27

- 8.3.2 Risolvere l'esercizio precedente assumendo una costante di smorzamento

$$\mu = 10^4 \text{ newton} \cdot \text{s/m}.$$

- 8.3.3 Trovare le soluzioni dell'equazione differenziale  $mx'' + \mu x' + kx = 0$ , supponendo  $\mu^2 - 4mk < 0$ , che verificano le seguenti condizioni iniziali

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, & x'(0) &= 0, \\ x(0) &= 0, & x'(0) &= v_0, \\ x(0) &= x_0, & x'(0) &= v_0; \end{aligned}$$

si esprima la soluzione nella forma  $Re^{-\mu t/2m} \text{sen}(\omega_0 t + \varphi)$ .

- 8.3.4 Nel caso delle oscillazioni smorzate l'intervallo di tempo che intercorre fra due massimi successivi è  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ . Si provi che gli spostamenti massimi formano una progressione geometrica di ragione  $e^{T\mu/2m}$ . La grandezza  $\Delta = \frac{T\mu}{2m} = \frac{\pi\mu}{m\omega_0}$  viene detta *decremento logaritmico*. Siccome  $m$ ,  $\omega_0$  e  $\Delta$  sono quantità che si possono misurare facilmente, questa equazione fornisce un metodo pratico per determinare la costante di smorzamento di un sistema meccanico (e, dunque, la viscosità di un fluido).

Determinare il decremento logaritmico nel caso dell'Esercizio 8.3.1.

Per un oscillatore smorzato con  $m = 1$  kg, si supponga che il decremento logaritmico sia 2 e che sia  $T = 0,4$  s; trovare la costante di smorzamento  $\mu$ .

8.3.5 Si consideri il problema

$$x'' + \mu x' + 4x = f(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

e se ne determini esplicitamente la soluzione nei casi

$$(a) \quad 0 \leq \mu < 4, \quad f(t) = \text{sen } 2t; \quad (b) \quad \mu = 0, \quad f(t) = \text{sen } \frac{9}{4}t.$$

8.3.6 Risolvere esplicitamente l'equazione (8.36) nei casi  $\omega \neq \omega_0$ ,  $\omega = \omega_0$ .

8.3.7 Determinare la corrente stazionaria in un circuito  $RCL$  con  $L = 10$  henry,  $R = 3 \cdot 10^3$  ohm,  $C = 10^{-6}$  farad, supponendo che sia applicata una forza elettromotrice alternata a 50 Hz con tensione efficace 220 volt.

8.3.8 Un circuito  $RCL$  ha un condensatore di  $0.2 \cdot 10^{-6}$  farad, una resistenza di  $4 \cdot 10^3$  ohm e un'induttanza di 1 henry. La carica iniziale sul condensatore è zero. Se una batteria da 12 volt viene connessa al circuito e il circuito viene chiuso all'istante  $t = 0$ , trovare il valore della carica e della corrente agli istanti  $t = 0.001$  e  $t = 0.01$  s.

8.3.9 Si consideri il circuito illustrato in Figura 8.28 e si supponga che all'antenna pervengano i segnali emessi da due radiotrasmittitori di frequenza rispettiva 640 e 790 KHz e di pari intensità. Supposto  $R = 2$  ohm e  $L = 250 \cdot 10^{-6}$  henry si determini  $C$  in modo che il ricevitore sia sintonizzato sulla frequenza del primo trasmettitore. Si trovi la larghezza di banda e si determini il rapporto con cui i segnali dei due trasmettitori vengono inviati all'amplificatore. Cosa si deve fare per migliorare la selettività del ricevitore e cosa per migliorarne la sensibilità?

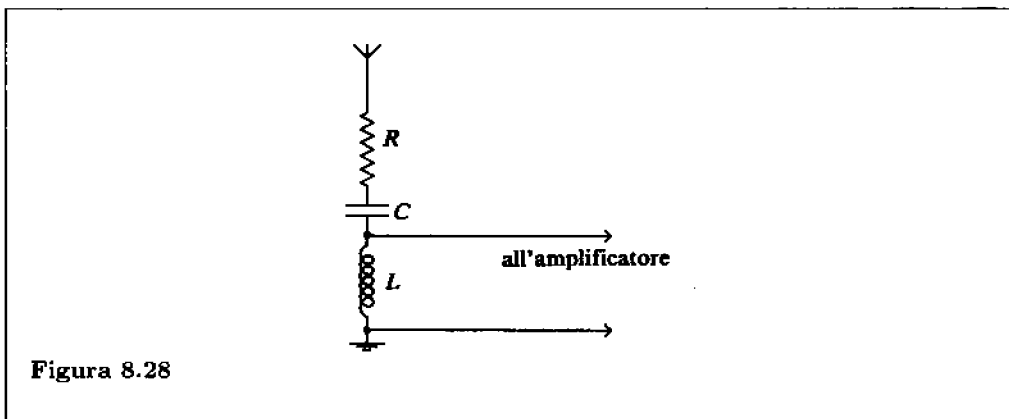


Figura 8.28

8.3.10 In un circuito  $RCL$  si ha  $L = 10$  henry,  $R = 100$  ohm e  $C = 0.02$  farad,  $E(t) = 1$  volt. Se per  $t = 0$  si ha  $I = 0$  e  $q = 0$ , si trovino  $I$  e  $q$  in funzione di  $t$ .

8.3.11 Nel precedente problema si ponga

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0. \end{cases}$$

L'equazione (8.40) perde significato, ma possiamo ancora scrivere l'equazione

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E(t). \quad (8.42)$$

Se per  $t = 0$  si ha  $q = 0$ ,  $\frac{dq}{dt} = 0$  si provi che la funzione

$$q(t) = \begin{cases} 0, & \text{per } t < 0 \\ \frac{1 - e^{-5t}(\cos 5t + \sin 5t)}{500}, & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$$

è soluzione di (8.42).

Provare che  $\frac{dq}{dt} = I$  è ben definita e continua anche per  $t = 0$ , mentre  $\frac{d^2 q}{dt^2}$  ha un salto per  $t = 0$  (la funzione  $I(t)$  si può interpretare come soluzione dell'equazione (8.40) in cui il secondo membro è la "funzione impulsiva"  $\delta(t)$  di Dirac, derivata, in un opportuno senso generalizzato, della funzione a scalino  $E(t)$ ).

## Funzioni implicite

---

Spesso in geometria analitica l'equazione di una curva è data nella forma implicita  $F(x,y) = 0$  (per esempio,  $ax + by + c = 0$  è l'equazione di una retta,  $x^2 + y^2 = r^2$  quella di una circonferenza con centro nell'origine,  $xy = 1$  quella di una iperbole equilatera). Anche la risoluzione analitica delle equazioni differenziali conduce sovente a espressioni del tipo  $F(x,y) = 0$  per le curve integrali (si veda, per esempio, il Teorema 7.8, pag. 307). Per ottenere le equazioni di tali curve nella forma  $y = f(x)$  e, quindi, utilizzare i vari criteri forniti dal calcolo differenziale per il loro studio, occorre risolvere in  $y$  (o in  $x$ ) l'equazione  $F(x,y) = 0$ .

Tale equazione rappresenta i punti della superficie  $z = F(x,y)$  che giacciono sul piano  $z = 0$ ; dunque, ricavare  $y$  oppure  $x$  dalla relazione  $F(x,y) = 0$  corrisponde a descrivere tali punti come una curva della forma  $y = f(x)$  oppure  $x = g(y)$ . Comunque non sempre tale descrizione è possibile, ossia non tutte le equazioni del tipo  $F(x,y) = 0$  forniscono la rappresentazione implicita di una funzione  $y = f(x)$  o  $x = g(y)$ : per esempio,  $x^2 + y^2 = 0$  è soddisfatta solo da  $x = y = 0$ , mentre  $x^2 + y^2 + 1 = 0$  non ha soluzioni.

Supponiamo che vi sia almeno un punto  $(x_0, y_0)$  in cui  $F(x_0, y_0) = 0$ : tale punto costituisce un naturale "punto iniziale" per descrivere l'insieme  $F(x,y) = 0$ . Supponendo  $F$  differenziabile, vi sono due possibilità: o il piano tangente in  $(x_0, y_0)$  alla superficie  $z = F(x,y)$  è orizzontale, oppure no. Nel primo caso non è possibile, in generale, rappresentare l'insieme  $F(x,y) = 0$  nella forma  $y = f(x)$  o  $x = g(y)$ : per esempio,  $z = xy$  interseca il piano  $z = 0$  lungo gli assi coordinati, tuttavia in nessun intorno dell'origine possiamo rappresentare le soluzioni di  $xy = 0$  nella forma  $y = f(x)$  o  $x = g(y)$ .

Analiticamente la condizione che il piano tangente non sia orizzontale si esprime imponendo che il gradiente di  $F$  in  $(x_0, y_0)$  sia diverso da zero, ovvero che uno almeno dei due numeri  $F_x(x_0, y_0)$ ,  $F_y(x_0, y_0)$  sia non nullo. Si ha allora il teorema seguente.

**TEOREMA 9.1** (di Dini o delle funzioni implicite) Supponiamo che  $F$  sia di classe  $C^1$  in un intorno di  $(x_0, y_0)$ ; se risulta

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

allora esistono  $\alpha, \beta > 0$  tali che per  $x \in (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  l'equazione  $F(x,y) = 0$  ha esattamente una soluzione  $y = f(x)$  che appartiene a  $(y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ . Dunque, nell'intorno  $|x - x_0| < \alpha$ ,  $|y - y_0| < \beta$  l'insieme  $F(x,y) = 0$  è grafico di una funzione

$y = f(x)$ , in particolare  $f(x_0) = y_0$ ; inoltre  $f \in C^1(I)$  ove  $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  e risulta

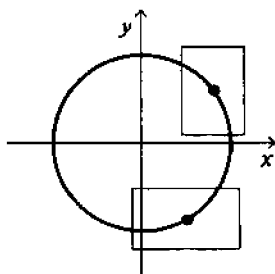
$$f'(x) = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))} \quad \text{per ogni } x \in I. \quad (9.1)$$

Prima di passare alla dimostrazione del teorema svolgiamo alcune considerazioni.

**OSSERVAZIONI 9.2 (a)** Anzitutto osserviamo che il teorema di Dini ha *carattere locale*: descrive le soluzioni di  $F(x, y) = 0$  nell'intorno di una soluzione iniziale  $(x_0, y_0)$ ; che non possa essere altrimenti si comprende bene pensando all'equazione della circonferenza  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ : per ogni  $x_0 \in (-1, 1)$  tale equazione ha due soluzioni distinte  $y_0 = \pm\sqrt{1 - x_0^2}$  e, dunque, si può ottenere una funzione  $y = f(x)$  solo scegliendo uno dei due segni e prendendo un intorno sufficientemente piccolo di  $(x_0, y_0)$ .

(b) Si noti anche che se già si sapesse che la funzione  $y = f(x)$  è derivabile allora la Formula (9.1) si otterrebbe naturalmente usando la regola di derivazione di funzioni composte:

$$F_x + F_y \cdot f' = 0.$$



(c) Dalla (9.1) segue facilmente che se  $F$  è di classe  $C^m$ , allora anche la funzione implicita  $f$  è di classe  $C^m$ .

(d) Se invece della condizione  $F_y(x_0, y_0) \neq 0$  si ha  $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ , vale un enunciato simmetrico: si potrà localmente esplicitare la  $x$  in funzione della  $y$ ,  $x = g(y)$ , e si avrà

$$g'(y) = -\frac{F_y(g(y), y)}{F_x(g(y), y)} \quad \text{per ogni } y \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta). \quad (9.2)$$

(e) Osserviamo, infine, che il teorema di Dini può essere utilmente usato per lo studio di curve piane assegnate in forma implicita. Consideriamo, per esempio, l'equazione della *lemniscata*<sup>(1)</sup>

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0; \quad (9.3)$$

tale equazione può essere agevolmente risolta rispetto a  $y$ , ma l'espressione che si ottiene è poco trasparente. Per  $x = 0, y = 0$  si ha  $F = F_x = F_y = 0$  e, dunque, non

<sup>(1)</sup>La lemniscata è il luogo dei punti tali che il prodotto delle distanze dai due punti  $(a, 0), (-a, 0)$  sia uguale ad  $a^2$ .

si potrà applicare il teorema di Dini; esso risulta per contro applicabile nei punti della curva ove  $y \neq 0$  e la derivata della funzione  $y = f(x)$  è data da

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{4x(x^2 + y^2) - 4a^2x}{4y(x^2 + y^2) + 4a^2y}.$$

Da tale espressione possiamo ottenere importanti informazioni sulla curva anche senza ricorrere alla rappresentazione esplicita della funzione  $y = f(x)$ . Per esempio, nei punti di massimo e di minimo si deve avere  $y' = 0$  e quindi o  $x = 0$  oppure  $x^2 + y^2 = a^2$ . Dall'equazione (9.3) si ricava che se  $x = 0$  allora  $y = 0$  e in tal punto il teorema di Dini non è applicabile<sup>(2)</sup>; se invece  $x^2 + y^2 = a^2$  allora  $x^2 - y^2 = a^2/2$  e quindi si ottengono i quattro punti di massimo e di minimo  $(\sqrt{3}a/2, a/2)$ ,  $(-\sqrt{3}a/2, a/2)$ ,  $(\sqrt{3}a/2, -a/2)$ ,  $(-\sqrt{3}a/2, -a/2)$ .

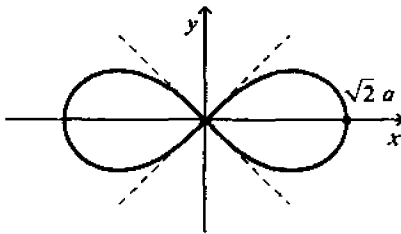


Figura 9.1 Lemniscata di Bernoulli.

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DI DINI**

Possiamo supporre che sia  $F_y(x_0, y_0) > 0$ . Poiché  $F_y$  è continua vi sarà un intorno rettangolare di  $(x_0, y_0)$  in cui  $F_y > 0$ : sia  $\{(x, y) : |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \beta\}$  tale intorno; per ogni fissato  $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  la funzione

$$y \rightarrow F(x, y)$$

risulta crescente in  $(y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ . In particolare la funzione  $y \rightarrow F(x_0, y)$  è strettamente crescente e, siccome  $F(x_0, y_0) = 0$ , si avrà

$$F(x_0, y_0 + \beta) > 0, \quad F(x_0, y_0 - \beta) < 0.$$

Da ciò, dalla continuità delle funzioni  $x \rightarrow F(x, y_0 + \beta)$ ,  $x \rightarrow F(x, y_0 - \beta)$  e dal teorema della permanenza del segno si deduce che vi è un intorno  $I = (x_0 - \alpha, x_0 + \alpha)$  di  $x_0$  tale che per ogni  $x \in I$  si ha

$$F(x, y_0 + \beta) > 0, \quad F(x, y_0 - \beta) < 0.$$

<sup>(2)</sup>In effetti, nell'intorno dell'origine la lemniscata non è grafico né di una funzione  $y = f(x)$ , né di una funzione  $x = g(y)$ .



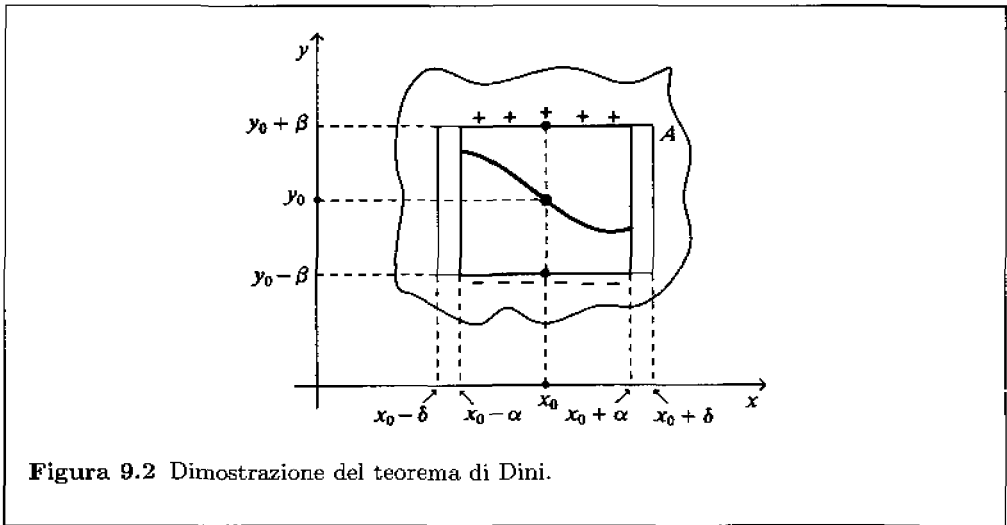


Figura 9.2 Dimostrazione del teorema di Dini.

Da quanto visto risulta che: per ogni  $x \in I$  la funzione  $y \rightarrow F(x, y)$  è continua e strettamente crescente in  $(y_0 - \beta, y_0 + \beta)$  e inoltre  $F(x, y_0 + \beta) > 0$ ,  $F(x, y_0 - \beta) < 0$ . Possiamo, quindi, concludere che esiste uno e un solo punto  $y = f(x) \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$  tale che

$$F(x, y) = 0.$$

Abbiamo così dimostrato la prima parte del teorema: resta da dimostrare che  $f \in C^1(I)$ . Se  $x$  e  $x + h$  sono due punti di  $I$ , poiché  $F \in C^1$  esiste un punto  $(\xi, \eta)$  contenuto nel segmento di estremi  $(x, f(x))$  e  $(x + h, f(x + h))$  (e quindi in  $\{|x - x_0| < \alpha$ ,  $|y - y_0| < \beta\}$ ) tale che

$$F(x + h, f(x + h)) - F(x, f(x)) = F_x(\xi, \eta) \cdot h + F_y(\xi, \eta)(f(x + h) - f(x)); \quad (9.4)$$

la (9.4) altro non è il che teorema del valor medio per funzioni di due variabili (si veda l'Esercizio 5.0.13). D'altro canto, per la stessa definizione della funzione  $f$ , abbiamo  $F(x + h, f(x + h)) = F(x, f(x)) = 0$  e, dunque, dalla (9.4) si deduce

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} = -\frac{F_x(\xi, \eta)}{F_y(\xi, \eta)}. \quad (9.5)$$

Dalla (9.5) segue immediatamente la continuità della funzione  $f$ ; al tendere di  $h$  a zero  $f(x + h)$  tende quindi a  $f(x)$  e, pertanto, il punto  $(\xi, \eta)$  (che appartiene al segmento di estremi  $(x, f(x))$ ,  $(x + h, f(x + h))$ ) tenderà anch'esso a  $(x, f(x))$ .

Passando al limite per  $h \rightarrow 0$  in (9.5) e tenendo conto della continuità delle derivate parziali di  $F$  si ottiene così la (9.1).  $\square$

**OSSERVAZIONE 9.3** Il teorema delle funzioni implicite si può estendere a funzioni di più variabili; per esempio, se  $F(x, y, z) \in C^1(D)$  ove  $D$  è un intorno di  $(x_0, y_0, z_0)$  e

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

allora in un intorno di  $(x_0, y_0, z_0)$  l'equazione  $F(x, y, z) = 0$  è esplicitabile in  $z$  nella forma  $z = f(x, y)$  e si ha

$$F(x, y, f(x, y)) = 0, \quad f_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad f_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

**OSSERVAZIONE 9.4** L'equazione della retta tangente in un punto  $(x_0, y_0)$  al grafico di una curva data in forma esplicita è

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0), \tag{9.6}$$

e l'equazione della normale è

$$(y - y_0)f'(x_0) + (x - x_0) = 0. \tag{9.7}$$

Possiamo ora scrivere le formule corrispondenti per curve assegnate in forma implicita  $F(x, y) = 0$ , ove supporremo  $F_x^2 + F_y^2 \neq 0$  in modo da poter sempre applicare il teorema di Dini; se, per esempio,  $F_y \neq 0$ , sostituendo in (9.6) e in (9.7) la (9.1) otteniamo l'equazione della retta tangente

$$(x - x_0)F_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0) = 0 \tag{9.8}$$

e l'equazione della retta normale

$$(x - x_0)F_y(x_0, y_0) - (y - y_0)F_x(x_0, y_0) = 0. \tag{9.9}$$

Si noti che se  $F_y = 0$  ma  $F_x \neq 0$  usufruendo di (9.2) in luogo di (9.1) si riottengono le stesse formule.

Osserviamo, inoltre, che i *coseni direttori*<sup>(3)</sup> della normale  $n$  alla curva nel punto  $(x_0, y_0)$  sono dati da

$$\cos(nx) = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}, \quad \cos(ny) = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}$$

e, dunque, la normale alla curva ha la stessa direzione del gradiente di  $F$ .

Analogamente l'equazione  $F(x, y, z) = 0$  definisce una superficie la quale, se  $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0$ , può localmente essere posta in forma cartesiana esplicitando una variabile in funzione delle rimanenti. Si ottiene così l'equazione del piano tangente in un punto  $(x_0, y_0, z_0)$  della superficie

$$(x - x_0)F_x(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)F_y(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)F_z(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

e i coseni direttori della normale sono<sup>(4)</sup>

$$\cos(nx) = \frac{F_x}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \quad \cos(ny) = \frac{F_y}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}, \quad \cos(nz) = \frac{F_z}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}}.$$

<sup>(3)</sup>Cioè i coseni degli angoli formati dalla retta con gli assi coordinati.

<sup>(4)</sup>Una retta perpendicolare a un piano di equazione  $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$  ha equazioni  $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ ; i suoi coseni direttori sono, quindi, proporzionali ai numeri  $a, b, c$ .

Per esempio, data la sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$  il suo piano tangente in  $(x_0, y_0, z_0)$  ha equazione

$$(x - x_0)2x_0 + (y - y_0)2y_0 + (z - z_0)2z_0 = 0,$$

ossia

$$xx_0 + yy_0 + zz_0 = r^2;$$

i coseni direttori della normale sono proporzionali a  $x_0, y_0, z_0$  e, dunque, la normale in un punto  $P$  coincide con il raggio condotto dall'origine per  $P$ .

Consideriamo adesso due funzioni  $F, G$  di quattro variabili  $\xi, \eta, x, y$  che si annullano in un punto  $(\xi_0, \eta_0, x_0, y_0)$  e tali che l'espressione

$$J = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = F_x G_y - F_y G_x = \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}$$

(che si chiama *determinante jacobiano* delle funzioni  $F, G$  rispetto alle variabili  $x, y$ ) sia diversa da zero in tal punto; allora è possibile trovare un intorno  $U$  di  $(\xi_0, \eta_0)$  e un intorno  $V$  di  $(x_0, y_0)$  in modo che per ogni punto  $(\xi, \eta)$  di  $U$  esista in  $V$  uno e un sol punto  $(x, y)$  per cui

$$\begin{cases} F(\xi, \eta, x, y) = 0 \\ G(\xi, \eta, x, y) = 0 \end{cases}$$

o se si vuole, esista una coppia di funzioni  $\varphi, \psi$  definite nell'intorno  $U$  tali che

$$\begin{cases} F(\xi, \eta, \varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)) = 0 \\ G(\xi, \eta, \varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)) = 0. \end{cases}$$

L'analogia col teorema di Dini è abbastanza evidente; la dimostrazione però è meno elementare e la omettiamo.

Un caso particolarmente interessante si presenta quando

$$F(\xi, \eta, x, y) = \xi - f(x, y), \quad G(\xi, \eta, x, y) = \eta - g(x, y);$$

di esso ci occuperemo in dettaglio nella prossima sezione.

## INVERTIBILITÀ LOCALE DI APPLICAZIONI

Ci poniamo ora il problema di studiare la risolubilità di sistemi del tipo

$$\begin{cases} \xi = f(x, y) \\ \eta = g(x, y). \end{cases} \quad (9.10)$$

Osserviamo, intanto, che se le funzioni  $f$  e  $g$  sono lineari:

$$\begin{cases} \xi = ax + by \\ \eta = cx + dy, \end{cases} \quad (9.11)$$

il sistema (9.11) è risolubile in  $x, y$  se e solo se

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0;$$

si osservi che la (9.11) può essere interpretata come un cambiamento di coordinate oppure come trasformazione del piano in sé (al punto  $(x,y)$  corrisponde il punto di coordinate  $(\xi,\eta)$ ): si verifica facilmente che la trasformazione corrispondente a (9.11) è ottenibile componendo rotazioni, simmetrie e omotetie. La possibilità di risolvere il sistema (9.11) in  $x$  e  $y$  significa pertanto che la trasformazione anzidetta è *invertibile*. Anche nel caso generale le (9.10) si possono interpretare come una trasformazione  $T$ : se le funzioni  $f$  e  $g$  sono definite su un insieme  $A$  e al variare di  $(x,y)$  in  $A$  il punto  $(\xi,\eta)$  varia in un insieme  $B$ . Si dirà che  $A$  è il *dominio* e  $B$  è l'*immagine* della trasformazione  $T$ ;  $T$  associa, dunque, ai punti  $P$  di  $A$  i punti  $P' = T(P)$  di  $B$ . Vogliamo studiare l'invertibilità di tale trasformazione: cioè verificare se esistono due funzioni  $\varphi(\xi,\eta)$ ,  $\psi(\xi,\eta)$  tali che se  $P = (x,y)$  e  $T(P) = P' = (\xi,\eta)$ , allora

$$\begin{cases} x = \varphi(\xi,\eta) \\ y = \psi(\xi,\eta) \end{cases} \tag{9.12}$$

La (9.12) definisce (se esiste) la trasformazione inversa di  $T$ :

$$T^{-1}(P') = P.$$

Una efficace descrizione geometrica della trasformazione  $T$  si ottiene, come mostrato in Figura 9.3, considerando le curve di equazioni parametriche

$$\xi = f(c,y), \quad \eta = g(c,y), \quad c = \text{costante}$$

che sono immagini delle rette  $x = c$ , e similmente delle curve

$$\xi = f(x,k), \quad \eta = g(x,k), \quad k = \text{costante}$$

immagini delle rette  $y = k$ .

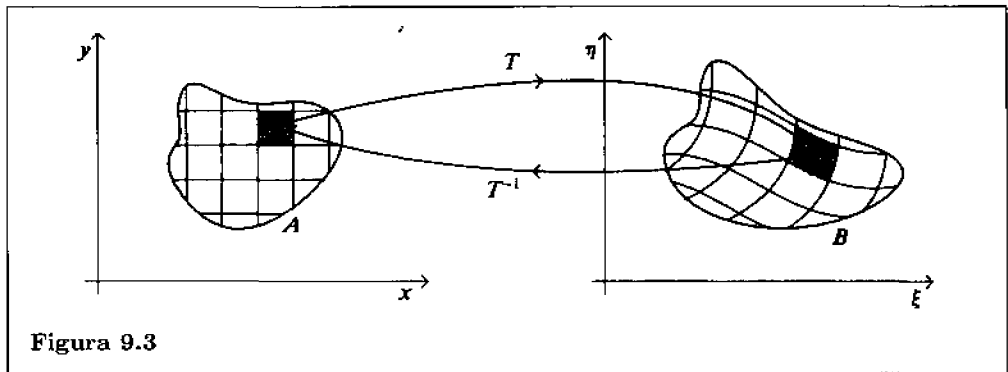


Figura 9.3

**ESEMPIO 9.5** Consideriamo la *trasformazione per raggi vettori reciproci* definita da

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0). \tag{9.13}$$

Al punto  $P = (x,y)$  la (9.13) associa il punto  $P' = (\xi,\eta)$  che sta sulla semiretta uscente da 0 e passante per  $P$ , ed è tale che  $\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = 1$  (infatti  $\xi^2 + \eta^2 = \frac{1}{x^2 + y^2}$ ); dunque

i punti interni al cerchio  $x^2 + y^2 = 1$  vengono trasformati in punti esterni e viceversa. Da (9.13) otteniamo la trasformazione inversa

$$x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}, \quad y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2},$$

la quale è essa stessa una trasformazione per raggi vettori reciproci. Dominio e immagine sono, in entrambi i casi, l'intero piano privato dell'origine; alle rette  $x = c$ ,  $y = k$  corrispondono, nel piano  $\xi, \eta$ , i cerchi

$$\xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{c}\xi = 0, \quad \xi^2 + \eta^2 - \frac{1}{k}\eta = 0,$$

e reciprocamente.

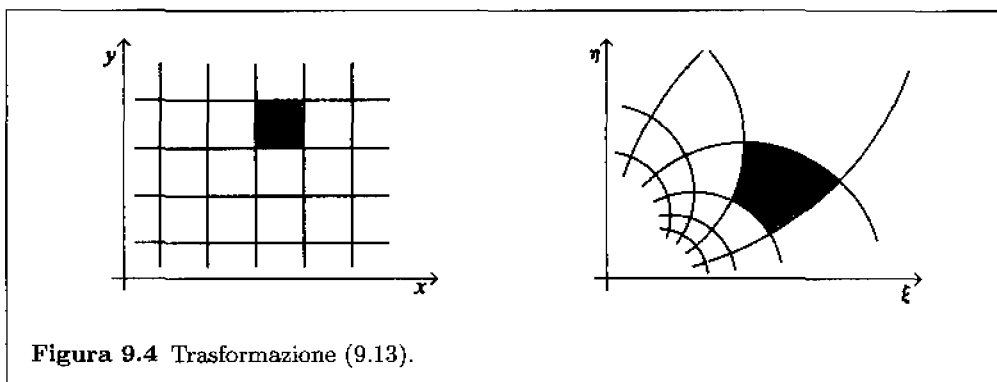


Figura 9.4 Trasformazione (9.13).

Tornando al problema della invertibilità delle trasformazioni osserviamo intanto che la trasformazione *lineare* (9.11) è invertibile (*globalmente*) se il determinante

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}$$

è diverso da 0; ebbene, lo stesso risultato è vero, sia pure *localmente*, per una qualunque trasformazione del tipo (9.10).

**TEOREMA 9.6 (di invertibilità locale)** Se le funzioni  $f$  e  $g$  sono di classe  $C^1$  e se in un punto  $(x_0, y_0)$  il determinante<sup>(5)</sup>

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (9.14)$$

<sup>(5)</sup>Per il determinante (9.14) si usa il simbolo  $\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)}$  o anche, ricordando la (9.10),  $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)}$ .

è diverso da 0, allora vi sono un intorno  $A$  del punto  $(x_0, y_0)$  e un intorno  $B$  del punto  $(f(x_0, y_0), g(x_0, y_0))$  tali che la trasformazione definita dalle (9.10) risulta ivi invertibile; esistono cioè due funzioni  $\varphi, (\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)$  definite su  $B$  tali che per ogni punto  $P = (x, y) \in A$  si ha  $x = \varphi(\xi, \eta), y = \psi(\xi, \eta)$ , ove  $(\xi, \eta) \in B$  e  $\xi = f(x, y), \eta = g(x, y)$ . Le funzioni  $\varphi$  e  $\psi$  sono di classe  $C^1$  su  $B$  e si ha

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{1}{J} \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = -\frac{1}{J} \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = -\frac{1}{J} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = \frac{1}{J} \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (9.15)$$

Non riportiamo qui la dimostrazione di questo risultato, che si può ottenere dal teorema di Dini risolvendo la prima equazione rispetto a una variabile (essendo  $J \neq 0$  una almeno delle due derivate di  $f$  è diversa da 0), sostituendo nella seconda equazione e applicando nuovamente lo stesso teorema per risolverle rispetto all'altra variabile.

Derivando le relazioni, conseguenza della (9.10),

$$\begin{aligned} \xi &= f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)) \\ \eta &= g(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta)) \end{aligned}$$

e risolvendo il sistema lineare in  $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}$  che si ottiene è facile poi ricavare le (9.15).



**ESEMPI 9.7 (a)** Siano

$$\begin{cases} \xi = f(x, y) = e^x \cos y \\ \eta = g(x, y) = e^x \sin y; \end{cases} \quad (9.16)$$

abbiamo

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0 \quad \text{per ogni } x \text{ reale,}$$

pertanto la trasformazione (9.16) è localmente invertibile nell'intorno di ogni punto. Si noti che essa non è invece *globalmente invertibile* in quanto, per esempio, si ha

$$f(x, y + 2\pi) = f(x, y), \quad g(x, y + 2\pi) = g(x, y).$$

**(b)** Consideriamo ora la trasformazione che connette le coordinate polari con le coordinate rettangolari

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (9.17)$$

Il determinante jacobiano della trasformazione è

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r.$$

Se si cerca di risolvere le (9.17) per porre  $r$  e  $\theta$  in funzione di  $x, y$  si trova

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (9.18)$$

ovviamente occorrerà supporre che il determinante jacobiano sia diverso da zero, dunque  $r \neq 0$  (anzi  $r > 0$ ). Si noti che l'espressione di  $\theta$  in funzione di  $x$  e  $y$  è piuttosto laboriosa da scrivere; si noti anche che le (9.18) rimangono invariate se si modifica  $\theta$

di un multiplo di  $2\pi$  (ma questo non è affatto in contraddizione con il Teorema 9.6). Occorre prestare attenzione e non usare senza discernimento una formula quale

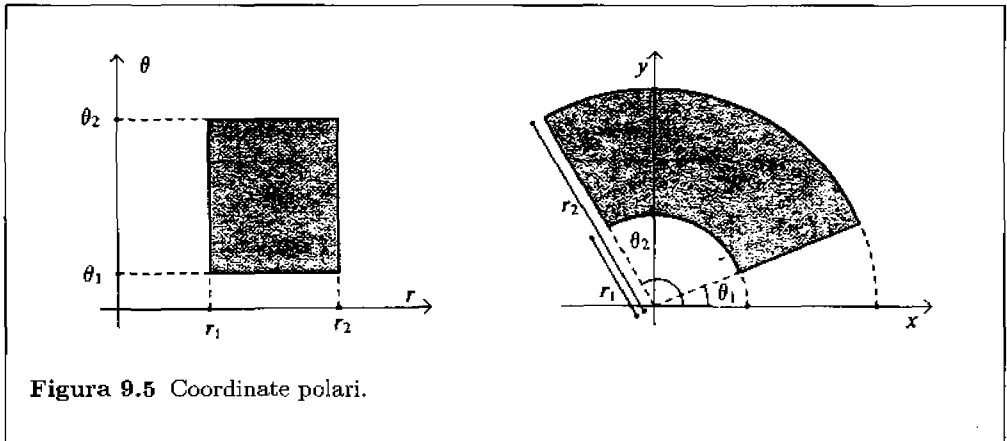
$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (9.19)$$

perché in essa vi sono parecchie cose sbagliate.

Per esempio, se  $x = -1$ ,  $y = 1$  vi sono due valori di  $\theta$  che verificano la (9.19):  $\theta = 3\pi/4$  e  $\theta = -\pi/4$ , ma solo il primo di essi soddisfa le (9.17). Oltre a ciò la funzione  $\operatorname{arctg} \frac{y}{x}$  è ovviamente discontinua sull'asse  $y$ , mentre la trasformazione (9.17) ha una inversa continua anche in tali punti (eccettuata l'origine).

I rettangoli con lati paralleli agli assi nel piano  $r, \theta$  vengono trasformati in settori circolari nel piano  $x, y$ . Tutti i punti dell'asse  $\theta$  corrispondono all'origine nel piano  $x, y$ . Le Formule (9.15) si leggono

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} &= -\operatorname{sen} \theta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{1}{r} \operatorname{sen} \theta = \frac{-y}{x^2 + y^2}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{r} \cos \theta = \frac{x}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$



## MASSIMI E MINIMI VINCOLATI

Il problema di determinare i massimi e minimi di funzioni di più variabili si presenta, talvolta, in forme diverse da quella esaminata nel Capitolo 5. Supponiamo, per esempio, di voler trovare il punto di una superficie assegnata  $\varphi(x, y, z) = 0$  più vicino all'origine. Dobbiamo, cioè, rendere minima la funzione  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , in cui, però,  $x, y, z$  non sono più indipendenti fra loro ma verificano la condizione aggiuntiva  $\varphi(x, y, z) = 0$ .

Il problema non è fondamentalmente nuovo: se, per esempio, potessimo esplicitare la variabile  $z$  dall'equazione  $\varphi(x, y, z) = 0$  ottenendo  $z = \varphi_1(x, y)$ , allora dovremmo

soltanto trovare i punti stazionari di  $f_1(x,y) = f(x,y,\varphi_1(x,y)) = \sqrt{x^2 + y^2 + [\varphi_1(x,y)]^2}$  con  $x$  e  $y$  variabili indipendenti, e dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0. \end{cases}$$

È, però, più conveniente esprimere le condizioni di stazionarietà in una forma simmetrica, che non privilegi alcuna variabile. Studiamo in modo euristico un caso semplice e tipico: determinare i punti stazionari di una funzione  $f(x,y)$ , quando il punto  $(x,y)$  verifica l'equazione  $\varphi(x,y) = 0$ .

Supponiamo che in ogni punto  $(x_0,y_0)$  per cui  $\varphi(x_0,y_0) = 0$  valgono le condizioni del teorema di Dini e che cioè  $\varphi_x^2(x_0,y_0) + \varphi_y^2(x_0,y_0) > 0$ ; allora  $\varphi(x,y) = 0$  descrive nel piano  $x, y$  una curva, dotata in ogni punto di retta tangente. Supponiamo, inoltre, che la famiglia di curve di equazione  $f(x,y) = c$  (= costante) copra una parte di piano, come in figura.

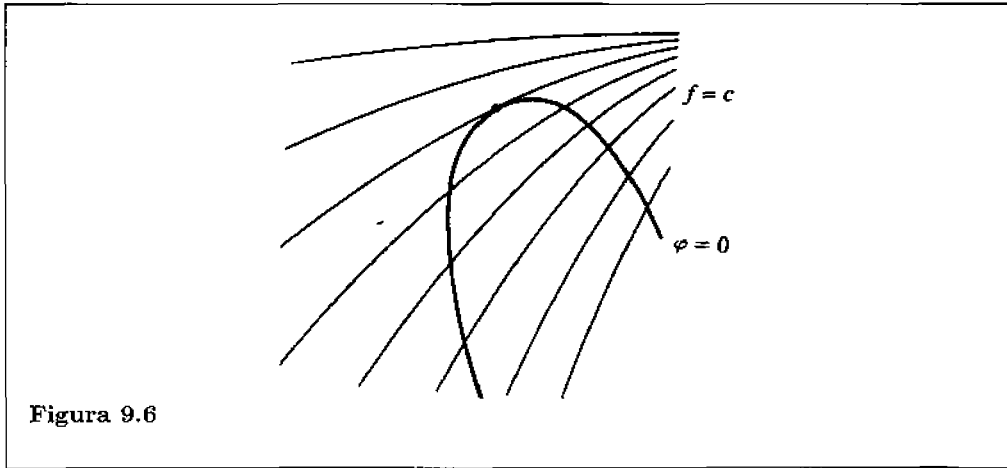


Figura 9.6

Fra le curve della famiglia che intersecano la curva  $\varphi = 0$ , dobbiamo trovare quella per cui  $c$  è massimo o minimo. Muovendoci lungo la curva  $\varphi = 0$ , attraversiamo le curve  $f(x,y) = c$ , generalmente in modo crescente o decrescente; in un punto in cui il verso si inverte, possiamo attenderci un valore *estremale* (minimo o massimo). Dalla Figura 9.6 vediamo che questo capita per il valore di  $c$  per cui  $f(x,y) = c$  è tangente a  $\varphi = 0$ . Le coordinate del punto di contatto saranno i valori  $x = \xi, y = \eta$  corrispondenti al valore estremo di  $f(x,y)$  sulla curva  $\varphi(x,y) = 0$ .

Inoltre, nel punto  $(\xi,\eta)$  le curve  $f = c$  e  $\varphi = 0$  hanno la stessa tangente e quindi (vedi la (9.8)) vale la proporzione

$$f_x : f_y = \varphi_x : \varphi_y = -\lambda$$



oppure anche

$$\begin{cases} f_x + \lambda \varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda \varphi_y = 0, \end{cases}$$

ove  $\lambda$  è una costante opportuna.

Queste considerazioni di carattere intuitivo ci portano a ipotizzare la seguente proposizione.

**PROPOSIZIONE 9.8** Affinché un punto  $(\xi, \eta)$  della curva  $\varphi(x, y) = 0$  per cui è  $\varphi_x^2(\xi, \eta) + \varphi_y^2(\xi, \eta) > 0$  sia un punto estremaie (massimo o minimo) per la funzione  $f(x, y)$ , col vincolo  $\varphi(x, y) = 0$ , deve esistere una costante  $\lambda$  in modo che le seguenti equazioni siano verificate:

$$\begin{cases} f_x(\xi, \eta) + \lambda \varphi_x(\xi, \eta) = 0 \\ f_y(\xi, \eta) + \lambda \varphi_y(\xi, \eta) = 0 \\ \varphi(\xi, \eta) = 0. \end{cases} \quad (9.20)$$

Si osservi che il sistema (9.20) è quello che si ottiene eguagliando a zero il gradiente della funzione di tre variabili  $H(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y)$ ; pertanto i punti estremali vincolati di  $f(x, y)$  (con vincolo  $\varphi(x, y) = 0$ ) sono punti estremali liberi per la funzione  $H(x, y, \lambda)$ .

Prima di dare una dimostrazione di questo fatto (noto come *metodo dei moltiplicatori di Lagrange*), vediamo un esempio.

Cerchiamo i valori estremali della funzione  $f(x, y) = xy$  sul bordo del cerchio unitario, ossia fra quelli assunti sui punti per cui  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . Possiamo risolvere il sistema (9.20), che nel nostro caso diviene

$$\begin{cases} y + \lambda \cdot 2x = 0 \\ x + \lambda \cdot 2y = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

I (possibili) punti di massimo o minimo vincolato sono da cercarsi fra i punti

$$\begin{aligned} \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \\ \xi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta = -\frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \xi = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

I primi due punti forniscono per  $f$  il valore  $1/2$ , i secondi due  $-1/2$ .

Dimostriamo ora la "ricetta" fornita dalla Proposizione 9.8 per la ricerca dei punti estremali vincolati. Supporremo che  $f$  e  $\varphi$  siano funzioni di classe  $C^1$ ; sia allora  $(\xi, \eta)$  un punto di minimo o di massimo per la funzione  $f(x, y)$  ristretta ai punti per cui  $\varphi(x, y) = 0$  e supponiamo che  $\varphi_x(\xi, \eta)$  e  $\varphi_y(\xi, \eta)$  non siano entrambi nulli: per esempio, sia  $\varphi_y(\xi, \eta) \neq 0$ .

Allora per il teorema di Dini esistono un  $\delta > 0$  e una funzione  $x \rightarrow g(x)$  di classe  $C^1$ , per cui  $\varphi(x, y) = 0$  se e soltanto se  $y = g(x)$  per tutti i valori di  $x$  fra  $\xi - \delta$  e  $\xi + \delta$ . Se  $f(x, y)$  assume in  $(\xi, \eta)$  valore massimo (minimo) fra quelli per cui  $\varphi(x, y) = 0$ , allora  $f(x, g(x))$  ha in  $\xi$  valore massimo (minimo) fra quelli assunti per  $x$

in  $[\xi - \delta, \xi + \delta]$ ; ma la funzione  $F(x) = f(x, g(x))$  è derivabile (in quanto composizione di funzioni differenziabili), quindi la sua derivata nel punto  $\xi$ , deve essere 0.

Dunque:

$$F'(\xi) = f_x(\xi, g(\xi)) + f_y(\xi, g(\xi)) \cdot g'(\xi) = 0.$$

D'altra parte,  $g'(\xi) = -\frac{\varphi_x(\xi, g(\xi))}{\varphi_y(\xi, g(\xi))}$  (per il teorema di Dini), da cui:

$$f_x(\xi, g(\xi)) - f_y(\xi, g(\xi)) \cdot \frac{\varphi_x(\xi, g(\xi))}{\varphi_y(\xi, g(\xi))} = 0.$$

Se poniamo  $\lambda = -\frac{f_y(\xi, g(\xi))}{\varphi_y(\xi, g(\xi))}$  avremo

$$\begin{cases} f_x(\xi, g(\xi)) + \lambda \varphi_x(\xi, g(\xi)) = 0 \\ f_y(\xi, g(\xi)) + \lambda \varphi_y(\xi, g(\xi)) = 0. \end{cases}$$

Dunque esiste  $\lambda$  tale che  $(\xi, \eta)$  risolve il sistema (9.20).

Se in luogo della condizione  $\varphi_y(\xi, \eta) \neq 0$  si ha  $\varphi_x(\xi, \eta) \neq 0$ , con un calcolo analogo si ottengono le stesse condizioni.  $\square$

Nell'Esercizio 9.0.26 si mostra un esempio in cui il metodo non è applicabile in quanto entrambe le derivate di  $\varphi$  sono nulle nel punto  $(\xi, \eta)$ . Va, tuttavia, osservato che anche nelle ipotesi fatte il criterio 9.8 fornisce solo una *condizione necessaria* per l'esistenza del minimo o del massimo vincolato.

Il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si può estendere al caso in cui si ha un numero maggiore di variabili e anche al caso in cui si ha un numero maggiore di vincoli. Per esempio, volendo determinare i punti estremali di

$$u = f(x, y, z)$$

sotto le condizioni

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0, \tag{9.21}$$

si cercheranno i punti stazionari liberi della funzione di cinque variabili

$$H(x, y, z, \lambda, \mu) = f(x, y, z) + \lambda \varphi(x, y, z) + \mu \psi(x, y, z),$$

cioè si scriveranno le equazioni

$$\begin{cases} f_x + \lambda \varphi_x + \mu \psi_x = 0 \\ f_y + \lambda \varphi_y + \mu \psi_y = 0 \\ f_z + \lambda \varphi_z + \mu \psi_z = 0, \end{cases} \tag{9.22}$$

e si cercheranno i punti  $(\xi, \eta, \zeta)$  e i valori dei moltiplicatori  $\lambda, \mu$  che risolvono simultaneamente le (9.22) e le (9.21).



**ESEMPI 9.9** (a) Fra tutti i parallelepipedi rettangoli di data superficie totale determiniamo quelli di volume massimo.

Se  $S$  è la superficie totale assegnata occorre massimizzare

$$f(x, y, z) = xyz, \quad x, y, z > 0$$

sotto la condizione

$$2(xy + xz + yz) = S.$$

Usufruento del metodo dei moltiplicatori di Lagrange otteniamo le equazioni

$$\begin{cases} yz + 2\lambda(y + z) = 0 \\ xz + 2\lambda(x + z) = 0 \\ xy + 2\lambda(x + y) = 0 \\ 2(xy + xz + yz) = S; \end{cases}$$

eliminando  $\lambda$  fra le prime due equazioni si ha  $\frac{yz}{y+z} = \frac{xz}{x+z}$ , da cui  $x = y$ . Analogamente si vede che  $y = z$ . Pertanto il parallelepipedo cercato è il cubo (di spigolo  $\sqrt{S/6}$ ).

(b) Troviamo i semiassi dell'ellisse che si ottiene tagliando l'ellissoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (9.23)$$

con il piano di equazione

$$lx + my + nz = 0. \quad (9.24)$$

Poiché il piano passa per l'origine la lunghezza dei due semiassi sarà data dal massimo e dal minimo della funzione  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  sotto le condizioni (9.23) e (9.24). Costruiamo la funzione ausiliaria

$$H(x, y, z, \lambda, \mu) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) + 2\mu(lx + my + nz);$$

eguagliando a zero le sue derivate si ottiene

$$x + \lambda \frac{x}{a^2} + \mu l = 0, \quad y + \lambda \frac{y}{b^2} + \mu m = 0, \quad z + \lambda \frac{z}{c^2} + \mu n = 0. \quad (9.25)$$

Moltiplicando queste equazioni rispettivamente per  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , sommando e usufruendo di (9.23) e (9.24) si ricava

$$\lambda = -r^2.$$

Supponendo che nessuno dei tre numeri  $l$ ,  $m$ ,  $n$  sia nullo, dalle (9.25) si ricava che  $r$  è diverso da  $a$ , da  $b$  e da  $c$ . Tali equazioni si possono riscrivere così

$$x = \frac{\mu l a^2}{r^2 - a^2}, \quad y = \frac{\mu m b^2}{r^2 - b^2}, \quad z = \frac{\mu n c^2}{r^2 - c^2};$$

sostituendo nella (9.24) si ottiene l'equazione

$$\frac{l^2 a^2}{r^2 - a^2} + \frac{m^2 b^2}{r^2 - b^2} + \frac{n^2 c^2}{r^2 - c^2} = 0$$

che essendo quadratica in  $r^2$  può essere risolta fornendo due valori  $r_1$ ,  $r_2$ . Siccome l'esistenza del massimo e del minimo per  $r$  è assicurata a priori, tali valori coincidono certamente con  $r_1$  e  $r_2$ .

(c) Supponiamo di avere un sistema di  $N$  particelle aventi energia totale  $E$ ; siano  $E_1, E_2, \dots, E_k$  i possibili livelli energetici di ogni particella e  $n_1, n_2, \dots, n_k$  i rispettivi

numeri di occupazione (cioè  $n_i$  è il numero di particelle che ha energia  $E_i$ ). Ci chiediamo qual è la distribuzione di energia più probabile; la probabilità che vi siano  $n_1$  particelle con energia  $E_1, \dots, n_k$  particelle con energia  $E_k$  è proporzionale a

$$\binom{N}{n_1} \binom{N-n_1}{n_2} \binom{N-n_1-n_2}{n_3} \dots \binom{N-n_1-\dots-n_{k-2}}{n_{k-1}} = \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_k!}, \quad (9.26)$$

occorre quindi rendere massima l'espressione (9.26) sotto le condizioni

$$N = \sum_{i=1}^k n_i, \quad E = \sum_{i=1}^k n_i E_i. \quad (9.27)$$

Massimizzare (9.26) equivale a rendere minimo  $\ln(n_1!n_2!\dots n_k!)$ . Se supponiamo  $N$  molto grande potremo ritenere che ciascun numero di occupazione  $n_i$  sia grande; applicando allora la *formula di Stirling* (si veda in 6.5) minimizziamo

$$\sum_{i=1}^k \left[ n_i (\ln n_i - 1) + \frac{1}{2} \ln n_i \right]$$

sotto le condizioni (9.27). Posto, dunque,

$$F(n_1, \dots, n_k, \lambda, \mu) = \sum_{i=1}^k \left[ n_i (\ln n_i - 1) + \frac{1}{2} \ln n_i \right] + \lambda \left[ \sum_{i=1}^k n_i - N \right] + \mu \left[ \sum_{i=1}^k n_i E_i - E \right],$$

eguagliando a zero le derivate rispetto alle variabili  $n_i$ <sup>(6)</sup> otteniamo le condizioni

$$n_i \cdot \frac{1}{n_i} + \ln n_i - 1 + \frac{1}{2n_i} + \lambda + \mu E_i = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

e, supponendo di poter trascurare  $1/n_i$ ,

$$\ln n_i = -\mu E_i - \lambda,$$

da cui si ottiene la *distribuzione di Boltzmann*

$$n_i = C e^{-\mu E_i}.$$

Ovviamente le costanti  $C$  e  $\mu$  andranno determinate in modo da soddisfare le (9.27). In termodinamica si prova che  $\mu = 1/(KT)$ , ove  $T$  è la temperatura assoluta e  $K$  è la costante di Boltzmann.



## ESERCIZI

**9.0.1** Dati i triangoli di vertici  $A(0,2)$ ,  $B(2,0)$  e che hanno il terzo vertice sulla curva di equazione  $y = \frac{2}{x}$ , scrivere l'equazione del luogo geometrico descritto dai loro baricentri.

**9.0.2** Rappresentare nel piano la curva di equazione

$$(xy - \sqrt{5})(y^2 - x^2 - 4) = 0$$

e verificare che esistono due punti della curva in un intorno dei quali essa non può essere scritta in forma esplicita.

<sup>(6)</sup>Qui stiamo fingendo che le variabili  $n_i$  non siano intere ma assumano arbitrari valori positivi.

9.0.3 Rappresentare nel piano la curva di equazione

$$(x^2 + y^2 - 1)^2 - 12y^2 = 0$$

e trovare i punti nel cui intorno essa non è grafico di una funzione  $y = f(x)$ . Scrivere la funzione che si ottiene in un intorno del punto  $(1, 2\sqrt{3})$ . Verificare che la curva è il luogo geometrico dei punti che vedono il segmento di estremi  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  sotto un angolo di  $30^\circ$  oppure  $150^\circ$ .

9.0.4 Dimostrare, usufruendo del teorema di Dini, che l'equazione

$$3xy^2 - 2x^3y + 10 = 0$$

definisce una funzione  $y = f(x)$  in un intorno del punto  $(2, 1)$  e ricavare le derivate  $f'(x)$  e  $f''(x)$ .

9.0.5 Nelle ipotesi del teorema del Dini se esistono continue le derivate  $F_{xx}$ ,  $F_{xy}$ ,  $F_{yy}$  si verifichi che la derivata seconda della funzione implicita  $f(x)$  è espressa da

$$f''(x) = -\frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{F_y^3}.$$

9.0.6 Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^1$  tale che  $f'(x) \neq 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ . Si provi che risulta  $f' < 0$  per ogni  $x$  oppure  $f' > 0$  per ogni  $x$ . Se ne deduca che  $f$  è globalmente invertibile (contrariamente al caso di applicazioni  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ).

9.0.7 Sia  $F$  una funzione di classe  $C^1$  e sia  $F(x, y, z) = 0$  in una regione  $R$ . Se le derivate parziali  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  sono non nulle in  $R$ , si provi che risulta

$$\frac{\partial x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

9.0.8 Verificare che il luogo dei punti del piano per i quali

$$(x^2 + y^2)^3 - 4x^2y^2 = 0$$

rappresenta una curva regolare nell'intorno di ogni suo punto diverso da  $(0, 0)$ .

9.0.9 Disegnare l'insieme  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xe^y + y = 1\}$ . Dire in quali punti  $(x, y) \in A$  si può esprimere localmente la  $y$  in funzione della  $x$ . Si provi che in  $(0, 1)$  ciò è possibile e si verifichi che lo sviluppo di Taylor al 2° ordine di  $y(x)$  è

$$y(x) = 1 - ex + e^2x^2 + O(x^2).$$

9.0.10 Si provi che il luogo dei punti del piano per i quali risulta

$$y \ln x - x \cos y = 0$$

definisce una curva regolare in un intorno del punto  $(1, \frac{\pi}{2})$ . Scritta tale curva come grafico rispetto a una variabile determinarne lo sviluppo di Taylor fino al secondo ordine.

9.0.11 Dato il sistema

$$\begin{cases} F(x,y,\xi,\eta) = x + y^2 + 2\xi + \eta = 0 \\ G(x,y,\xi,\eta) = x - y - 5\xi + \eta^2 = 0 \end{cases}$$

verificare che non è possibile trovare per ogni punto  $(\xi,\eta)$  uno e un solo punto  $(x,y)$  che soddisfi il sistema, mentre è possibile trovare un solo punto  $(x,\xi)$  per ogni  $(y,\eta)$  (si noti che, essendo il sistema di primo grado nelle variabili  $x, \xi$ , lo jacobiano coincide con il determinante dei coefficienti; la discussione dei sistemi lineari si presenta come un caso particolare di questa discussione).

9.0.12 Sia data la trasformazione lineare di equazioni

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

con jacobiano  $J \neq 0$ .

(a) Dato il triangolo di vertici  $(0,0)$ ,  $(2,0)$ ,  $(1,1)$ , trovare i vertici del triangolo trasformato e verificare che le misure delle superfici dei triangoli stanno nel rapporto  $|J|$ .

(b) Dato il triangolo  $T$  di vertici  $(x_1,y_1)$ ,  $(x_2,y_2)$ ,  $(x_3,y_3)$ , calcolare i vertici del triangolo trasformato  $T'$ . Dimostrare che il rapporto tra le aree è  $\frac{S(T')}{S(T)} = |J|$ . Generalizzare la proprietà a tutti i poligoni.

9.0.13 Si dimostri che la trasformazione lineare che manda il punto  $(1,1)$  in  $(2,5)$  e il punto  $(1, -1)$  in  $(0, -1)$  conserva le aree.

9.0.14 Esprimere l'area dell'elemento di superficie delimitato da  $[\rho, \rho + h]$  e  $[\theta, \theta + k]$  sia in coordinate polari  $(S)$  che in coordinate cartesiane  $(S')$  (v. Figura 9.5) e verificare che

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \frac{S'}{S} = \rho.$$

9.0.15 In quali punti le trasformazioni seguenti sono localmente invertibili?

(a)  $\xi = x^2 - y^2, \quad \eta = 2xy;$

(b)  $\xi = x^2 - xy, \quad \eta = y - x;$

(c)  $\xi = \text{sen}(x + y), \quad \eta = \text{cos}(x + y).$

9.0.16 Si consideri  $(x,y) \rightarrow \left( \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \frac{xy}{x^2 + y^2} \right)$  e si dica se tale trasformazione si può invertire in un intorno di  $(0, 1)$ .

9.0.17 Posto  $\xi = f(x,y)$ ,  $\eta = g(x,y)$  si supponga che  $f$  e  $g$  siano funzioni  $C^1$  che verificano le equazioni di Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial x};$$

si provi che  $f$  e  $g$  sono funzioni armoniche. Si provi, poi, che la trasformazione è localmente invertibile se e solo se  $\text{grad } f(x,y) \neq 0$  e che in tal caso la trasformazione inversa verifica ancora le equazioni di Cauchy-Riemann.

- 9.0.18** Trovare il massimo e il minimo della funzione  $z = x + y$  col vincolo  $(x-1)^2 + y^2 = 4$  sia riconducendosi ad un problema in una sola incognita mediante rappresentazione parametrica del vincolo stesso, sia con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
- 9.0.19** Trovare il massimo e il minimo della funzione  $f(x,y) = y^2 + x^2$  col vincolo  $x^2 + y^2 - 6y + 8 = 0$ , sia utilizzando la parametrizzazione del vincolo sia il metodo dei moltiplicatori.
- 9.0.20** Una scatola a forma di parallelepipedo di dimensioni  $x, y, z$  è addossata alle pareti di una stanza. Quale deve essere il rapporto tra le dimensioni se si vuole che la superficie libera sia minima a parità di volume?
- 9.0.21** (a) Trovare massimo e minimo di  $f(x,y) = |x| + |y|$  su  $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ .  
 (b) Disegnare le "curve di livello di  $f$ ", cioè gli insiemi  $\{(x,y) : f(x,y) = t\}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .
- 9.0.22** Disegnare le curve di livello della funzione  $f(x,y) = xy$ . Trovare il massimo e il minimo della funzione con il vincolo:  
 (a)  $x^2 + y^2 = 1$   
 (b)  $|x| + |y| = 1$ .

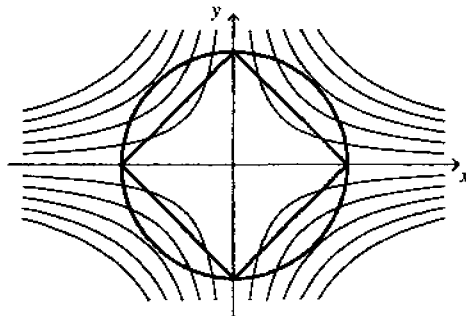


Figura 9.7

- 9.0.23** Trovare il massimo e il minimo della funzione  $f(x,y) = e^{x^2 - y^2}$  nelle regioni  
 (a)  $x^2 + y^2 \leq 1$ ;  
 (b)  $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ .
- 9.0.24** Trovare il massimo e il minimo della funzione  $f(x,y) = x^2 + 2y$  col vincolo  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ .
- 9.0.25** Trovare il massimo e il minimo della funzione  $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} - x$   
 (a) nel suo dominio naturale;  
 (b) col vincolo  $y \leq x$ .
- 9.0.26** (a) Si disegni l'insieme  $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y) = 0\}$  ove  

$$\varphi(x,y) = (x-1)^3 - y^2.$$

(b) Si determinino il minimo di  $f(x,y) = x^2 + y^2$  su  $A$  e si verifichi che esso non può essere ricavato col metodo dei moltiplicatori di Lagrange; giustificare questo fatto.

(c) Si concluda che, volendo applicare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange nel caso di un vincolo  $\phi(x,y) = 0$  con  $\nabla\phi$  eventualmente nullo, i punti di massimo e di minimo per la funzione  $f$  soggetta a tale vincolo vanno cercati tra i punti  $(x,y)$  per cui esiste  $\lambda$  tale che ...

**9.0.27** Determinare

$$\max\{ab^2c^3 : a,b,c > 0, a + b + c = 6\}.$$

**9.0.28** Determinare se esistono il massimo e il minimo della somma di tre numeri  $x,y,z$  tali che  $x^2 + y^2 + z = 0$ .

**9.0.29** (a) Provare che se  $p, q > 1$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  allora posto  $f(x,y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$  risulta

$$f(x,y) \geq 1 \text{ su } \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, xy = 1\}.$$

(b) Dedurne che se  $x,y \geq 0$  si ha (si veda anche Esercizio 3.3.17)

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

**9.0.30** Trovare i punti di minima distanza dall'origine della curva intersezione tra le superfici

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 1.$$

**9.0.31** Una fabbrica di elettrodomestici produce due modelli di lavatrici; la costruzione dei due tipi è parzialmente comune e il costo di produzione è stimato come

$$\sqrt{2x^2 + y^2 - xy}$$

dove  $x$  e  $y$  rappresentano il numero di lavatrici del primo e del secondo tipo prodotte. La fabbrica riceve un ordine di 800 lavatrici; il cliente non ha preferenza tra i due tipi ma vuole spendere il meno possibile. Come deve essere programmata la fabbricazione per rispondere alla richiesta?

**9.0.32** Trovare il massimo di  $f(x,y,z) = \ln x + \ln y + 3\ln z$  sulla parte di sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$  con  $x,y,z > 0$ . Utilizzare il risultato per dimostrare che per ogni terna di numeri reali  $a, b, c > 0$  si ha

$$abc^3 \leq 27 \left( \frac{a + b + c}{5} \right)^5.$$

**9.0.33** Determinare il minimo di  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  sotto la condizione  $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 1$ , ove  $a_1, a_2, \dots, a_n$  non sono tutti nulli.

**9.0.34** Trovare il massimo di  $(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2$  sotto la condizione  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ .

**9.0.35** Sia  $y = f(x)$  l'equazione di una curva regolare e sia  $P = (a,b)$  un punto che non giace sulla curva. Detta  $d$  la distanza fra  $P$  e un punto  $Q$  variabile sulla curva, si provi che  $PQ$  è normale alla curva se e solo se  $d$  è minima oppure massima.



**9.0.36** Trovare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x,y,z) = xy + yz + zx$$

sulla sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Trovare anche tutti i punti nei quali il massimo e il minimo vengono assunti.

Studiare anche l'analogo problema in dimensione maggiore

$$F(x,y,z,w) = xy + yz + zw + wx$$

con il vincolo  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ .

**9.0.37** Data la funzione  $f(x,y) = px^2 + 2qxy + ry^2$  ove  $p,q,r$  sono costanti, determinare delle condizioni necessarie e sufficienti affinché il punto  $(0,0)$  sia un massimo locale, un minimo locale, un punto di sella.

**9.0.38** Una reazione chimica si svolge in un contenitore sferico di raggio  $R$ ; la temperatura all'interno della sfera, in un sistema di coordinate che ha origine nel centro della sfera, è data da  $T = kxyz^2$ , dove  $k$  è una costante assegnata. Quali sono i punti della superficie del contenitore dove si riscontrano la temperatura minima e quella massima?

**9.0.39** Trovare il parallelepipedo di volume massimo e spigoli paralleli agli assi coordinati che è inscritto nell'ellissoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

**9.0.40** Un silo è costituito da un cilindro di altezza  $h$  e raggio  $R$  sormontato da una semisfera.

(a) Trovare la forma del silo di volume assegnato (ad esempio  $5000 \text{ m}^3$ ) che ha superficie minima.

(b) Sapendo che la costruzione del tetto semisferico costa 5000 Euro al metro quadro, mentre quella delle pareti cilindriche costa 2000 Euro al metro quadro, trovare la forma del silo che, a parità di volume, minimizza il costo di costruzione.

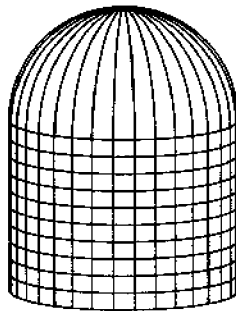


Figura 9.8

**9.0.41** Trovare, se esistono, massimo e minimo di  $f(x,y,z) = e^{-(x^2-y+z^2)}$  sull'insieme

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 1\}.$$

9.0.42 Esistono massimo e minimo della funzione  $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 2z^2$  sulla curva di equazioni  $xyz = 1$ ,  $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ ?

9.0.43 Una lunga striscia di lamiera di rame larga  $w$  cm viene piegata lungo due linee parallele ai bordi e che distano  $x$  cm da essi in modo da ottenere una grondaia. L'angolo di piegatura è  $\theta$ . Trovare  $x$  e  $\theta$  in modo che la grondaia abbia il massimo volume.

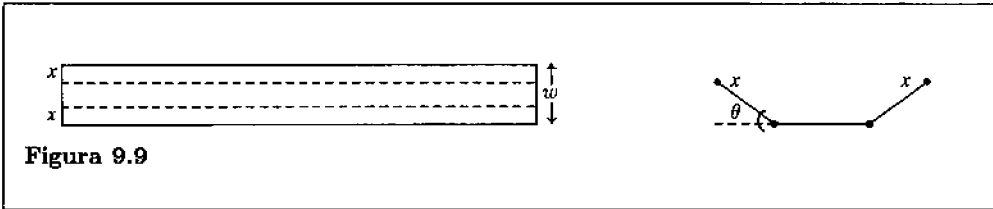


Figura 9.9

9.0.44 Il problema di minimizzare

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j$$

sotto la condizione

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

ove  $c_j$ ,  $a_{ij}$  e  $b_i$  sono costanti assegnate per  $i = 1, \dots, m$  e  $j = 1, \dots, n$  viene detto *problema di programmazione lineare*. Usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si dimostri che la soluzione corrisponde a quella del *problema duale*: massimizzare

$$\sum_{i=1}^m b_i w_i$$

sotto la condizione

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} w_i = c_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

## Calcolo integrale per funzioni di più variabili

---

Nel Capitolo 3, tramite la nozione di integrale, abbiamo definito l'area di un insieme piano del tipo

$$a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x),$$

ove  $f$  è una funzione continua. Vedremo ora come, tramite un opportuno integrale, sia possibile attribuire un'area a un insieme piano delimitato da una curva "regolare"; successivamente definiremo l'area per una classe assai vasta di insiemi piani e questo sarà il punto di partenza per poter definire, a sua volta, l'integrale per funzioni di due (o più) variabili. Definiremo poi l'integrale curvilineo di una forma differenziale, nozione di importanza fondamentale in Analisi e in Fisica ove consente di precisare quella di lavoro compiuto da un campo di forze (il caso unidimensionale è già stato studiato nel Paragrafo 3.4). Esporremo, poi, il teorema della divergenza, che connette gli integrali curvilinei agli integrali multipli e studieremo le forme differenziali esatte, vale a dire i campi di forze conservativi. Chiude il capitolo un rapido accenno agli integrali di superficie e al teorema di Stokes.

### 10.1 Integrali multipli

#### AREA RACCHIUSA DA UNA CURVA PIANA

Una coppia di funzioni continue  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  definite su un intervallo chiuso  $[a, b]$  individua una *curva chiusa* se  $x(a) = x(b)$ ,  $y(a) = y(b)$ . Tale curva si dice *semplice* se per  $a \leq t < b$  a differenti valori di  $t$  corrispondono punti  $(x, y)$  diversi.

Il parametro  $t$  induce sulla curva un *orientamento*; ovviamente sono compatibili con tale orientamento solo i cambiamenti di parametro che sono funzioni crescenti. Ogni curva semplice chiusa  $\Gamma$  divide il piano in due regioni: quella costituita dai punti *interni* alla curva e quella costituita dai punti *esterni*<sup>(1)</sup>; si dice *orientazione positiva* (o *antioraria*) di  $\Gamma$  quella per la quale i punti della regione interna si trovano sulla sinistra di un osservatore che percorre la curva con tale orientazione.

<sup>(1)</sup>Tutte queste nozioni devono essere qui accettate su basi intuitive ma possono essere precisate e formalizzate, anche se l'apparato necessario è piuttosto complesso.

**PROPOSIZIONE 10.1** Sia  $\Gamma$  una curva semplice chiusa orientata positivamente e descritta dalle equazioni parametriche

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

ove si supporrà che  $x(t)$ ,  $y(t)$  siano di classe  $C^1$  a tratti; supporremo, inoltre, che la regione  $D$  interna alla curva verifichi una ipotesi che verrà descritta nel corso della dimostrazione. Allora l'area di  $D$  è data da<sup>(2)</sup>

$$A = - \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt. \quad (10.1)$$

Anzitutto osserviamo che se  $C$  è un arco di curva semplice e orientato con punto iniziale  $P_0$  e punto finale  $P_1$  e  $\{x(t), y(t)\}$  è una rappresentazione parametrica in cui i punti  $P_0, P_1$  corrispondono ai valori  $t_0, t_1$  del parametro, allora l'integrale

$$A_C = - \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt$$

dipende solo da  $C$  e non dalla particolare rappresentazione parametrica; infatti se si effettua un cambiamento di parametro tramite una funzione monotona crescente  $\tau = \varphi(t)$  ed è  $\tau_0 = \varphi(t_0)$ ,  $\tau_1 = \varphi(t_1)$  si ha (per la (6.8))

$$- \int_{\tau_0}^{\tau_1} y \frac{dx}{d\tau} d\tau = - \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{d\tau} \frac{d\varphi}{dt} dt = - \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt = A_C.$$

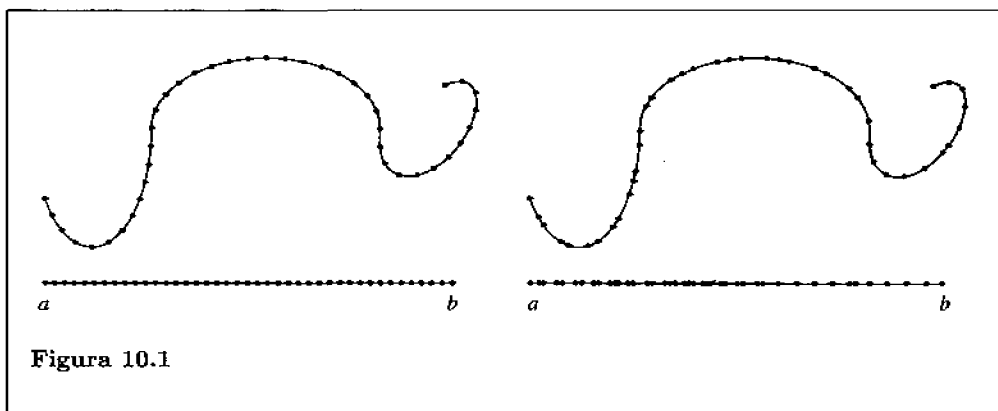


Figura 10.1

Se poi  $C'$  è l'arco che si ottiene da  $C$  cambiando la sua orientazione (cioè  $P_1$  è il punto iniziale e  $P_0$  il punto finale), si ha

$$A_{C'} = - \int_{t_1}^{t_0} y \frac{dx}{dt} dt = \int_{t_0}^{t_1} y \frac{dx}{dt} dt = -A_C.$$

<sup>(2)</sup>La (10.1) si potrebbe anche assumere come definizione dell'area della regione interna; vedremo in questa dimostrazione che essa è compatibile con la definizione di area del trapezoide definito da una funzione.

Se, infine, l'arco orientato  $C$  si scompone in sottoarchi  $C_1, C_2, \dots$  ciascuno con la stessa orientazione di  $C$ , ovviamente si ha:

$$A_C = A_{C_1} + A_{C_2} + \dots,$$

e, dunque, se  $C$  è costituito da più archi regolari  $C_i$ , per calcolare  $A_C$  non occorrerà costruire una artificiale rappresentazione parametrica dell'intero arco  $C$ , ma basterà calcolare separatamente ciascun  $A_{C_i}$  e poi sommare; occorrerà naturalmente assicurarsi che ciascun arco  $C_i$  abbia la stessa orientazione di  $C$ .

Ciò premesso consideriamo una regione  $D$  semplice rispetto alle parallele dell'asse  $y$  <sup>(3)</sup> limitata dagli archi  $C_1 : y = g(x), a \leq x \leq b, C_3 : y = f(x), a \leq x \leq b$  e dai segmenti  $C_2, C_4$  sulle rette  $x = a, x = b$  <sup>(4)</sup> (si veda la Figura 10.2), e sia  $C$  la frontiera di  $D$  orientata positivamente. Calcoliamo  $A_C = A_{C_1} + A_{C_2} + A_{C_3} + A_{C_4}$ . Gli integrali  $A_{C_2}$  e  $A_{C_4}$  sono nulli in quanto  $\frac{dx}{dt} = 0$ ; usando  $x$  come parametro sugli archi  $C_1$  e  $C_3$  troviamo:

$$A_C = A_{C_1} + A_{C_3} = - \int_b^a g(x) \cdot 1 dx - \int_a^b f(x) \cdot 1 dx,$$

e, quindi,  $A_C$  è l'area di  $D$  (Definizione 3.2).

Notiamo che questa formula, supponendo di parametrizzare la curva con  $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$ , ove  $t$  ha il significato indicato, è esattamente la prima identità in (10.1).

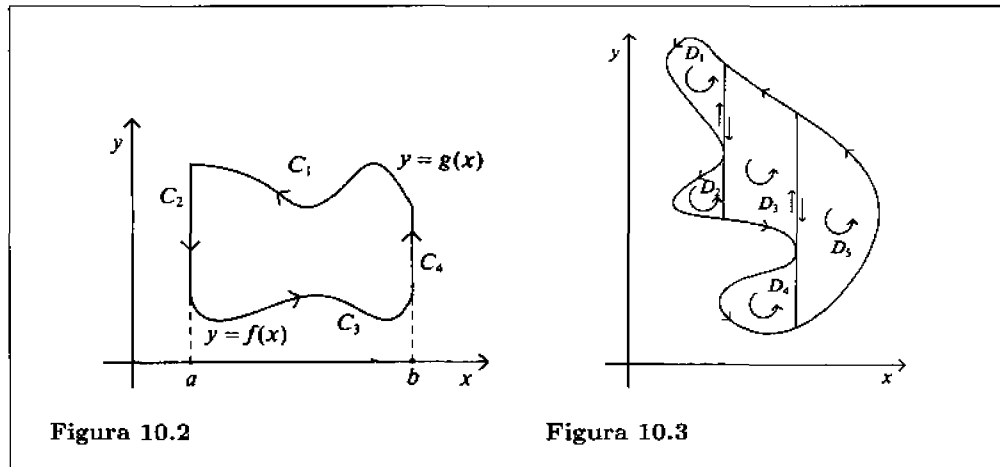


Figura 10.2

Figura 10.3

Se ora  $D$  è una regione con frontiera  $\Gamma$  orientata positivamente che può essere scomposta in un numero finito di "celle"  $D_1, D_2, \dots$  semplici rispetto alle parallele all'asse  $y$ , allora (Figura 10.3) le parti delle frontiere  $C_1, C_2, \dots$  di tali celle (che supponiamo tutte orientate positivamente) che sono in comune a due celle adiacenti vengono percorse in versi opposti a seconda che esse vengano considerate come frontiera dell'una o dell'altra cella. Dunque, sommando gli integrali  $A_{C_i}$  i contributi dovuti ai tratti

<sup>(3)</sup>Ciò significa che le parallele all'asse  $y$  che intersecano  $D$  hanno in comune con  $D$  un intervallo.

<sup>(4)</sup>I segmenti  $C_2$  e  $C_4$  possono ovviamente ridursi a punti.

di frontiera delle celle interni alla regione si cancellano e si ottiene  $A_C$ ; d'altra parte ciascun  $A_C$  è, per quanto visto, l'area di  $D_i$  e quindi la prima delle (10.1) è vera anche in questo caso.

In modo analogo si prova, per regioni semplici rispetto alle parallele all'asse  $x$ , o che possono essere scomposte in un numero finito di sottoregioni con tale proprietà, che la loro area è uguale al secondo integrale in (10.1).

In particolare, poi, per una regione  $D$  semplice rispetto alle parallele ad entrambi gli assi, l'area è esprimibile con entrambe le formule sopra dette e si può scrivere anche la terza delle (10.1), che è la media aritmetica delle prime due.

L'ipotesi che una regione  $D$  sia scomponibile in celle semplici è piuttosto generale e, nei casi concreti, spesso soddisfatta.  $\square$

Abbiamo verificato che gli integrali (10.1) non dipendono dalla rappresentazione parametrica della curva; per questo si usa anche porre la (10.1) nella forma

$$\text{area}(D) = - \int_{\Gamma} y \, dx = \int_{\Gamma} x \, dy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (x \, dy - y \, dx). \quad (10.2)$$

## AREA IN COORDINATE POLARI

Consideriamo la regione limitata da un arco di curva di equazione, in coordinate polari,  $r = f(\vartheta)$ ,  $\alpha \leq \vartheta \leq \beta$ , e dai raggi  $\vartheta = \alpha$ ,  $\vartheta = \beta$ . Usufruento della (10.2) si ha che l'area  $A$  della regione è data da

$$A = \frac{1}{2} \int (xy' - yx') \, dt,$$

in cui l'integrale è fatto sull'intera frontiera della regione. Sui due raggi  $\vartheta = \alpha$ ,  $\vartheta = \beta$  possiamo usare  $r$  come parametro e dunque otteniamo  $x' = \cos \vartheta$ ,  $y' = \sin \vartheta$ , da cui  $xy' - yx' = 0$ . Sull'arco di curva usiamo  $\vartheta$  come parametro:

$$x' = \frac{dr}{d\vartheta} \cos \vartheta - r \sin \vartheta, \quad y' = \frac{dr}{d\vartheta} \sin \vartheta + r \cos \vartheta,$$

da cui  $xy' - yx' = r^2$ . In conclusione

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\vartheta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f^2(\vartheta) \, d\vartheta. \quad (10.3)$$



**ESEMPI 10.2 (a)** Determiniamo l'area della regione racchiusa da un arco di *cicloide*  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  e dall'asse  $x$ . Si ha

$$A = - \int_{\Gamma} yx' \, dt = \int_0^{2\pi} yx' \, dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 \, dt = 3a^2\pi$$

(il contributo del pezzo di frontiera che sta sull'asse  $x$  è ovviamente nullo).

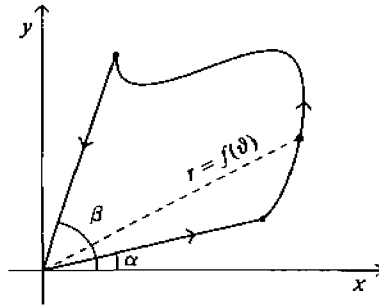


Figura 10.4

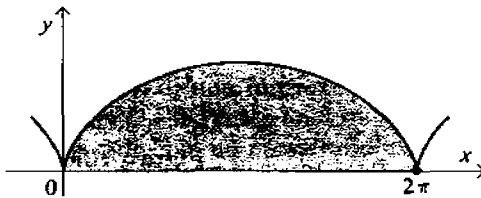


Figura 10.5 Cicloide.

b) Consideriamo l'area del settore iperbolico (Figure 4.36 e 10.6). Il ramo destro dell'iperbole  $x^2 - y^2 = 1$  può porsi nella rappresentazione parametrica  $x = \cosh t$ ,  $y = \sinh t$  e dunque, usufruendo della terza formula in (10.1),

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_0^t (xy' - yx') d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\cosh^2 \tau - \sinh^2 \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t d\tau = \frac{t}{2} \end{aligned}$$

nuovamente il contributo all'integrale dei due raggi è nullo). Riotteniamo, dunque, in modo più semplice il risultato dell'Esempio 6.5 (f).

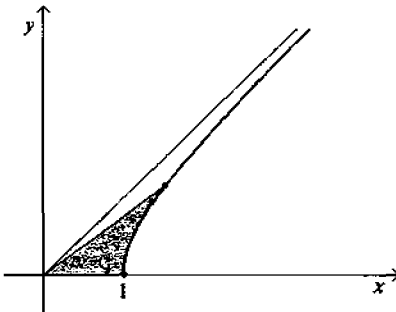


Figura 10.6 Settore iperbolico.

(c) Calcoliamo l'area racchiusa da un ramo di *lemniscata*.

L'equazione è  $r^2 = 2a^2 \cos 2\vartheta$  e un ramo si ottiene per  $-\pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/4$ , dunque da (10.3)

$$A = a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\vartheta \, d\vartheta = a^2.$$

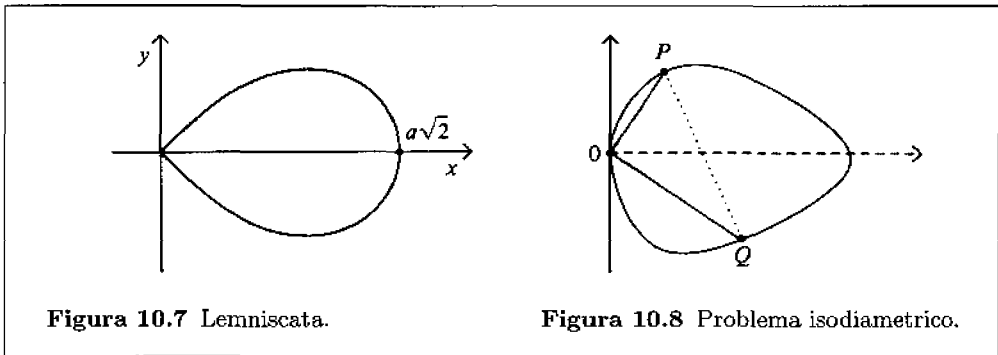


Figura 10.7 Lemniscata.

Figura 10.8 Problema isodiametrico.

(d) (*Problema isodiametrico*) Dimostriamo che fra tutte le curve chiuse di diametro minore o uguale a 2 il cerchio di raggio unitario racchiude l'area massima. Si vede facilmente che si può supporre che la curva sia convessa. Supponiamo che essa giaccia interamente nel semipiano  $x \geq 0$  e passi per l'origine. Se  $r = r(\vartheta)$  è l'equazione polare della curva avremo

$$A = \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2(\vartheta) \, d\vartheta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left[ r^2(\vartheta) + r^2\left(\vartheta - \frac{\pi}{2}\right) \right] \, d\vartheta,$$

ma l'integrando è uguale a  $OP^2 + OQ^2 = PQ^2$  (per il teorema di Pitagora, Figura 10.8) e quindi è minore o uguale a 4. L'area dunque è minore o uguale a  $\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 4 = \pi$ , che è l'area del cerchio di raggio 1.



## INTEGRALI DOPPI

Nel precedente paragrafo abbiamo ottenuto una formula per l'area di una regione piana, espressa in termini di un integrale lungo la sua frontiera, formula che può essere assunta come definizione dell'area stessa; tuttavia è preferibile avere una definizione diretta e più vicina al concetto intuitivo di area. Sembra ragionevole imporre che l'area di un insieme piano  $E$  debba essere un numero non negativo  $A(E)$  con le seguenti proprietà:

- (a) l'area di un rettangolo di lati  $h, k$  è  $hk$ ;
- (b) l'area è additiva, vale a dire se  $E$  si scompone in sottoinsiemi disgiunti  $E_1, E_2, \dots, E_n$  allora  $A(E) = A(E_1) + \dots + A(E_n)$ .

Sulla base di queste semplici richieste si riesce ad attribuire un'area a una vasta classe di insiemi, anche se non a tutti. Se  $P$  è un poligono da (a) e da (b) segue che  $A(P)$



è l'area attribuita a  $P$  dalla geometria elementare; dato un insieme limitato  $E$  consideriamo allora la classe  $\mathcal{P}$  dei poligoni contenuti in  $E$  e la classe  $\mathcal{P}'$  dei poligoni che contengono  $E$ : se risulta<sup>(5)</sup>

$$\sup_{P \in \mathcal{P}} A(P) = \inf_{P' \in \mathcal{P}'} A(P') \quad (10.4)$$

allora  $E$  si dice *quadrabile* (o *misurabile*) secondo Jordan e si definisce  $A(E)$  il comune valore in (10.4).

Si verificano allora facilmente le proprietà (a), (b) e si trova un criterio di quadrabilità: *se un insieme  $E$  ha frontiera  $F$  di area nulla allora  $E$  è quadrabile* (la condizione è anche necessaria). In particolare, dunque, sono quadrabili gli insiemi che hanno frontiera costituita da un numero finito di archi di curva ciascuno dei quali ha rappresentazione  $y = f(x)$  o  $x = g(y)$  con  $f$  e  $g$  continue su un intervallo chiuso<sup>(6)</sup>.

Si verifica anche facilmente che la definizione di area qui considerata è compatibile con quelle precedentemente descritte (Capitolo 3 e pag. 391).

La definizione di *integrale doppio* di una funzione limitata  $f(x, y)$  di due variabili su una regione limitata quadrabile  $D$  è del tutto analoga a quella di integrale ordinario. Si considera una scomposizione  $\pi$  di  $D$  in un numero finito di insiemi quadrabili disgiunti  $D_1, D_2, \dots, D_n$  e si considerano le somme inferiori e superiori:

$$s_\pi = \sum_{i=1}^n m_i A(D_i), \quad S_\pi = \sum_{i=1}^n M_i A(D_i)$$

ove

$$m_i = \inf_{(x,y) \in D_i} f(x,y), \quad M_i = \sup_{(x,y) \in D_i} f(x,y).$$

Se, al variare della scomposizione  $\pi$ , si ha  $\sup s_\pi = \inf S_\pi$ , allora si dice che  $f(x, y)$  è *integrabile* su  $D$ ; tale numero è detto *integrale doppio* di  $f$  su  $D$  e si indica con

$$\iint_D f(x,y) dx dy.$$

Notazioni sovente usate e del tutto equivalenti sono

$$\iiint_D f(x,y) dS, \quad \iint_D f(x,y) dA,$$

nelle quali è ininfluyente la scelta del simbolo usato per indicare "l'elemento d'area"  $dA, dS, dC, \dots$

Se  $f(x, y)$  è continua su un insieme  $D$  limitato e chiuso allora si può dimostrare che  $f$  è integrabile su  $D$  e che il suo integrale si può determinare come un limite<sup>(7)</sup>:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) A(D_i),$$

<sup>(5)</sup>Il primo membro in (10.4) si potrebbe chiamare area interna di  $E$  e il secondo membro area esterna. Si noti che se un insieme ha area esterna nulla allora esso è quadrabile e ha area nulla.

<sup>(6)</sup>Ciò dipende, come non è difficile verificare, dalla proprietà di uniforme continuità di  $f$  e  $g$ .

<sup>(7)</sup>La dimostrazione è del tutto analoga a quella vista nel caso di una variabile, e nuovamente si basa sulla proprietà di uniforme continuità delle funzioni continue sugli insiemi chiusi e limitati.

ove  $(\xi_i, \eta_i)$  è un qualunque punto dell'insieme  $D_i$ ,  $D_1, D_2, \dots, D_n$  è una partizione di  $D$  e il limite è fatto al tendere a zero del massimo diametro  $\delta$  degli insiemi  $D_i$ <sup>(8)</sup>. Si può, per esempio, considerare come partizione  $D_1, D_2, \dots, D_n$  quella indotta su  $D$  da una "quadrettatura" del piano di passo  $1/2^k$ , e fare il limite per  $k \rightarrow \infty$ .

In modo del tutto simile si definiscono il volume di un insieme  $D$  dello spazio tridimensionale e l'integrale triplo delle funzioni continue di tre variabili su  $D$ :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz.$$

### PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI MULTIPLI

Dalla definizione seguono immediatamente le seguenti conseguenze:

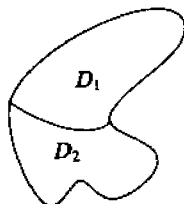
$$(a) \quad \iint_D c f(x, y) dx dy = c \iint_D f(x, y) dx dy;$$

$$(b) \quad \iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy;$$

$$(c) \quad \iint_D 1 dx dy = \text{area}(D);$$

(d) se  $D$  si scompone in due regioni  $D_1$  e  $D_2$  quadrabili e che non hanno altri punti in comune oltre a una parte della loro frontiera, si ha

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy;$$



(e) se  $f(x, y) \leq g(x, y)$  su  $D$  allora

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy,$$

in particolare da  $-|f(x, y)| \leq f(x, y) \leq |f(x, y)|$  segue

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy;$$

<sup>(8)</sup>Si noti che, analogamente al caso di una variabile, non basta che il numero dei  $D_i$  aumenti.

(f) se  $m \leq f(x,y) \leq M$  risulta

$$m \cdot \text{area}(D) \leq \iint_D f(x,y) dx dy \leq M \cdot \text{area}(D);$$

il numero  $\mu$  tale che

$$\mu \cdot \text{area}(D) = \iint_D f(x,y) dx dy$$

si chiama *valor medio* di  $f$  sulla regione  $D$ . Si può dimostrare che se  $f$  è continua su  $D$  e  $D$  è *connesso*, vale a dire  $D$  non è unione di due insiemi chiusi disgiunti, allora esiste almeno un punto  $P(\bar{x}, \bar{y})$  di  $D$  per il quale  $f(\bar{x}, \bar{y}) = \mu$ .

Le predette proprietà costituiscono la naturale estensione delle analoghe proprietà dell'integrale ordinario e sono estendibili in modo ovvio agli integrali tripli. Rimane, tuttavia, il problema di come procedere per calcolare effettivamente gli integrali multipli; in molte situazioni si potrà integrare successivamente nelle diverse variabili, come chiarisce il seguente teorema.

**TEOREMA 10.3** (*di integrazione successiva o di Fubini*) Sia  $f(x,y)$  una funzione continua su una regione  $D$  semplice rispetto alle parallele all'asse  $y$  e sia  $D = \{(x,y) : a \leq x \leq b, h(x) \leq y \leq g(x)\}$ ; allora si ha

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y) dy \right] dx. \tag{10.5}$$

Analogamente se  $D$  è semplice rispetto alle parallele all'asse  $x$  ed è  $D = \{(x,y) : c \leq y \leq d, \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$ , si ha

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_c^d \left[ \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y) dx \right] dy. \tag{10.6}$$

Dimostreremo il teorema solamente nel caso in cui  $D$  è un rettangolo  $R = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ . Posto

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad k = \frac{d-c}{m}$$

dalla definizione di integrale doppio si ha

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(a + ih, c + jk) hk,$$

ove il limite è da intendersi nel senso che la somma a secondo membro differisce dall'integrale a meno di un  $\varepsilon > 0$  arbitrario, pur di prendere  $n$  e  $m$  maggiori di un certo  $N$  che dipende unicamente da  $\varepsilon$ . Se si scrive

$$F_j = \sum_{i=1}^n f(a + ih, c + jk) h$$

si può porre tale somma nella forma  $\sum_{j=1}^m F_j k$ . Dunque per ogni  $n > N$  e un fissato  $m > N$

si ha

$$\left| \iint_R f(x,y) dx dy - \sum_{j=1}^m F_j k \right| < \varepsilon; \tag{10.7}$$

ma in base alla definizione di integrale ordinario, per  $n \rightarrow \infty$ , si ha  $F_j \rightarrow \int_a^b f(x, c+jk) dx$  e, dunque, posto

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

e passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  nella (10.7) otteniamo

$$\left| \iint_R f(x, y) dx dy - k \sum_{j=1}^m \varphi(c + jk) \right| \leq \varepsilon. \quad (10.8)$$

Poiché  $\varphi(y)$  è una funzione continua sempre dalla definizione di integrale per funzioni di una variabile (Teorema 6.1) si ha

$$\lim_{m \rightarrow \infty} k \sum_{j=1}^m \varphi(c + jk) = \int_c^d \varphi(y) dy,$$

e, quindi, passando al limite per  $m \rightarrow \infty$  in (10.8) ed essendo  $\varepsilon$  arbitrario:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_c^d \varphi(y) dy = \int_c^d \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

In modo analogo si prova che

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[ \int_c^d f(x, y) dy \right] dx. \quad \square$$

**OSSERVAZIONE 10.4** (a) Per gli integrali tripli si ha un risultato analogo a quello espresso dal Teorema 10.3; se

$$D = \{(x, y, z); a \leq x \leq b; h(x) \leq y \leq g(x), u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$$

si ha

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{h(x)}^{g(x)} dy \int_{u(x, y)}^{v(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

(b) Dal teorema precedente si ricava che se  $f(x, y)$  è continua sul rettangolo  $a \leq x \leq b$ ,  $c \leq y \leq d$  si ha

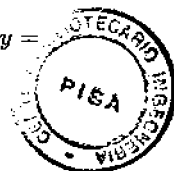
$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy; \quad (10.9)$$

tale formula si rivela utile nel calcolo di alcuni integrali definiti per i quali non si riesce a determinare una primitiva (si veda l'Esempio 10.5) (c) seguente). Si noti, tuttavia, che se  $f$  non è continua allora i due membri in (10.9) possono essere entrambi finiti ma fra loro diversi (Esercizi 10.1.4).

**ESEMPI 10.5 (a)** Sia  $D$  la regione piana limitata dalla parabola  $y = x^2$  e dalle rette  $y = 0$  e  $x = 2$ .  $D$  è semplice sia rispetto alle parallele all'asse  $x$  sia rispetto alle parallele all'asse  $y$ ; dunque, volendo calcolare  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$  si potrà procedere in uno dei modi seguenti:

$$\begin{aligned} \iint_D (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^2 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy = \int_0^2 \left[ x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^{x^2} dy = \\ &= \int_0^2 \left( x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{1312}{105}, \end{aligned}$$

$$\iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 (x^2 + y^2) dx = \dots$$



**(b)** Determiniamo il volume della regione di spazio comune ai due cilindri di equazioni  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x^2 + z^2 = 1$  (Figura 10.9).

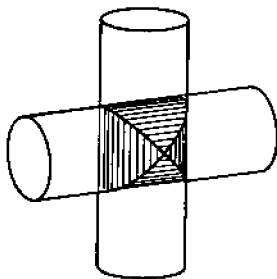


Figura 10.9

Il volume richiesto è dato da  $V = \iiint_D dx dy dz$ , ove  $D = \{(x,y,z); x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + z^2 \leq 1\}$  e si ha dunque

$$V = \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dz = \int_{-1}^1 4(1-x^2) dx = \frac{16}{3}.$$

**(c)** Consideriamo l'integrale improprio

$$I = \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx,$$

il quale, se  $a > 0$ ,  $b > 0$ , risulta convergente. Possiamo esprimere  $I$  come un integrale iterato improprio

$$I = \int_0^{\infty} dx \int_a^b e^{-xy} dy = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A dx \int_a^b e^{-xy} dy;$$

applicando, per ogni fissato  $A$ , l'Osservazione 10.4 (b) otteniamo

$$\begin{aligned} I &= \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^b dy \int_0^A e^{-xy} dx = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{1 - e^{-Ay}}{y} dy = \\ &= \ln \frac{b}{a} - \lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{e^{-Ay}}{y} dy; \end{aligned}$$

si verifica facilmente che  $\lim_{A \rightarrow \infty} \int_a^b \frac{e^{-Ay}}{y} dy = \lim_{A \rightarrow \infty} \int_{aA}^{bA} \frac{e^{-y}}{y} dy = 0$  e dunque si ottiene

$$I = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln \frac{b}{a}, \quad a, b > 0.$$



## BARICENTRO, MOMENTI D'INERZIA

Oltre che per calcolare aree e volumi, gli integrali multipli sono utili per definire e calcolare altre importanti grandezze quali la massa, il baricentro, il momento d'inerzia, ... Per esempio, il baricentro di un sistema di  $n$  masse  $m_1, \dots, m_n$  poste rispettivamente nei punti  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  ha coordinate  $(\bar{x}, \bar{y})$  espresse da

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k y_k}{\sum_{k=1}^n m_k}.$$

Quando in un sistema la massa è distribuita su una regione del piano, anziché in un numero finito di punti, il baricentro si definisce tramite un integrale doppio. Consideriamo, per esempio, una lamina piana che ha la forma di una regione  $D$  e supponiamo di conoscerne la densità di massa  $f(x, y)$  (massa per unità di area); per analogia con il caso discreto definiamo il *baricentro* della lamina come quel punto  $(\bar{x}, \bar{y})$  definito da

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x f(x, y) dx dy}{\iint_D f(x, y) dx dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y f(x, y) dx dy}{\iint_D f(x, y) dx dy}.$$

Gli integrali a numeratore si chiamano i *momenti* della lamina rispetto all'asse  $y$  e all'asse  $x$ , rispettivamente.

Quando la densità di massa è costante, cioè  $f(x, y) = c$ , avremo

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{\text{area}(D)}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{\text{area}(D)}.$$

Se  $l$  è una retta del piano su cui giace la lamina si definisce il *momento d'inerzia* (o *secondo momento*) di  $D$  rispetto a  $l$  come

$$I_l = \iint_D d^2(x, y) f(x, y) dx dy, \quad (10.10)$$

in cui  $d(x, y)$  indica la distanza del punto  $(x, y)$  dalla retta  $l$ . I momenti di inerzia rispetto agli assi  $x, y$  sono rispettivamente

$$I_x = \iint_D y^2 f(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 f(x, y) dx dy,$$

e la loro somma si dice *momento polare d'inerzia* rispetto all'origine:

$$I_0 = I_x + I_y = \iint_D (x^2 + y^2) dx dy. \quad (10.11)$$

Consideriamo, per esempio, una lamina uniforme che ha la forma della regione  $D$  limitata dalla curva di equazione  $y = \text{sen } x$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ , e dall'asse  $x$ .

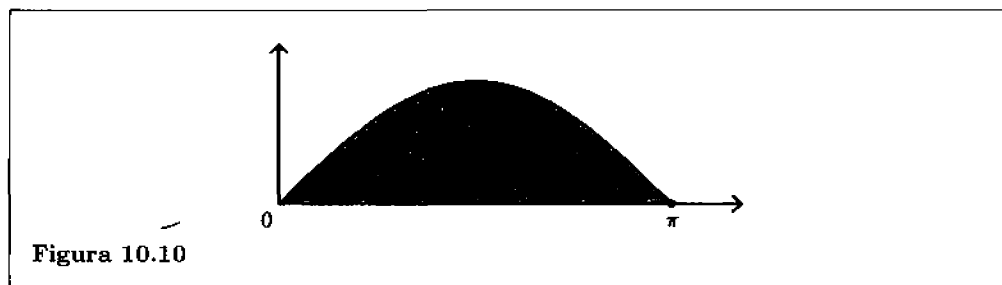


Figura 10.10

Per ragioni di simmetria avremo  $\bar{x} = \frac{\pi}{2}$ , mentre

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y \, dx \, dy}{\iint_D dx \, dy} = \frac{\int_0^\pi \left( \int_0^{\text{sen } x} y \, dy \right) dx}{\int_0^\pi \text{sen } x \, dx} = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2} \text{sen}^2 x \, dx}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

Abbiamo anche

$$I_x = \iint_D y^2 \, dx \, dy = \int_0^\pi \left( \int_0^{\text{sen } x} y^2 \, dy \right) dx = \int_0^\pi \frac{\text{sen}^3 x}{3} \, dx = \frac{4}{9},$$

$$I_y = \iint_D x^2 \, dx \, dy = \int_0^\pi \left( \int_0^{\text{sen } x} x^2 \, dy \right) dx = \int_0^\pi x^2 \text{sen } x \, dx = \pi^2 - 4,$$

$$I_0 = \pi^2 - \frac{32}{9}.$$

## IL TEOREMA DI PAPPO

Sia  $f(z)$  una funzione non negativa, definita per  $a \leq z \leq b$ . Consideriamo l'insieme  $A$  dei punti  $(x, z)$  tali che

$$a \leq z \leq b, \quad 0 \leq x \leq f(z)$$

e l'insieme  $B$  dei punti  $(x, y, z)$  tali che

$$a \leq z \leq b, \quad x^2 + y^2 \leq [f(z)]^2,$$

ottenuto facendo ruotare  $A$  intorno all'asse  $z$ .

Per il teorema di integrazione successiva abbiamo

$$\text{volume}(B) = \iiint_B dx \, dy \, dz = \int_a^b dz \iint_{A_z} dx \, dy$$

in cui  $A_z$  è la sezione di  $B$  al livello  $z$ , cioè

$$A_z = \{(x, y) : (x, y, z) \in B\}.$$

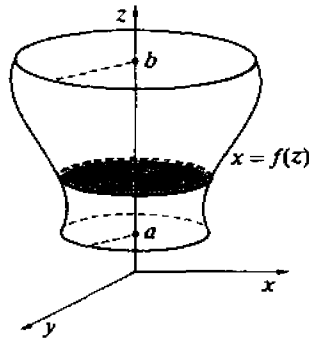


Figura 10.11

Per  $a \leq z \leq b$  l'insieme  $A_z$  è un cerchio di raggio  $f(z)$  e, dunque,

$$\iint_{A_z} dx dy = \pi [f(z)]^2;$$

si conclude allora che

$$\text{volume}(B) = \pi \int_a^b [f(z)]^2 dz. \quad (10.12)$$

Se ora  $A$  è la regione del piano  $x, z$  compresa fra i grafici di due funzioni  $x = f(z)$  e  $x = g(z)$  con  $0 \leq g \leq f$  e  $B$  è il solido di rotazione ottenuto facendo ruotare  $A$  attorno all'asse  $z$ , otteniamo analogamente

$$\text{volume}(B) = \pi \int_a^b ([f(z)]^2 - [g(z)]^2) dz.$$

Se  $(\bar{x}, \bar{z})$  è il baricentro della regione  $A$  si ha

$$\bar{x} = \frac{\iiint_A x dx dz}{\text{area}(A)} = \frac{\int_a^b \left( \int_{g(z)}^{f(z)} x dx \right) dz}{\text{area}(A)} = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b ([f(z)]^2 - [g(z)]^2) dz}{\text{area}(A)}.$$

Da un confronto fra le precedenti relazioni si ottiene il *teorema di Pappo*: il volume di  $B$  è uguale alla lunghezza del cerchio di raggio  $\bar{x}$  moltiplicata per l'area di  $A$ :

$$\text{volume}(B) = 2\pi \bar{x} \text{ area}(A). \quad (10.13)$$

Per esempio, se  $B$  è il *toro* generato dalla rotazione attorno all'asse  $z$  del cerchio  $A$  di equazione

$$(x - b)^2 + z^2 = R^2$$

posto a distanza  $b > R$  dall'asse  $z$ , il volume di tale toro si determina facilmente usando il teorema di Pappo. Si ha infatti  $\bar{x} = b$ ,  $\text{area}(A) = \pi R^2$  e dunque

$$\text{volume}(B) = 2\pi b \cdot \pi R^2 = 2\pi^2 R^2 b.$$



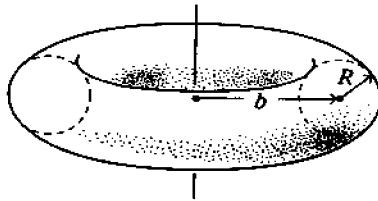


Figura 10.12

**POTENZIALE E CAMPI DI FORZA**

La forma vettoriale della *legge di Coulomb*, che esprime la forza esercitata da una particella con carica  $q$  posta nel punto  $P$  su una particella di carica  $q'$  posto nel punto  $P'$ , è

$$F = \frac{qq'}{r^3} \vec{PQ}$$

in cui  $r$  è la distanza  $PQ$  e si sono scelte opportune unità di grandezza in modo da rendere uguale a 1 la costante di proporzionalità. Vediamo, ora, come si può determinare la forza esercitata da una distribuzione continua di cariche situate su una lamina piana che occupa la regione  $D$  del piano  $x, y$  su una particella di carica unitaria (positiva) situata in un punto  $Q$  dello spazio, non appartenente a  $D$ .

Con una discussione sostanzialmente identica a quella svolta, nel Paragrafo 3.4, per la definizione di lavoro nel caso unidimensionale, si vede che il solo modo ragionevole per determinare tale forza è tramite il seguente integrale:

$$F = \iint_D \frac{\sigma}{r^3} \vec{PQ} dx dy, \tag{10.14}$$

in cui  $\sigma$  indica la densità di carica nel punto  $P$  della lamina e  $r = PQ$ .

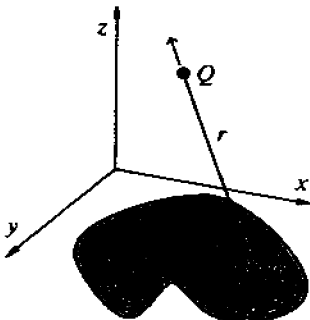


Figura 10.13

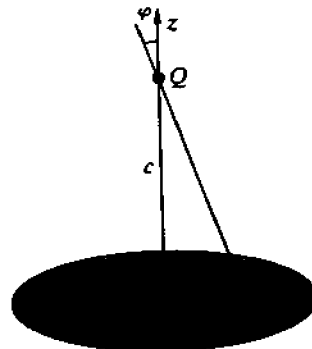


Figura 10.14

L'integrale (10.14) è un integrale doppio vettoriale che formalmente non abbiamo ancora definito, ma il procedimento è del tutto simile al caso scalare se si separano le componenti. Se  $e$  è una direzione orientata e  $\varphi$  è l'angolo che  $PQ$  forma con  $e$ , la componente di  $F$

lungo e è

$$F_e = \iint_D \frac{\sigma}{r^2} \cos \varphi \, dx \, dy.$$

La forza esercitata da un sistema di cariche su una carica unitaria (positiva) posta nel punto  $Q$  è detta *campo* determinato dal sistema di cariche.

Troviamo, per esempio, il campo determinato da una distribuzione uniforme di cariche su una lamina circolare di raggio  $R$  nei punti della perpendicolare passante per il centro. Riferendoci alla Figura 10.14 si ha  $PQ = \sqrt{r^2 + c^2}$ ,  $\cos \varphi = c/\sqrt{r^2 + c^2}$ . Per ragioni di simmetria la forza  $\mathbf{F}$  è diretta lungo l'asse  $z$ ; indicando con  $F_1, F_2, F_3$  le componenti di  $\mathbf{F}$  si ha  $F_1 = F_2 = 0$  e

$$F_3 = \iint_D \frac{\sigma c}{(x^2 + y^2 + c^2)^{3/2}} \, dx \, dy. \quad (10.15)$$

Il calcolo di questo integrale si presenta, nella forma attuale, alquanto laborioso. Come vedremo tra breve, esso si semplifica notevolmente con un opportuno cambiamento di variabile e il risultato è

$$F_3 = 2\pi\sigma \left( 1 - \frac{c}{\sqrt{R^2 + c^2}} \right). \quad (10.16)$$

Lo studio del campo elettrostatico viene agevolato introducendo la nozione di *potenziale del campo*. Il potenziale determinato in un punto  $Q$  da una carica  $q$  posta nel punto  $P$  è

$$U = \frac{q}{PQ}.$$

Nel caso di un sistema di cariche si usa il solito procedimento e, se  $\sigma$  è la densità di carica nel punto  $P = P(x, y)$  della lamina che occupa la regione  $D$ , il potenziale nel punto  $Q$  è

$$U(Q) = \iint_D \frac{\sigma(x, y)}{PQ} \, dx \, dy.$$

Se  $P = P(x, y, 0)$ ,  $Q = (a, b, c)$  si ha

$$\begin{aligned} r^2 &= (PQ)^2 = (a - x)^2 + (b - y)^2 + c^2, \\ U(Q) &= \iint_D \frac{\sigma(x, y)}{r} \, dx \, dy. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Si può dimostrare che è possibile derivare sotto il segno di integrale e dunque, derivando la (10.17) parzialmente rispetto alla variabile  $a$  si ottiene (ricordando la (10.14)):

$$\frac{\partial U}{\partial a} = - \iint_D \frac{\sigma(x, y)}{r^3} (a - x) \, dx \, dy = -F_1,$$

analogamente si vede che  $\frac{\partial U}{\partial b} = -F_2$ ,  $\frac{\partial U}{\partial c} = -F_3$ . Possiamo così concludere

$$\text{grad } U = -\mathbf{F}. \quad (10.18)$$

La relazione (10.18) è di importanza fondamentale nello studio del campo elettrostatico e, più in generale, può essere assunta come definizione del potenziale (se esiste) per un generico campo di forze.

Per esempio, nel caso della lamina circolare uniformemente carica se  $Q = (0, 0, c)$

$$U(c) = \iint_D \frac{\sigma}{\sqrt{r^2 + c^2}} \, dx \, dy = 2\pi\sigma[\sqrt{R^2 + c^2} - c].$$

È facile verificare che  $\frac{\partial U}{\partial c} = -F_3$  (Formula (10.16)).

**OSSERVAZIONE 10.6** Il teorema di integrazione successiva consente di dimostrare facilmente l'invertibilità dell'ordine di derivazione (Teorema 5.7 in ipotesi lievemente più restrittive). Supponiamo che la funzione  $f(x,y)$  possieda le derivate seconde  $f_{xy}$ ,  $f_{yx}$  continue in una regione  $D$ . Se in un certo punto  $P_0$  intorno a  $D$  si avesse (per esempio)  $f_{xy} - f_{yx} > 0$  allora, per il teorema di permanenza del segno, la funzione  $f_{xy} - f_{yx}$  sarebbe positiva in tutto un intorno quadrato di  $P_0$ . Sia  $Q = [a,b] \times [c,d]$  tale intorno, allora

$$\begin{aligned} 0 < \iint_Q (f_{xy} - f_{yx}) dx dy &= \iint_Q f_{xy} dx dy - \iint_Q f_{yx} dx dy = \\ &= \int_a^b \int_c^d f_{xy}(x,y) dx dy - \int_c^d \int_a^b f_{yx}(x,y) dx dy = \\ &= \int_a^b [f_x(x,d) - f_x(x,c)] dx - \int_c^d [f_y(b,y) - f_y(a,y)] dy = \\ &= [f(b,d) - f(b,c) - f(a,d) + f(a,c)] - \\ &\quad - [f(b,d) - f(a,d) - f(b,c) + f(a,c)] = 0, \end{aligned}$$

il che è assurdo. Risulta quindi  $f_{xy} = f_{yx}$  su  $D$ .

**ESERCIZI**

**10.1.1** Calcolare l'area della regione interna alle seguenti curve:

- (a)  $r = 2 + \cos \vartheta$  (*chiocciola di Pascal*), (b)  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$  (*astroide*),  
 (c)  $r = a \sin 3\vartheta$  (*trifolium*), (d)  $r^2 = a^2 \sin 4\vartheta$  (*rodonea*),

**10.1.2** Calcolare l'area delimitata dall'iperbole  $y^2 - x^2 = 1$  e dalla retta  $y = a$  ( $a > 1$ ).

**10.1.3** Si calcoli l'area delimitata dalla *nefroide*, di equazioni  $x = a(3 \cos t - \cos 3t)$ ,  $y = a(3 \sin t - \sin 3t)$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

**10.1.4** Provare che

$$\int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right] dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 \left[ \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right] dy = -\frac{1}{2};$$

come mai in questo caso la Formula (10.9) non vale?

**10.1.5** Si calcolino i seguenti integrali doppi:

- (a)  $\iint_D e^{x+y} dx dy$   $D = \{(x,y); 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$ ,  
 (b)  $\iint_D x^2 e^y dx dy$   $D = \{(x,y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x\}$ ,  
 (c)  $\iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2}$   $D = \{(x,y); 1 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ ,  
 (d)  $\iint_D x \sin(x+y) dx dy$   $D = \{(x,y); 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 1-x\}$ ,  
 (e)  $\iint_D x(1-y) dx dy$   $D = \{(x,y); 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ .

10.1.6 Calcolare i seguenti integrali doppi:

$$(a) \iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy \quad \text{ove } D = \left\{ (x,y); 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y \leq x \right\},$$

$$(b) \iint_D x^2 y^2 dx dy \quad \text{ove } D = \{(x,y); x^2 + y^2 \leq 1\},$$

$$(c) \iint_D y^3 e^x dx dy \quad \text{ove } D \text{ è la regione limitata dalla parabola } y^2 = x \text{ e dalle rette } y = 0, x = 1,$$

$$(d) \iint_D xy dx dy \quad \text{ove } D \text{ è la regione individuata dalle condizioni } x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1.$$

10.1.7 Calcolare

$$\iint_D xy dx dy$$

dove  $D$  è la regione limitata compresa fra i grafici delle funzioni  $\phi(x) = x$  e  $\psi(x) = x^3$ .

10.1.8 Calcolare gli integrali

$$(a) \iiint_D (x+y+z) dx dy dz, \quad D = \{(x,y); x+y+z \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\};$$

$$(b) \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz, \quad D = \{(x,y); x^2 \leq r^2, y^2 \leq r^2, z^2 \leq r^2\}.$$

10.1.9 Calcolare

$$\iiint_D x^2 dx dy dz$$

$$\text{ove } D = \left\{ (x,y,z); \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

10.1.10 Determinare il baricentro della regione di piano delimitata dalle parabole  $y^2 = 4x + 4$  e  $y^2 = -2x + 4$ .

10.1.11 Una lamina quadrata di lato  $l$  ha una densità specifica che è inversamente proporzionale alla distanza da un suo vertice (con una costante  $k$ ). Si determini la massa della lamina.

10.1.12 Calcolare le coordinate del baricentro del triangolo di vertici  $(0,0)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(1,1)$ . È proprio necessario usare un integrale doppio per determinarlo?

10.1.13 Determinare le coordinate del baricentro di un cilindro pieno omogeneo a sezione parabolica avente le dimensioni mostrate in Figura 10.15. Dire sotto quali condizioni il cilindro rimane stabile se poggiato su un piano orizzontale lungo la generatrice passante per i vertici  $A$  e  $B$ . Eseguire un calcolo analogo per un solido di rotazione a sezione parabolica (il parametro  $a$  è un numero puro).

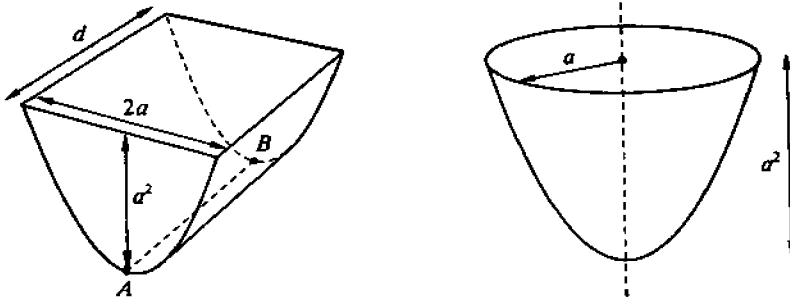


Figura 10.15 Cilindro parabolico e paraboloido.

10.1.14 Un solido di metallo è delimitato dalla superficie  $z = x^2 + y^2$ ,  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 2$  e la sua densità in  $(x, y, z)$  è  $kz$ . Trovarne il momento d'inertia attorno all'asse  $z$ .

10.1.15 Calcolare il volume del "pallone da rugby" definito dalla disequaglianza

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, \quad 0 < a < b.$$

[Usufruire della (10.12)].

10.1.16 Trovare la distanza media dei punti di un quadrato di lato  $l$  da un suo vertice e la distanza media dei punti di un cerchio di raggio  $r$  da un punto sulla sua circonferenza.

10.1.17 Siano  $A, B, C$  i tre momenti d'inertia di un dato solido rispetto ai tre assi coordinati. Si dimostrino le "disuguaglianze triangolari"

$$A + B > C, \quad A + C > B, \quad B + C > A.$$

10.1.18 Supponiamo che la funzione  $f$  sia continua nel rettangolo  $[a, b] \times [c, d]$  e sia

$$F(x, y) = \int_c^y \int_a^x f(u, v) du dv.$$

Si dimostri che

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

per ogni  $(x, y)$  nel rettangolo.

10.1.19 I punti  $(-1, 0)$ ,  $(1, 0)$  sono estremi di un filo metallico su cui la carica è distribuita con densità lineare  $\sigma$ . Calcolare l'intensità della forza elettrica che agisce su di una carica puntiforme  $q$  collocata nel punto  $(0, a)$ .

10.1.20 Una lamina metallica quadrata, che ha il centro nel punto  $(0, 0, 0)$  ed un vertice in  $(1, 1, 0)$ , è caricata uniformemente con densità superficiale  $\sigma$ . Calcolare, utilizzando la (10.17), il potenziale nel punto  $(0, 0, a)$ .

## 10.2 Forme differenziali

Nel Capitolo 5 si è definito il differenziale di una funzione  $z = f(x, y)$  come la funzione delle quattro variabili  $x, y, dx, dy$

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy; \quad (10.19)$$

la scrittura (10.19) e la denominazione delle variabili  $dx, dy$  in cui il differenziale è lineare vengono suggerite dalla regola di derivazione della funzione composta. Infatti, se  $x$  e  $y$  sono funzioni di una variabile  $t$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ , allora la derivata della funzione composta  $z(t) = f(x(t), y(t))$  è

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

e, dunque, (ricordando che il differenziale di una funzione di una variabile  $z(t)$  è  $dz = \frac{dz}{dt} dt$ )

$$dz = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right) dt = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} dt + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} dt,$$

la quale è formalmente in accordo con la scrittura (10.19) se si ricorda che i differenziali di  $x$  e di  $y$  (come funzioni di  $t$ ) sono le funzioni  $dx = \frac{dx}{dt} dt$ ,  $dy = \frac{dy}{dt} dt$ .

Pertanto  $dz$  dato da (10.19) fornisce automaticamente il differenziale  $dz = \frac{dz}{dt} dt$  della funzione  $z(t)$  "lungo la curva" che ha equazioni parametriche  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ .

La più generale funzione delle quattro variabili  $x, y, dx, dy$  che è lineare in  $dx$  e  $dy$  è data da

$$L = A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

in cui i coefficienti  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$  sono funzioni di  $x$  e di  $y$  e si dice *forma differenziale lineare*. Il differenziale  $dz$  di una funzione  $z = f(x, y)$  è un caso particolare di forma differenziale in cui i coefficienti  $A(x, y)$ ,  $B(x, y)$  sono dati da

$$A(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \quad B(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}. \quad (10.20)$$

Una forma differenziale  $L$  si dice *esatta* o *integrabile* se è il differenziale di una certa funzione  $f$ , dunque se sono soddisfatte le (10.20); la funzione  $f$  si dice *primitiva* di  $L$ .

**PROPOSIZIONE 10.7** Se  $A(x, y), B(x, y) \in C^1$  e la forma differenziale

$$L = A(x, y)dx + B(x, y)dy$$

è esatta allora, necessariamente, essa è *chiusa*, cioè i suoi coefficienti verificano la proprietà

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}. \quad (10.21)$$

**DIMOSTRAZIONE** È una ovvia conseguenza del teorema di invertibilità dell'ordine di derivazione in quanto, se valgono le Formule (10.20) e  $A, B$  sono  $C^1$  allora  $f \in C^2$  e quindi per il teorema di Schwarz 5.7

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad \square$$

Per esempio, la forma differenziale

$$L = xy \, dx + x^2 \, dy$$

non è esatta in quanto la condizione (10.21) non è soddisfatta. Vedremo tra breve che, con convenienti ipotesi di natura geometrica sull'insieme di definizione, la (10.21) è anche una condizione sufficiente, cioè ogni forma chiusa è esatta.

Ovviamente si possono considerare forme differenziali lineari in più di due variabili; per esempio, è una forma differenziale la seguente:

$$L = A(x,y,z)dx + B(x,y,z)dy + C(x,y,z)dz,$$

e, in tal caso, la condizione necessaria per l'integrabilità di  $L$  ha la forma

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}, \quad \frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}, \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} \quad (10.22)$$

### INTEGRALI CURVILINEI

Una curva piana semplice orientata  $\Gamma$  di primo estremo  $P$  e secondo estremo  $Q$ , regolare <sup>(9)</sup> sarà chiamata brevemente un *cammino*. Dati un cammino  $\Gamma$  e una forma differenziale lineare  $L = A(x,y)dx + B(x,y)dy$  con coefficienti  $A, B$  continui, possiamo definire l'integrale di  $L$  lungo il cammino  $\Gamma$  suddividendo  $\Gamma$  in  $n$  parti tramite gli  $(n + 1)$  punti  $P_0 = P, P_1, P_2, \dots, P_n = Q$  (i quali si intendono ordinati secondo l'orientamento della curva) e considerando le somme di Riemann

$$S_n = \sum_{i=1}^n [A(x_i, y_i)(x_i - x_{i-1}) + B(x_i, y_i)(y_i - y_{i-1})],$$

in cui  $(x_i, y_i)$  sono le coordinate di  $P_i, i = 0, 1, \dots, n$ .

Si può dimostrare che, al tendere di  $n$  all'infinito e se la massima distanza fra due punti consecutivi  $P_i, P_{i+1}$  tende a zero, la somma  $S_n$  tende a un numero che si dice *integrale curvilineo di  $L$  lungo il cammino  $\Gamma$*  e si scrive

$$\int_{\Gamma} L = \int_{\Gamma} A dx + B dy \quad (10.23)$$

L'idea della dimostrazione della convergenza della  $S_n$  è la seguente: se  $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$ , è una parametrizzazione di  $\Gamma$ , concorde con l'orientamento

<sup>(9)</sup>Ciò significa che  $\Gamma$  ha una rappresentazione parametrica  $x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leq t \leq \beta$  con  $\varphi$  e  $\psi$  di classe  $C^1$  e tali che  $\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$ .

assegnata <sup>(10)</sup>, allora la partizione di  $\Gamma$  induce una partizione dell'intervallo  $[\alpha, \beta]$ :  $t_0 = \alpha < t_1 < \dots < t_n = \beta$  con  $x(t_i) = x_i$ ,  $y(t_i) = y_i$ ; le  $S_n$  si possono allora scrivere

$$S_n = \sum_{i=1}^n [A(x(t_i), y(t_i))(x(t_i) - x(t_{i-1})) + B(x(t_i), y(t_i))(y(t_i) - y(t_{i-1}))],$$

e, per il teorema del valor medio,

$$S_n = \sum [A(x(t_i), y(t_i))x'(\xi_i) + B(x(t_i), y(t_i))y'(\eta_i)](t_i - t_{i-1}), \quad (10.24)$$

in cui i punti  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  appartengono all'intervallo  $(t_{i-1}, t_i)$ .

La (10.24) è "quasi" una somma di Riemann della funzione continua di una variabile

$$A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t); \quad (10.25)$$

la sola differenza sta nel fatto che i vari fattori non sono tutti calcolati nello stesso punto dell'intervallo  $(t_{i-1}, t_i)$  ma in punti  $t_i$ ,  $\xi_i$ ,  $\eta_i$  a priori diversi. Questa è, tuttavia, una difficoltà facilmente superabile tenuto conto che le funzioni  $A(x(t), y(t))$ ,  $B(x(t), y(t))$ ,  $x'(t)$ ,  $y'(t)$  sono uniformemente continue.

Vi è però un altro problema, più delicato: occorre essere certi che al tendere a zero della massima distanza fra due punti consecutivi  $P_{i-1}$ ,  $P_i$  anche la massima ampiezza degli intervalli  $(t_{i-1}, t_i)$  tenda a zero, per poter dedurre che le  $S_n$  tendono all'integrale (ordinario) della funzione (10.25). Occorre allo scopo provare che non solo l'applicazione  $t \rightarrow (x(t), y(t))$  è continua (il che è ovvio essendo  $x(t)$  e  $y(t)$  funzioni continue) ma che anche l'applicazione inversa  $(x(t), y(t)) \rightarrow t$  è continua: si veda a proposito l'Esercizio 10.2.11.

Dalla precedente discussione, modulo gli aspetti formali non provati, segue che l'integrale (10.23) non solo esiste, ma si può calcolare come integrale ordinario della funzione (10.25); si ha dunque

$$\int_{\Gamma} A dx + B dy = \int_{\alpha}^{\beta} [A(x(t), y(t))x'(t) + B(x(t), y(t))y'(t)] dt. \quad (10.26)$$

Si noti che la definizione di integrale curvilineo di una forma differenziale è intrinseca e non dipende dalla particolare rappresentazione parametrica di  $\Gamma$  (a condizione naturalmente che venga indotta la stessa orientazione del cammino).



**ESEMPIO 10.8** Sia  $\Gamma$  l'arco di cerchio di equazione  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $0 \leq t \leq \pi/4$ ; abbiamo

$$\int_{\Gamma} y dx + x dy = \int_0^{\pi/4} (-\sin t \cdot \sin t + \cos t \cdot \cos t) dt = \int_0^{\pi/4} \cos 2t dt = \frac{1}{2}.$$

È spesso conveniente usare una notazione vettoriale per esprimere gli integrali curvilinei delle forme differenziali, per ragioni sia di compattezza di notazione, sia di maggiore

<sup>(10)</sup> Cioè tale che  $P = (x(\alpha), y(\alpha))$ ,  $Q = (x(\beta), y(\beta))$ .



trasparenza delle interpretazioni fisiche o geometriche. Così, per esempio, ponendo  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j}$ ,  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$  si scrive

$$\int_{\Gamma} A_1 dx + A_2 dy = \int_{\Gamma} (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j})(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

in cui  $\cdot$  indica il prodotto scalare fra vettori e  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  sono i versori degli assi coordinati  $x$ ,  $y$ . Analogamente, in tre variabili si ha

$$\int_{\Gamma} A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r}$$

con  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ ,  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ .

Se, per esempio, in ogni punto  $(x, y, z)$  è definita una forza  $\mathbf{F}$  di componenti  $(F_1, F_2, F_3)$  allora

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Gamma} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

rappresenta il lavoro compiuto da  $\mathbf{F}$  percorrendo il cammino  $\Gamma$ .



### PROPRIETÀ DEGLI INTEGRALI CURVILINEI

(a) Si ha  $\int_{\Gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy = \int_{\Gamma} A(x, y) dx + \int_{\Gamma} B(x, y) dy$ .

(b) Se  $\Gamma^*$  è il cammino che si ottiene invertendo l'orientazione di  $\Gamma$  si ha

$$\int_{\Gamma} A dx + B dy = - \int_{\Gamma^*} A dx + B dy.$$

(c) Se il cammino  $\Gamma$  si scompone, tramite un suo punto, in due cammini  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  che hanno la stessa orientazione di  $\Gamma$  si ha

$$\int_{\Gamma} A dx + B dy = \int_{\Gamma_1} A dx + B dy + \int_{\Gamma_2} A dx + B dy.$$

Analoghe proprietà si hanno nel caso di tre o più variabili.

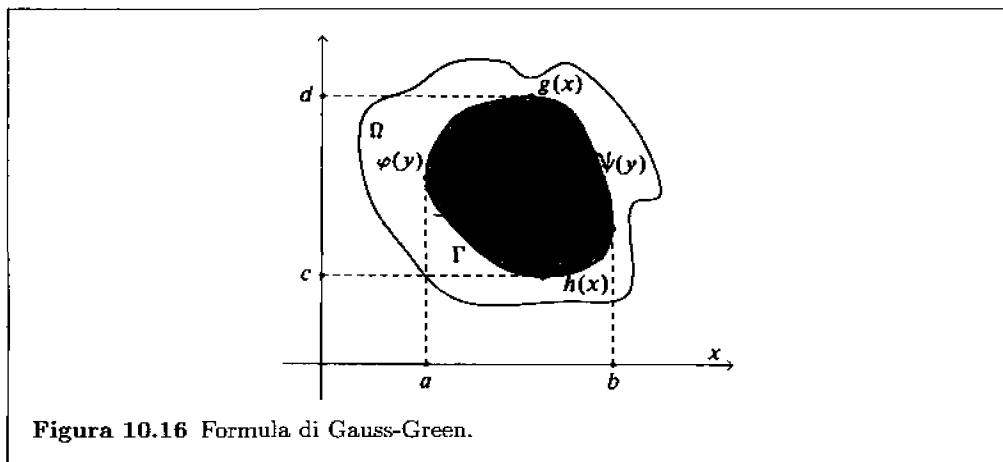
La proprietà (c) permette di integrare le forme differenziali anche sui cammini  $\Gamma$  che sono *regolari a tratti*, cioè hanno una rappresentazione parametrica  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ,  $\alpha \leq t \leq \beta$ , con  $\varphi$ ,  $\psi$  di classe  $C^1$  a tratti e tali che  $[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 > 0$  nei punti in cui sono definite.

### FORMULA DI GAUSS-GREEN

Il seguente teorema è una naturale estensione della Proposizione 10.1.

**TEOREMA 10.9** (*Formula di Gauss-Green*) Sia  $\Gamma$  un cammino chiuso e sia  $D$  la regione interna a tale curva; supporremo che  $\Gamma$  sia orientato positivamente rispetto a  $D$ . Se  $A$  e  $B$  sono funzioni di classe  $C^1$  (in un aperto  $\Omega$  che contiene  $\Gamma$  e  $D$ ) allora si ha

$$\int_{\Gamma} A dx + B dy = \iint_D \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy. \quad (10.27)$$



Dimostreremo il teorema nel caso in cui  $D$  risulti *semplice* sia rispetto alle parallele all'asse  $x$ , sia a quelle all'asse  $y$ . Sia dunque

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y): a \leq x \leq b, \quad h(x) \leq y \leq g(x)\} \\ &= \{(x,y): c \leq y \leq d, \quad \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}; \end{aligned}$$

dal Teorema 10.3 si ricava

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{\partial A}{\partial y} dx dy &= \int_a^b \left[ \int_{h(x)}^{g(x)} \frac{\partial A}{\partial y} dy \right] dx = \\ &= \int_a^b [A(x,y)]_{y=h(x)}^{y=g(x)} dx = \int_a^b [A(x,g(x)) - A(x,h(x))] dx = \\ &= - \int_b^a A(x,g(x)) dx - \int_a^b A(x,h(x)) dx = - \int_{\Gamma} A dx. \end{aligned}$$

In modo analogo si prova

$$\iint_D \frac{\partial B}{\partial x} dx dy = \int_c^d B(\psi(y), y) dy + \int_d^c B(\varphi(y), y) dy = \int_{\Gamma} B dy,$$

da cui la (10.27).

Con considerazioni analoghe a quelle svolte nel caso della Proposizione 10.1 si può estendere la validità di (10.27) a regioni più complicate (e anche al caso in cui la frontiera di  $D$  è costituita da più di una curva chiusa).  $\square$

**OSSERVAZIONE 10.10** (a) La (10.27) è una estensione delle Formule (10.1) che forniscono l'area di un dominio limitato  $D$ ; infatti, ponendo  $B = x$ ,  $A = 0$ , oppure  $A = -y$ ,  $B = 0$ , o ancora  $A = -y$ ,  $B = x$  in (10.27) si ha

$$\iint_D dx dy = \text{area}(D) = \int_{\Gamma} x dy = - \int_{\Gamma} y dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx. \quad (10.28)$$

(b) In forma vettoriale la formula di Gauss-Green si può porre nel modo seguente: se  $A_1$  e  $A_2$  sono le componenti di un vettore  $\mathbf{A}$ , ponendo  $A_1 = B$  e  $A_2 = -A$  in (10.27)

abbiamo

$$\iint_D \left( \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} A_1 dy - A_2 dx; \quad (10.29)$$

facendo intervenire il parametro lunghezza d'arco (Paragrafo 6.3) il secondo membro in (10.29) diviene

$$\int_{\Gamma} \left( A_1 \frac{dy}{ds} - A_2 \frac{dx}{ds} \right) ds, \quad (10.30)$$

ma il vettore di componenti  $\left( \frac{dy}{ds} - \frac{dx}{ds} \right)$  è di lunghezza unitaria ed è perpendicolare al vettore tangente (il quale ha componenti  $\left( \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right)$  (pag. 270)); dunque, se  $\Gamma$  è orientata positivamente, esso coincide con il vettore normale esterna  $\mathbf{n}$  alla curva  $\Gamma$ ; pertanto l'integrando in (10.30) altro non è che il prodotto scalare  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ . In conclusione la (10.29) si può porre nella forma

$$\iint_D \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds \quad (10.31)$$

e in tale forma è nota come *teorema della divergenza* (si veda il Teorema 10.16). Nell'Esercizio 10.2.13 viene considerata un'altra interpretazione vettoriale della formula di Gauss-Green.

Nel seguito considereremo forme differenziali definite su un insieme *semplicemente connesso*<sup>(11)</sup> del piano.

**PROPOSIZIONE 10.11** Sia  $L = Adx + Bdy$  una forma differenziale definita su un aperto  $\Omega$  semplicemente connesso con  $A, B$  di classe  $C^1$ ; condizione necessaria e sufficiente affinché risulti

$$\int_{\Gamma} L = 0 \text{ per ogni cammino } \Gamma \text{ semplice e chiuso di } \Omega \quad (10.32)$$

è che sia

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} \text{ in ogni punto di } \Omega. \quad (10.33)$$

**DIMOSTRAZIONE** Se la (10.33) è soddisfatta e  $\Gamma$  è una curva semplice e chiusa contenuta in  $\Omega$ , dalla formula di Gauss-Green segue la (10.32). Viceversa se la (10.32) è soddisfatta e per assurdo fosse (per esempio)  $\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} > 0$  in un punto  $P$  di  $\Omega$ , allora per il teorema della permanenza del segno sarebbe  $\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} > 0$  in un intorno di  $P$ , e dunque, assumendo come curva  $\Gamma$  una circonferenza di centro  $P$  contenuta in tale intorno, da (10.27) si dedurrebbe  $0 < \iint \left( \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\Gamma} L$ , contraddicendo l'ipotesi.  $\square$

<sup>(11)</sup>Un aperto  $\Omega$  del piano si dice semplicemente connesso se per ogni coppia di punti  $P$  e  $Q$  di  $\Omega$  vi è un cammino  $\Gamma$  che congiunge  $P$  e  $Q$  e appartiene a  $\Omega$ , e se per ogni coppia  $\Gamma, \Gamma^*$  di tali cammini che non hanno altri punti in comune oltre a  $P$  e a  $Q$ , la regione interna alla curva semplice chiusa costituita da  $\Gamma$  e  $\Gamma^*$  appartiene a  $\Omega$ .

Se sono soddisfatte le condizioni della proposizione precedente è chiaro che l'integrale della forma  $L$  lungo un cammino  $\Gamma$  che congiunge due punti  $P$  e  $Q$  dipende unicamente dai punti iniziale e finale e non dal cammino  $\Gamma$ ; da ciò deriva l'importante teorema seguente.

**TEOREMA 10.12** Se  $L = A dx + B dy$  è una forma differenziale definita su un aperto  $\Omega$  semplicemente connesso e  $A, B \in C^1(\Omega)$  allora  $L$  è esatta se e solo se

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial y} \quad \text{in ogni punto di } \Omega. \quad (10.34)$$

**DIMOSTRAZIONE** Già sappiamo (Proposizione 10.7) che la (10.34) è una condizione necessaria affinché  $L$  sia esatta; proviamo che è anche sufficiente. Per la Proposizione 10.11 l'integrale di  $L$  è indipendente dal particolare cammino che congiunge due punti. In particolare se  $P \equiv (a, b)$  è un fissato punto di  $\Omega$  e  $Q \equiv (x_0, y_0) \in \Omega$  definiamo

$$\varphi(x_0, y_0) = \int_{(a, b)}^{(x_0, y_0)} A dx + B dy;$$

allora, per  $|h|$  piccolo a sufficienza, il punto  $(x_0 + h, y_0)$  appartiene a  $\Omega$  e si ha

$$\varphi(x_0 + h, y_0) - \varphi(x_0, y_0) = \int_{(a, b)}^{(x_0 + h, y_0)} L - \int_{(a, b)}^{(x_0, y_0)} L = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0 + h, y_0)} L.$$

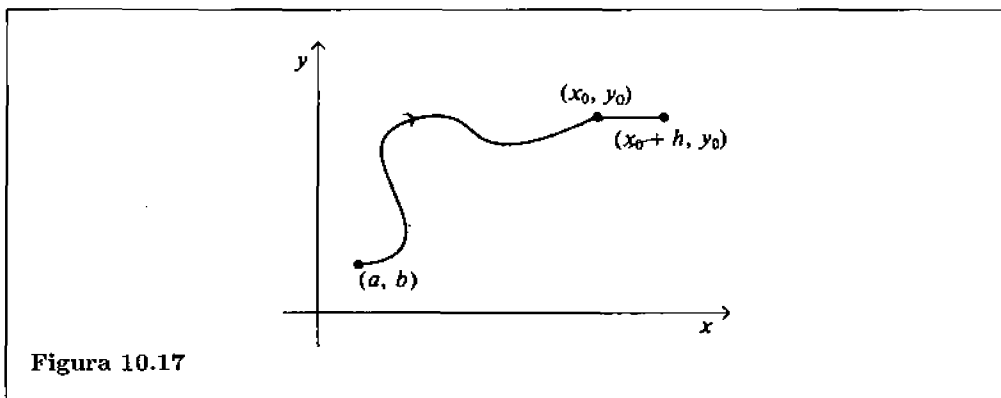


Figura 10.17

Poiché l'ultimo integrale è indipendente dal cammino che congiunge i punti  $(x_0, y_0)$  e  $(x_0 + h, y_0)$ , esso sarà uguale all'integrale ordinario  $\int_{x_0}^{x_0+h} A(x, y_0) dx$ <sup>(12)</sup>.

Per il teorema del valor medio abbiamo allora

$$\frac{\varphi(x_0 + h, y_0) - \varphi(x_0, y_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} A(x, y_0) dx = A(\xi, y_0)$$

ove  $\xi$  è un punto dell'intervallo di estremi  $x_0, x_0 + h$ . Passando al limite per  $h \rightarrow 0$  si ricava  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)$ .

<sup>(12)</sup>Ciò corrisponde ad assumere come cammino il segmento che congiunge  $(x_0, y_0)$  con  $(x_0 + h, y_0)$ , il quale ha equazioni parametriche  $x = t, y = y_0, x_0 \leq t \leq x_0 + h$ , e ad applicare la (10.26).

Analogamente si prova  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) = B(x_0, y_0)$ ; dunque  $\varphi$  è una primitiva della forma differenziale  $L$ .  $\square$

**ESEMPIO 10.13** Consideriamo la forma differenziale

$$L = (2xy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2)dy;$$

essa verifica la condizione (10.34), in quanto

$$\frac{\partial}{\partial x}(1 - 2y \sin x + 3x^2y^2) = -2y \cos x + 6xy^2 = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3 - y^2 \cos x),$$

ed è definita su una regione semplicemente connessa (l'intero piano); dunque, per il Teorema 10.12 la forma  $L$  è esatta. Per determinare una primitiva  $\varphi(x, y)$ , basterà integrare  $L$  lungo un cammino congiungente un punto  $(a, b)$  con il punto  $(x, y)$ . Ovviamente si avrà cura di scegliere  $(a, b)$  in modo che i calcoli siano il più possibile semplici: per esempio, scegliendo  $(a, b) = (0, 0)$  e il cammino indicato in Figura 10.18 si ottiene

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} L = \int_{(0,0)}^{(x,0)} L + \int_{(x,0)}^{(x,y)} L = \\ &= \int_0^x 0 dx + \int_0^y (1 - 2y \sin x + 3x^2y^2) dy = y - y^2 \sin x + x^2y^3, \end{aligned}$$

come del resto si poteva dedurre da una ispezione diretta di  $L$ .

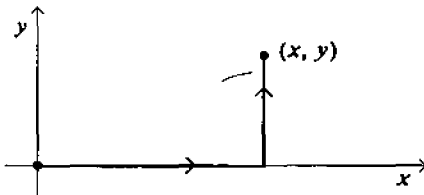


Figura 10.18

**OSSERVAZIONE 10.14** Se la forma  $L$  è definita su una regione che non è semplicemente connessa, allora la (10.34) non è, in generale, sufficiente a garantire la integrabilità di  $L$ ; per esempio, la forma  $L = -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$  verifica la (10.34), ma se  $\Gamma$  è la circonferenza di centro l'origine e raggio  $r$  si ha

$$\int_{\Gamma} L = \int_0^{2\pi} r^2 \left( \frac{\cos^2 t}{r^2} + \frac{\sin^2 t}{r^2} \right) dt = 2\pi \neq 0.$$

La forma  $L$  è, quindi, chiusa ma non esatta (il piano privato dell'origine, ove  $L$  non è definita, non è semplicemente connesso).

I coefficienti della forma  $L$  sono, a meno di costanti, le componenti del campo magnetico generato da un filo rettilineo percorso da corrente (legge di Biot-Savart).

## CAMBIAMENTO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI DOPPI

Sia

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \quad (10.35)$$

una trasformazione che manda un dominio limitato  $D$  con frontiera  $\Gamma$  nel piano  $x, y$  nel dominio  $D'$  con frontiera  $\Gamma'$  nel piano  $u, v$ . Supporremo che la trasformazione  $T : (x,y) \rightarrow (u,v)$  sia biunivoca e che il suo determinante jacobiano  $J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$  sia positivo; in tali ipotesi si può verificare che  $T$  mantiene l'orientazione positiva della frontiera: cioè se

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

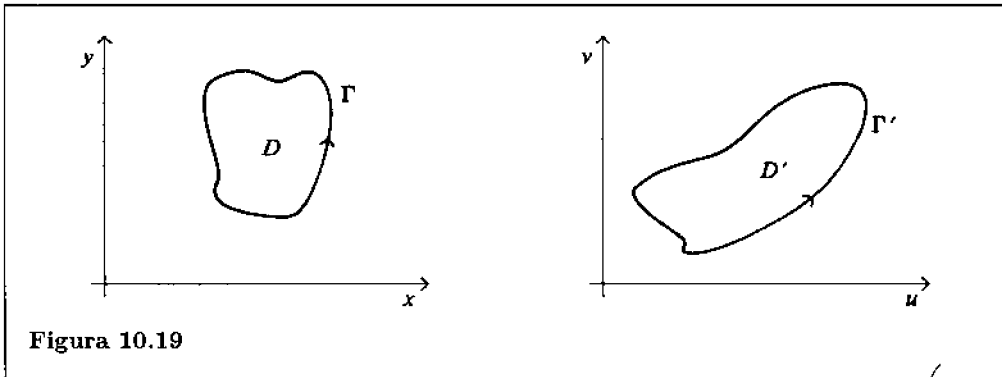


Figura 10.19

è una rappresentazione parametrica di  $\Gamma$  che per  $t$  crescente descrive  $\Gamma$  nel verso positivo, allora

$$u(t) = u(x(t), y(t)), \quad v(t) = v(x(t), y(t)), \quad a \leq t \leq b$$

è una rappresentazione parametrica di  $\Gamma'$  la quale descrive  $\Gamma'$  nel verso positivo (rispetto a  $D'$ ). Applicando la Formula (10.28) e la regola di derivazione della funzione composta, abbiamo

$$\begin{aligned} \iint_{D'} du dv &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma'} u dv - v du = \frac{1}{2} \int_a^b [u(t)v'(t) - v(t)u'(t)] dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ u(t) \left[ \frac{\partial v}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial v}{\partial y} y'(t) \right] - v(t) \left[ \frac{\partial u}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial u}{\partial y} y'(t) \right] \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right] x'(t) + \left[ u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right] y'(t) \right\} dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \left[ u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right] dx + \left[ u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right] dy = \\ &= \frac{1}{2} \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] dx dy, \end{aligned}$$

avendo fatto uso, nell'ultimo passaggio, della formula di Gauss-Green (10.27). Eseguendo le derivazioni e semplificando si perviene così alla formula

$$\iint_{D'} dudv = \iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy = \iint_D \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} dx dy \quad (10.36)$$

la quale esprime la trasformazione delle aree determinata da (10.35). In modo sostanzialmente analogo, se  $f(u,v)$  è una funzione continua definita su  $D'$  si vede che

$$\iint_{D'} f(u,v) dudv = \iint_D f(u(x,y),v(x,y)) \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} dx dy, \quad (10.37)$$

la quale costituisce la *formula di cambiamento di variabili per gli integrali doppi*.

Se il determinante jacobiano risulta negativo una delle due curve  $\Gamma, \Gamma'$  viene percorsa in direzione negativa, dunque occorre introdurre una variazione di segno e, in generale, si ha quindi

$$\iint_{D'} f(u,v) dudv = \iint_D f(u(x,y),v(x,y)) \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right| dx dy. \quad (10.38)$$

Si può dimostrare che la (10.38) è valida anche se il determinante jacobiano si annulla, ma non cambia segno, in un numero finito di punti di  $D$ .

**ESEMPI 10.15 (a)** Sia da calcolare  $\iint_D (x^4 - y^4) dx dy$  in cui  $D$  è la regione del 1° quadrante delimitata dalle iperboli  $xy = 4$ ,  $xy = 2$ ,  $x^2 - y^2 = 1$ ,  $x^2 - y^2 = 9$ . Consideriamo la trasformazione

$$\begin{cases} u = x^2 - y^2 \\ v = 2xy \end{cases}$$

il cui determinante jacobiano è

$$J = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2).$$

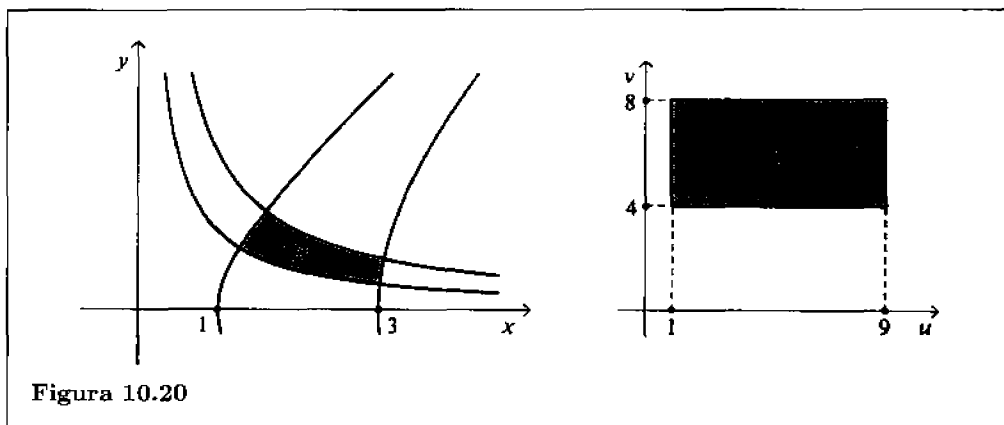


Figura 10.20

Tale trasformazione manda la regione  $D$  nel rettangolo

$$D' = \{(u, v) : 1 \leq u \leq 9, \quad 4 \leq v \leq 8\};$$

applicando allora la (10.38) con  $f = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)$  abbiamo

$$\iint_D (x^4 - y^4) dx dy = \iint_D \frac{x^2 - y^2}{4} \cdot 4(x^2 + y^2) dx dy = \iint_{D'} \frac{u}{4} du dv = 40.$$

(b) Sia da calcolare  $\iint_D \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$ , in cui  $D$  è la regione interna alla *lemniscata*  $(x^2 + y^2)^2 - (x^2 - y^2) = 0$  con  $x > 0$ . Passando a coordinate polari

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta,$$

l'equazione dell'arco di lemniscata è

$$\rho = \sqrt{\cos 2\vartheta}, \quad -\pi/4 \leq \vartheta \leq \pi/4;$$

il determinante jacobiano della trasformazione è

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \vartheta)} = \begin{vmatrix} \cos \vartheta & -\rho \sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \rho \cos \vartheta \end{vmatrix} = \rho$$

e quindi

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \int_0^{\sqrt{\cos 2\vartheta}} \frac{\rho}{(1 + \rho^2)^2} d\rho d\vartheta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

## AREA DI UNA SUPERFICIE

Per definire l'area di una superficie si potrebbe pensare di procedere in modo analogo al caso della lunghezza di una curva (Paragrafo 6.3), considerando superfici poliedrali inscritte la cui area è definibile elementarmente e prendendo l'estremo superiore delle loro aree; tuttavia questa strada non è percorribile, in quanto, anche per superfici semplici quali il cilindro o la sfera, tale estremo superiore è  $+\infty$  (si veda l'Esercizio 10.2.27). Questa differenza di comportamento è dovuta al fatto che in una poligonale inscritta in una curva la direzione di ogni lato approssima quella della retta tangente, mentre invece le facce di un poliedro inscritto in una superficie possono essere inclinate quanto si vuole rispetto al piano tangente in un punto vicino, pur avendo tali facce diametro piccolo in modo arbitrario.

Alla medesima definizione di lunghezza di una curva, di equazione  $y = f(x)$ ,  $a \leq x \leq b$ , con  $f \in C^1$ , si può pervenire, considerando in luogo delle poligonali inscritte le poligonali "circoscritte", nel modo seguente: si divida l'intervallo  $[a, b]$  in  $n$  parti tramite i punti  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ , si fissi un punto arbitrario  $\xi_i$  nell'intervallo  $[x_{i-1}, x_i]$ , si consideri la tangente alla curva in  $(\xi_i, f(\xi_i))$  e sia  $l_i$  la lunghezza del tratto di tangente che sta nella striscia  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ . Facendo tendere a zero la massima



delle ampiezze degli intervalli  $[x_{i-1}, x_i]$  la somma  $\sum_{i=1}^n l_i$  tende alla lunghezza della curva, data dall'integrale

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

in quanto  $l_i = (x_i - x_{i-1})\sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}$ .

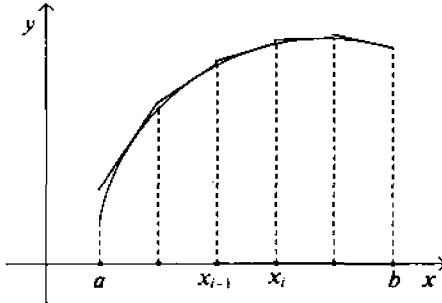


Figura 10.21

Questo procedimento può essere esteso, per analogia, al calcolo dell'area di una superficie data in forma cartesiana  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  con  $f \in C^1$ .

Si suddivide  $D$  in  $n$  sottodomini quadrabili  $D_1, D_2, \dots, D_n$  e si sceglie in ciascuno di questi un punto  $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \dots, (\xi_n, \eta_n)$ ; si costruisce il piano tangente in  $(\xi_i, \eta_i, f(\xi_i, \eta_i))$  e si trova l'area della parte di tale piano che si proietta su  $D_i$ .

L'equazione del piano tangente è

$$z - f(\xi_i, \eta_i) = f_x(\xi_i, \eta_i)(x - \xi_i) + f_y(\xi_i, \eta_i)(y - \eta_i);$$

se  $\alpha_i$  è l'angolo da esso formato con il piano  $x, y$  si ha (Capitolo 5)

$$\cos \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)}}$$

e, quindi, l'area della porzione cercata è (Esercizio 10.2.15):

$$A_i = \frac{\text{area}(D_i)}{\cos \alpha_i} = \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot \text{area}(D_i).$$

Sommando tali aree

$$\sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + f_x^2(\xi_i, \eta_i) + f_y^2(\xi_i, \eta_i)} \cdot \text{area}(D_i)$$

si hanno delle somme di Riemann della funzione continua  $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$  e, dunque, facendo tendere a zero il massimo diametro  $\delta$  dei sottodomini  $D_i$ , per definizione di

integrale doppio, tali somme tendono all'integrale

$$A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy, \quad (10.39)$$

il quale si assume, per definizione, come *area della superficie* di equazione  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$ .

Tale definizione è in accordo con la definizione di area di un insieme piano  $D$  in quanto, ponendo  $f \equiv 0$ , si ha

$$\text{area}(D) = \iint_D dx dy,$$

e anche con la definizione di area delle superfici geometriche elementari. Per esempio per l'area della semisfera di equazione

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\},$$

troviamo

$$\begin{aligned} A &= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = R \iint_D \frac{dx dy}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = \\ &= R \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^R \frac{\varrho d\varrho}{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} = 2\pi R^2. \end{aligned}$$

## INTEGRALI SUPERFICIALI

Se  $S$  è una superficie di equazione  $z = f(x, y)$ ,  $(x, y) \in D$  e  $\varphi(x, y, z)$  è una funzione continua definita su  $S$ , si definisce l'*integrale superficiale* di  $\varphi$  su  $S$  come l'integrale doppio

$$\iint_D \varphi(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy; \quad (10.40)$$

esso si indica con il simbolo

$$\iint_S \varphi(x, y, z) d\sigma$$

in cui  $d\sigma$  denota *simbolicamente* l'elemento d'area  $\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy$  sulla superficie  $S^{(13)}$ .

In quanto precede si è supposto che la superficie  $S$  sia in forma cartesiana, vale a dire intersechi in un sol punto le parallele all'asse  $z$ . Se  $S$  non ha questa proprietà spesso si riesce a scomporre  $S$  in superfici  $S_1, S_2, \dots$  che sono di questo tipo, e in tal caso l'integrale superficiale su  $S$  si definisce come la somma degli integrali su  $S_1, S_2, \dots$

In altri casi sarà conveniente esprimere  $S$ , o una sua porzione, come grafico di una funzione delle variabili  $x, z$  oppure  $y, z$ ; in tali casi le Formule (10.39), (10.40),

<sup>(13)</sup>Ovviamente occorrerà imporre su  $f$  e su  $\varphi$  opportune condizioni di regolarità.

subiscono ovvie modifiche. Si può dimostrare che gli integrali che così si ottengono sono indipendenti sia dalla scomposizione di  $S$  sia della rappresentazione di ciascun  $S_i$ . Il seguente teorema estende la formula di Gauss-Green (si veda l'Osservazione 10.10 (b)).

**TEOREMA 10.16 (della divergenza)** Sia  $S$  una superficie chiusa e sia  $V$  la regione di spazio da essa delimitata. Indichiamo con  $\alpha, \beta, \gamma$  gli angoli che la normale esterna alla superficie  $S$ , in un suo generico punto, forma con le direzioni positive degli assi coordinati  $x, y, z$ ; allora se  $A_1, A_2, A_3$  sono funzioni di classe  $C^1$  in un aperto che contiene  $V$  e  $S$  si ha

$$\begin{aligned} \iiint_V \left( \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} \right) dx dy dz &= \\ &= \iint_S (A_1 \cos \alpha + A_2 \cos \beta + A_3 \cos \gamma) d\sigma. \end{aligned} \quad (10.41)$$

Con notazione vettoriale, se  $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$  e  $\mathbf{n} = \cos \alpha\mathbf{i} + \cos \beta\mathbf{j} + \cos \gamma\mathbf{k}$ , la (10.41) si scrive

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma, \quad (10.42)$$

vale a dire l'integrale superficiale della componente normale del vettore  $\mathbf{A}$  (il *flusso* di  $\mathbf{A}$  attraverso  $S$ ) è uguale all'integrale della divergenza di  $\mathbf{A}$  esteso al volume racchiuso da  $S$ .

Esponiamo ora in modo informale una semplice applicazione fisica del teorema della divergenza. Consideriamo il *moto di un fluido* di densità  $\rho$ , con campo di velocità  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  in una fissata regione  $D$  dello spazio delimitata da una superficie  $S$ ; supporremo che le funzioni  $\rho, v_1, v_2, v_3$  dipendano, oltre che dal punto  $(x, y, z)$ , anche dal tempo  $t$ .

La massa totale di fluido che nell'unità di tempo attraversa una piccola porzione  $\Delta S$  della superficie  $S$ , passando dall'interno all'esterno di  $D$ , è approssimativamente data da  $\rho v_n \Delta S$  ove  $v_n$  è la componente della velocità normale a  $S$ , nella direzione esterna, in un punto  $\rho$  di  $\Delta S$ ; è dunque ragionevole affermare che la quantità totale di fluido che, nell'unità di tempo, attraversa  $S$  dall'interno all'esterno è data da

$$\iint_S \rho v_n d\sigma = \iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

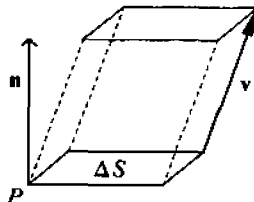


Figura 10.22

Per il teorema della divergenza tale quantità è uguale a

$$\iiint_D \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dx dy dz,$$

ma d'altra parte la massa totale di fluido contenuta in  $D$  all'istante  $t$  è

$$\iiint_D \rho(x, y, z, t) dx dy dz$$

e, quindi, il suo decremento nell'unità di tempo può essere valutato come

$$-\frac{d}{dt} \iiint_D \rho(x, y, z, t) dx dy dz = - \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, y, z, t) dx dy dz,$$

in cui si è supposto di poter derivare sotto il segno di integrale (si veda a proposito la Proposizione 6.26).

Imponendo la *legge di conservazione della massa* abbiamo allora

$$\iiint_D \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) dx dy dz = - \iiint_D \frac{\partial \rho}{\partial t}(x, y, z, t) dx dy dz \quad (10.43)$$

per ogni istante  $t$  e ogni regione  $D$ ; con un'operazione di passaggio al limite (dividendo ambo i membri di (10.43) per il volume di  $D$ , applicando il teorema della media integrale e contraendo  $D$  a un punto) otteniamo

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = -\rho_t$$

vale a dire

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_1)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_3)}{\partial z} = 0 \quad (10.44)$$

la quale è nota come *equazione di continuità*, ed esprime la legge di conservazione della massa in forma puntuale tramite un'equazione differenziale.

Particolarmente notevole è il caso di un fluido *omogeneo e incompressibile*; in tale caso  $\rho$  è indipendente da  $x, y, z, t$  e dunque la (10.44) diviene

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} = 0;$$

nuovamente, dal teorema della divergenza segue allora

$$\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0 \quad (10.45)$$

per ogni superficie chiusa  $S$ . In particolare se la superficie chiusa  $S$  viene "tagliata" lungo una curva  $\Gamma$  e si indicano con  $S_1$  e  $S_2$  le due superfici in cui  $S$  risulta decomposta, da (10.45) si ha

$$\iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma = - \iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

in cui  $\mathbf{n}$  indica la normale esterna a  $S$ . Se, ora, nei punti di  $S_1$  e di  $S_2$  consideriamo le normali  $\mathbf{n}^*$  orientate in modo che la curva  $\Gamma$  risulti orientata positivamente sia per  $S_1$  sia per  $S_2$  (l'orientazione positiva di una curva  $\Gamma$  che limita una superficie orientata  $\Sigma$  è quella antioraria per un osservatore disposto lungo la normale prescelta di  $\Sigma$ )<sup>(14)</sup>

<sup>(14)</sup>Occorrerà, nuovamente, accettare queste considerazioni solo a livello intuitivo; la loro formalizzazione richiede un considerevole apparato matematico.

avremo che su una superficie  $\mathbf{n}^* = \mathbf{n}$ , sull'altra  $\mathbf{n}^* = -\mathbf{n}$ , dunque, con tale scelta delle orientazioni della normale

$$\iint_{S_1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^* d\sigma = \iint_{S_2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}^* d\sigma;$$

in altri termini, la quantità di fluido che attraversa una superficie, che ha come contorno  $\Gamma$ , è indipendente dalla superficie stessa: sembra dunque ragionevole poter esprimere tale grandezza in termini esclusivamente della curva  $\Gamma$ , senza più alcun riferimento alla superficie. Si ha in effetti il seguente teorema generale:

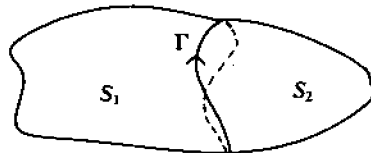


Figura 10.23

**TEOREMA 10.17** (*di Stokes*) Sia  $S$  una superficie regolare orientata<sup>(15)</sup> limitata da una curva semplice chiusa  $\Gamma$ . Si consideri l'orientazione positiva indotta su  $\Gamma$  dalla orientazione di  $S$  nel modo sopra descritto; se  $A_1, A_2, A_3$  sono tre funzioni di classe  $C^1$  in un aperto che contiene  $S$  e  $\Gamma$ , allora risulta

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz &= \\ &= \iint_S \left[ \left( \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left( \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \cos \beta + \left( \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] d\sigma \end{aligned} \quad (10.46)$$

in cui  $\alpha, \beta, \gamma$  sono i coseni direttori della normale  $\mathbf{n}$  a  $S$ .

In notazione vettoriale, se  $\mathbf{A}$  è il vettore di componenti  $(A_1, A_2, A_3)$  e si indica con  $\text{rot} \mathbf{A}$  (*rotore* di  $\mathbf{A}$ ) il vettore di componenti  $(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y})$ , la (10.46) si scrive

$$\int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma. \quad (10.47)$$

**OSSERVAZIONI 10.18** (a) Per collegare il teorema di Stokes alle considerazioni precedenti, riguardanti il flusso attraverso una superficie di un campo  $\mathbf{v}$  a divergenza nulla, basterà osservare che per ogni campo vettoriale  $\mathbf{A}$  risulta

$$\text{div} \text{rot} \mathbf{A} \equiv 0.$$

(b) Usufruento del teorema di Stokes è facile determinare le condizioni necessarie e sufficienti affinché una forma differenziale  $L = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$  abbia integrale nullo su ogni curva semplice chiusa  $\Gamma$ ; naturalmente occorrerà (come nel caso bidimensionale) imporre delle restrizioni naturali al dominio  $T$  di definizione della forma.

Richiederemo che per ogni curva semplice chiusa  $\Gamma$  in  $T$  esista una superficie (regolare) che ha  $\Gamma$  come contorno ed è interamente contenuta in  $T$ ; un dominio tridimensionale che verifica

<sup>(15)</sup>Cioè una superficie bilatera della quale è stata scelta una faccia come positiva; la direzione positiva della normale  $\mathbf{n}$  in un punto di  $S$  sarà quella uscente da tale faccia.

tale condizione si dice *semplicemente connesso* (per esempio, una sfera priva del centro è semplicemente connessa ma un toro non lo è).

Se allora  $T$  è un dominio semplicemente connesso e  $L = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$  è una forma differenziale con  $A_1, A_2, A_3$  di classe  $C^1$ , si potrà utilizzare il teorema di Stokes in luogo della formula di Gauss-Green. Ripetendo le argomentazioni della Proposizione 10.11, si verifica che risulta  $\int_{\Gamma} A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz = 0$  per ogni curva chiusa  $\Gamma$  in  $T$  se e soltanto se

$$\frac{\partial A_3}{\partial y} = \frac{\partial A_2}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_1}{\partial z} = \frac{\partial A_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_2}{\partial x} = \frac{\partial A_1}{\partial y} \quad \text{in } T. \quad (10.48)$$

Allo stesso modo si verifica che se le condizioni (10.48) sono soddisfatte allora la funzione

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

è una primitiva della forma differenziale  $L$ . Nelle ipotesi fatte le (10.48) sono, pertanto, necessarie e sufficienti affinché la forma  $L$  risulti esatta. In notazione vettoriale le (10.48) si esprimono nel modo seguente

$$\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad \text{ove } \mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$$

e se  $\varphi$  è la funzione primitiva si ha

$$\mathbf{A} = \text{grad } \varphi;$$

$\varphi$  prende il nome di *potenziale*, mentre il campo di vettori  $\mathbf{A}$  si dice *conservativo* in quanto è nullo il lavoro lungo ogni cammino chiuso<sup>(16)</sup>.

Per esempio, nel caso del moto di un fluido sopra descritto, se il campo di velocità  $\mathbf{v}$  è irrotazionale (cioè  $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ) allora esiste un potenziale di velocità  $\varphi(x, y, z)$  tale che

$$\mathbf{v} = \text{grad } \varphi;$$

se, inoltre, il fluido è omogeneo e incomprimibile si ha

$$\text{div } \mathbf{v} = 0.$$

Concludiamo con un importante risultato: in questo caso il potenziale di velocità  $\varphi$  è una *funzione armonica*, in quanto

$$0 = \text{div grad } \varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz} = \Delta \varphi.$$

## ESERCIZI

**10.2.1** Dire quali delle seguenti forme differenziali sono chiuse:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & x^3 dx + y^2 dy + z dz; & \text{(b)} \quad & \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{2y}{x^2 + y^2} dy; \\ \text{(c)} \quad & \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy; & \text{(d)} \quad & \frac{x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy + \frac{z}{x^2 + y^2} dz. \end{aligned}$$

**10.2.2** Calcolare

$$\int_{\Gamma} x dx + xy dy$$

dove

<sup>(16)</sup>Come nel caso di due variabili se il dominio non è semplicemente connesso può risultare  $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{0}$  senza che  $\mathbf{A}$  sia conservativo.

- (a)  $\Gamma$  è la retta  $x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1$ ;  
 (b)  $\Gamma$  è l'arco di parabola  $y = x^2$  compreso tra  $(0,0)$  e  $(1,1)$ ;  
 (c)  $\Gamma$  è l'arco di parabola  $x = y^2$  compreso tra  $(0,0)$  e  $(1,1)$ ;  
 (d)  $\Gamma$  è la spezzata di vertici successivi  $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$ .

10.2.3 Calcolare

$$\int_{\Gamma} y \, dx - x \, dy$$

dove

- (a)  $\Gamma$  è la curva chiusa  $x = t^2 - 1, y = t^3 - t, -1 \leq t \leq 1$ ;  
 (b)  $\Gamma$  è il segmento di estremi  $(0,0), (2,4)$ ;  
 (c)  $\Gamma$  è l'arco di parabola di estremi  $(0,0), (2,4)$ ;  
 (d)  $\Gamma$  è la spezzata di vertici successivi  $(0,0), (-2,0), (-2,4), (2,4)$ .

10.2.4 Calcolare

$$\int_{\Gamma} y \, dx + x \, dy$$

per le curve dell'esercizio precedente.

10.2.5 Calcolare

$$\int_{\Gamma} z \, dx + x^2 \, dy + y \, dz$$

dove

- (a)  $\Gamma$  è il segmento di estremi  $(0,0,0)$  e  $(1,1,1)$ ;  
 (b)  $\Gamma$  è l'arco di *cubica gobba*  $x = t, y = t^2, z = t^3$  di estremi  $(0,0,0)$  e  $(1,1,1)$ ;  
 (c)  $\Gamma$  è l'arco di *elica*  $x = \cos t, y = \sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ ;  
 (d)  $\Gamma$  è la spezzata di vertici successivi  $(0,0,0), (2,0,0), (2,3,0), (0,0,1), (0,0,0)$ .

10.2.6 Calcolare

$$\int_{\Gamma} 2x \, dx + z \, dy + y \, dz$$

per le curve  $\Gamma$  dell'esercizio precedente.

10.2.7 Sia  $|A(x,y)| \leq k, |B(x,y)| \leq k$ ; si provi che

$$\left| \int_{\Gamma} A(x,y) \, dx + B(x,y) \, dy \right| \leq \sqrt{2}kL$$

in cui  $L$  è la lunghezza della curva  $\Gamma$ .

10.2.8 Determinare  $\varphi(x,y)$  (a meno di una funzione della sola  $y$ ) in modo da avere una forma esatta, nei casi seguenti:

$$x^2 y \, dx + \varphi(x,y) \, dy; \quad \text{sen } y \, dx + \varphi(x,y) \, dy.$$

10.2.9 Calcolare i seguenti integrali curvilinei:

$$\int_{\Gamma} (x^2 + y) dx + xy dy, \quad \Gamma: x = 1 + \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi;$$

$$\int_{\Gamma} y dx + \lg(8 - x^2) dy, \quad \Gamma: x = 2 \cos t, y = \sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2};$$

$$\int_{\Gamma} 2x dx - y dy, \quad \Gamma: x = \cosh t, y = \sinh t, 0 \leq t \leq 1.$$

10.2.10 Siano  $A_1 = y^2 + z^2$ ,  $A_2 = z^2 + x^2$ ,  $A_3 = x^2 + y^2$  e sia  $S$  la superficie che appartiene alla sfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$  ed è interna al cilindro  $x^2 + y^2 \leq 2rx$  ( $R > r, z > 0$ ). Calcolare l'integrale della forma  $A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$  lungo il bordo  $\Gamma$  di  $S$ , orientato positivamente.

10.2.11 (a) Siano  $M, \varepsilon$  numeri positivi assegnati, e siano  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tali che  $|\alpha|, |\beta|, |\gamma| \leq M$ ,  $|\beta - \gamma| < \varepsilon/4M$ ,  $\alpha^2 + \gamma^2 \geq \varepsilon$ ; provare che

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq \varepsilon/2.$$

(b) Si deduca che se  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  è una curva  $C^1$  che verifica la condizione  $(x')^2 + (y')^2 \neq 0$ , allora esiste  $\varepsilon_0 > 0$  tale che per ogni  $\varepsilon$  con  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$  vi è  $\delta > 0$  tale che

$$(x'(\xi))^2 + (y'(\eta))^2 \geq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{purché } |\xi - \eta| < \delta.$$

(c) Dimostrare che ne consegue la continuità della applicazione  $(x(t), y(t)) \rightarrow t$ .

10.2.12 Trovare il volume e l'area della superficie del solido che si ottiene facendo ruotare un triangolo di lati  $a, b, c$  attorno al lato di lunghezza  $a$ .

10.2.13 Dalla formula di Gauss-Green si deduca la formula

$$\iint_D (\text{rot } \mathbf{B})_z dx dy = \int_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{t} ds,$$

la quale costituisce l'analogo della *formula di Stokes* nel piano; in essa  $\mathbf{B}$  è una campo di vettori nel piano  $x, y$ ,  $(\text{rot } \mathbf{B})_z$  è la componente lungo l'asse  $z$  di  $\text{rot } \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{t}$  è il versore tangente alla curva semplice chiusa  $\Gamma$  la quale racchiude il dominio  $D$  ed è orientata positivamente,  $s$  è infine il parametro lunghezza d'arco.

10.2.14 Calcolare il volume racchiuso dall'ellissoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

10.2.15 Siano  $\pi$  e  $\pi'$  due piani che formano un angolo diedro  $\alpha$ ; siano poi  $D$  un insieme quadrabile su  $\pi$  e  $D'$  la sua proiezione ortogonale su  $\pi'$ : si provi che  $D'$  è quadrabile e che

$$\text{area}(D') = \text{area}(D) \cdot \cos \alpha.$$

[Si usi la formula di cambiamento di variabili per gli integrali doppi.]



**10.2.16** Si calcoli l'integrale

$$\iint_T (x+y+1)(x-y-2) dx dy,$$

dove  $T$  è il triangolo di vertici  $(0,0)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$ , sia in maniera diretta che utilizzando la trasformazione

$$u = x + y + 1, \quad v = x - y - 2.$$

**10.2.17** Calcolare

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

dove  $D = \{(x,y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ .

**10.2.18** Siano  $I_c$  e  $I_m$  i momenti di inerzia di una lamina omogenea rispetto a una linea  $c$  che passa per il baricentro e rispetto a una linea parallela  $m$  a distanza  $h$  dalla prima; provare che

$$I_m = I_c + Mh^2,$$

in cui  $M$  è la massa della lamina.

**10.2.19** Si verifichi che il determinante jacobiano della trasformazione

$$x = \rho \cos \varphi \cos \vartheta, \quad y = \rho \cos \varphi \sin \vartheta, \quad z = \rho \sin \varphi$$

relativa al passaggio a *coordinate polari* (o *sferiche*) in  $\mathbb{R}^3$  è

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\vartheta)} = \rho^2 \sin \vartheta;$$

si scriva una formula che consenta il calcolo degli integrali tripli in coordinate polari e si calcoli

$$\iiint_V \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

ove  $V$  è la regione limitata dalle sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ ,  $a > b > 0$ .

**10.2.20** Calcolare

$$\iiint_D x^2 dx dy dz$$

dove  $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z \geq 0, 3(x^2 + y^2) \leq z^2\}$ .

**10.2.21** Trovare il momento di inerzia di un cono circolare retto di altezza  $h$  e raggio di base  $b$  rispetto al suo asse.

[Usare le *coordinate cilindriche*  $x = \rho \cos \vartheta$ ,  $y = \rho \sin \vartheta$ ,  $z = z$ .]

**10.2.22** Calcolare

$$\iiint_D (x^2 + y^2) dx dy dz$$

dove  $D = \{(x,y,z) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1, x \leq y\}$ .

**10.2.23** (*Formula di Guldino*). Sia  $S$  la superficie che si ottiene facendo ruotare la curva  $\Gamma$  di equazione  $z = \varphi(x)$ ,  $0 < a \leq x \leq b$  attorno all'asse  $z$ ;  $S$  ha, dunque, equazione  $z = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$  ( $\varphi > 0$ ). Usando coordinate polari nel piano  $x, y$  si provi che l'area di  $S$  è data da

$$A = 2\pi \int_a^b \rho \sqrt{1 + \varphi'^2(\rho)} d\rho$$

e che, indicando con  $s$  il parametro lunghezza d'arco sulla curva meridiana  $z = \varphi(x)$  e con  $L$  la lunghezza di tale curva, si ha

$$A = 2\pi \int_0^L x dx = 2\pi Lx_0,$$

in cui  $x_0$  è l'ascissa del baricentro di  $\Gamma$ .

**10.2.24** Trovare l'area della superficie del toro che si ottiene ruotando il cerchio  $(x - a)^2 + z^2 = R^2$  attorno all'asse  $z$  ( $R < a$ ).

**10.2.25** Trovare l'area della superficie che sta sul paraboloide  $z = x^2 + y^2$  ed è compresa fra i cilindri  $x^2 + y^2 = 2$  e  $x^2 + y^2 = 6$ .

**10.2.26** Calcolare il volume delimitato dalla *volta di Viviani*

$$z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad \left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 \leq R^2/4$$

e dal piano  $x, y$ . Calcolare altresì l'area della superficie della volta.

**10.2.27** (*Esempio di Schwarz*). Dato un cilindro retto di raggio  $R$  e altezza  $H$  inscriviamo in esso un poliedro a facce triangolari nel modo seguente: divisa l'altezza in  $m$  segmenti uguali si conducano  $m + 1$  piani a essa perpendicolari e si dividano gli  $m + 1$  cerchi da essi individuati sul cilindro in  $n$  parti uguali, in modo che i punti di divisione di un cerchio siano sulla parallela all'asse che passa per i centri degli archi del cerchio precedente (e/o successivo). Il poliedro che ha come spigoli le corde di tali archi e le congiungenti i punti di suddivisione di un cerchio con quelli del cerchio precedente e/o successivo ha facce che sono triangoli isosceli tutti uguali fra loro. Si provi che l'area di ciascuna di tali facce è

$$R \operatorname{sen} \frac{\pi}{n} \sqrt{R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + \left(\frac{H}{m}\right)^2}.$$

Se  $S_{m,n}$  è l'area della superficie poliedrica,  $q$  è un numero positivo qualunque e si fanno tendere  $m$  e  $n$  all'infinito in modo che  $\lim \frac{m}{n^2} = q$ , si verifichi che

$$\lim S_{m,n} = 2\pi R \sqrt{\frac{\pi^4 R^2}{4} q^2 + H^2};$$

dunque tale limite dipende dal numero arbitrario  $q$ .

**10.2.28** Calcolare  $\iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma$ , in cui  $\mathbf{A} = xy\mathbf{i} - x^2\mathbf{j} + (x + 2)\mathbf{k}$ ,  $S$  è la parte di piano  $2x + 2y + z = 6$  contenuta nel primo ottante e  $\mathbf{n}$  è la normale a  $S$ .

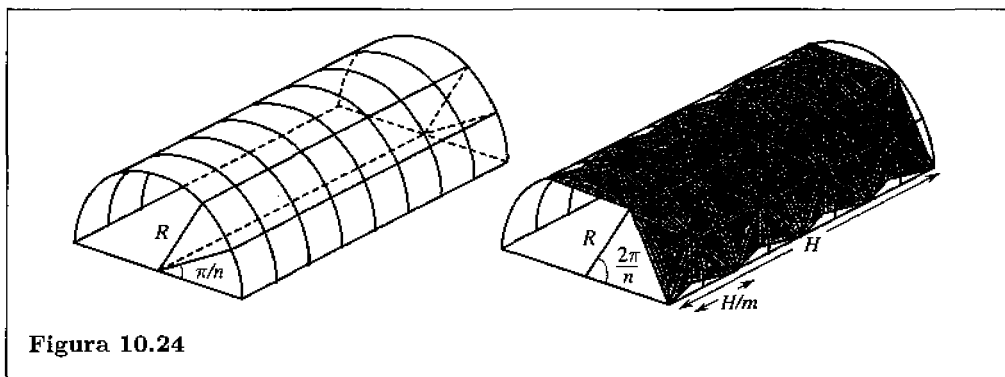


Figura 10.24

10.2.29 Provare che in un dato punto  $P$  si ha

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{3}{4\pi r^3} \iint_{B_r} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

ove  $B_r$  è la superficie sferica di centro in  $P$  e raggio  $r$ .

10.2.30 Sia  $S$  una superficie chiusa. Posto  $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ , calcolare

$$\iint_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} d\sigma.$$

10.2.31 Si dimostri che il campo elettrico all'interno di una sfera cava uniformemente carica è zero.

10.2.32 Sia  $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$  un campo vettoriale della forma  $\mathbf{F} = \varphi(r)\mathbf{R}$ , in cui  $\mathbf{R} = (x, y, z)$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  e  $\varphi$  è una funzione differenziabile per  $r > 0$  tale che

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 0 \text{ per } r > 0.$$

Determinare  $\varphi(r)$ .

10.2.33 Calcolare direttamente, e poi verificare il risultato mediante la formula di Stokes, il seguente integrale:

$$\int_C (y - z)dx + (z - x)dy + (x - y)dz,$$

in cui  $C$  è l'ellisse  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $x + z = 1$ .

10.2.34 (*Integrali doppi impropri*). Sia  $f(x, y)$  una funzione definita in un dominio quadrabile  $D$  e sia  $\{D_n\}$  una successione di domini chiusi quadrabili contenuti in  $D$  tali che:

- (a) la successione  $\{D_n\}$  è monotona (cioè  $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots \subset D$ );
- (b) su ciascun  $D_n$  la funzione  $f(x, y)$  è continua;
- (c)  $\operatorname{area}(D_n) \rightarrow \operatorname{area}(D)$  per  $n \rightarrow \infty$ .

Si provi che se esiste  $C > 0$  tale che

$$\iint_{D_n} |f(x, y)| dx dy \leq C \text{ per ogni } n$$

allora esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x,y) dx dy,$$

e tale limite è indipendente dalla successione "approssimante"  $D_n$ . Detto limite si dice *integrale improprio* di  $f(x,y)$  su  $D$ .

**10.2.35** Se  $f(x,y)$  è continua in  $D$  eccettuato un suo punto, che supponiamo essere l'origine, e se esistono  $M > 0$  e  $\alpha < 2$  tali che

$$f(x,y) < \frac{M}{[\sqrt{x^2 + y^2}]^\alpha},$$

si provi che allora esiste l'integrale improprio di  $f$  su  $D$ .  
[Si usi la proprietà enunciata nell'esercizio precedente.]

**10.2.36** Calcolare l'integrale improprio  $\iint_{x^2+y^2 < 1} \log \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ .

**10.2.37** Tramite una opportuna sostituzione calcolare

$$\iint_D \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} dx dy, \text{ dove } D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq \sqrt{3}x\};$$

vi è qualche problema nel punto (0,0)?

**10.2.38** (*Integrali doppi impropri su regioni illimitate*). Sia  $f(x,y)$  una funzione continua e limitata su un insieme illimitato del piano  $D$  e sia  $\{D_n\}$  una successione di insiemi chiusi, quadrabili e limitati che "invadono"  $D$ , nel senso seguente:

- (a)  $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n \subset \dots \subset D$ ;
- (b) ogni sottoinsieme chiuso e limitato di  $D$  è contenuto in almeno un  $D_n$  (dunque in infiniti).

Si provi che se esiste  $C > 0$  tale che

$$\iint_{D_n} |f(x,y)| dx dy < C, \text{ per ogni } n$$

allora esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{D_n} f(x,y) dx dy;$$

tale limite è indipendente dalla successione "approssimante"  $D_n$  e si dice *integrale improprio* di  $f$  su  $D$ .

**10.2.39** (*Integrale di Laplace*). Passando a coordinate polari si calcoli  $\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$ , in cui  $D_n$  è il cerchio di centro l'origine e raggio  $n$ ; se ne deduca che

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi,$$

in cui  $D$  è l'intero piano, e che  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} = \sqrt{\pi}$ .

**10.2.40** Ricavare le formule

$$\iint_D \left[ u \Delta v + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial n} ds,$$

$$\iint_D (u \Delta v - v \Delta u) dx dy = \int_{\Gamma} \left( u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds,$$

in cui  $n$  è la normale esterna al cammino chiuso  $\Gamma$  orientato positivamente e  $D$  è la regione delimitata da  $\Gamma$ .

**10.2.41** Se  $v(x, y)$  è una soluzione dell'equazione di Laplace  $\Delta v = 0$  dimostrare che

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0$$

e anche

$$\iint_D \left[ \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \int_{\Gamma} v \frac{\partial v}{\partial n} ds.$$

Per un matematico dei nostri giorni è evidente che le funzioni analitiche, nonostante la loro fondamentale importanza in analisi, costituiscono una classe troppo ristretta per molte applicazioni; nel Settecento, tuttavia, esse erano le uniche funzioni degne di considerazione. Fu quindi una sensazionale novità, per quel tempo, l'opera di Fourier, che con l'uso di opportune *serie trigonometriche* della forma

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt),$$

che da allora prendono il nome di *serie di Fourier*, riuscì a rappresentare funzioni  $f(t)$  assolutamente arbitrarie, anche discontinue o generate da diverse leggi di formazione in differenti intervalli, con l'unico, inevitabile vincolo di essere funzioni periodiche.

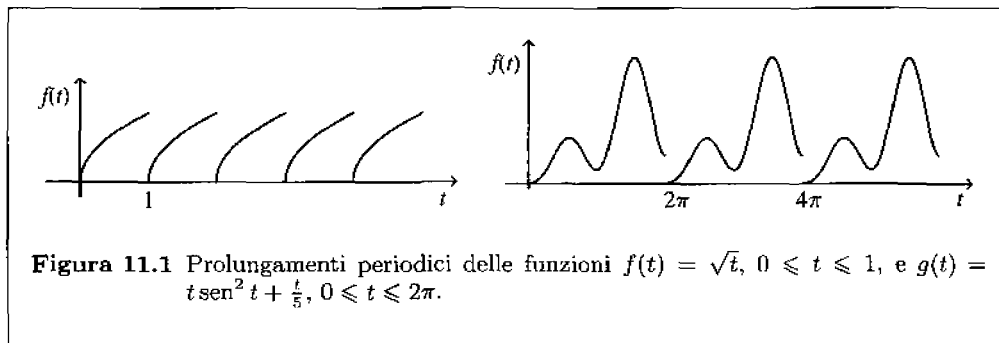
La possibilità di sviluppare in serie trigonometriche funzioni molto generali aprì la strada a importantissimi sviluppi in fisica, in meccanica e nella stessa matematica, grazie all'opera di Cauchy e soprattutto di Dirichlet: a quest'ultimo si deve lo sviluppo di una solida base per questa teoria che, con Fourier, era rimasta a livello euristico. In effetti le serie trigonometriche entrano in modo essenziale nella descrizione di tutti i fenomeni indotti da moti circolari o di tipo oscillatorio.

Questo capitolo vuole fornire un'introduzione elementare alla teoria delle serie di Fourier. Dopo un esame delle principali caratteristiche delle funzioni periodiche, vedremo i più semplici risultati sui vari tipi di convergenza di tali serie. Chiuderà il capitolo una breve descrizione dell'importante nozione di convergenza uniforme e delle sue proprietà.

## 11.1 Funzioni periodiche

Una funzione  $f(t)$  si dice *periodica* di periodo  $T > 0$  se vale l'identità  $f(t + T) = f(t)$  per ogni numero reale  $t$ . Naturalmente, se  $f$  ha periodo  $T$ , essa ha anche i periodi  $mT$  per ogni naturale  $m$ ; può anche succedere che  $f$  abbia altri periodi minori di  $T$ : per esempio,  $\sin 3t$  ha periodo  $2\pi$  ma anche periodo  $\frac{2}{3}\pi$ . La condizione di periodicità non è troppo restrittiva, se si pensa che ogni funzione definita su un intervallo  $[a, b]$  può essere prolungata a una funzione periodica di periodo  $T = b - a$ , ponendo semplicemente  $f(t + nT) = f(t)$  per  $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ . Osserviamo che questa estensione non è univocamente

definita, né necessariamente continua, nei punti  $t = a + nT$ , anche se la funzione originaria era continua.



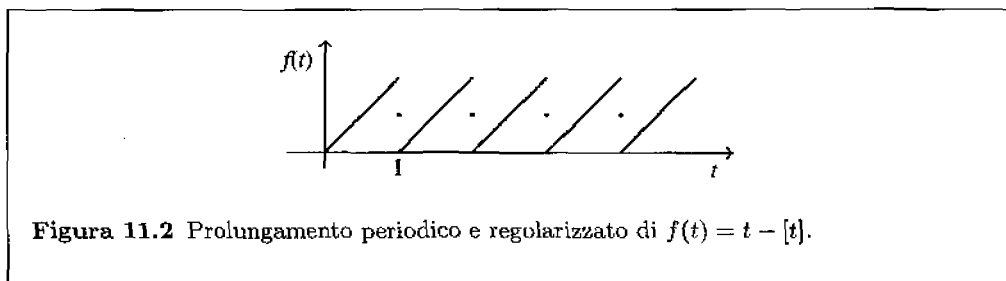
Un ambiente naturale per il nostro studio è dunque quello delle funzioni periodiche e *continue a tratti*: ciò significa che  $f$  ha in  $[0, T]$  al più un numero finito di punti di discontinuità  $t_1, \dots, t_n$  nei quali esistono finiti i limiti destro e sinistro, che denoteremo nel modo seguente:

$$f(t_i^+) = \lim_{t \rightarrow t_i^+} f(t), \quad f(t_i^-) = \lim_{t \rightarrow t_i^-} f(t).$$

Diremo che una funzione continua a tratti è *regolarizzata* se nei suoi punti di discontinuità  $t_i$  si ha

$$f(t_i) = \frac{1}{2}(f(t_i^+) + f(t_i^-)), \quad i = 1, \dots, n.$$

Diremo poi che una funzione  $f$  è *regolare a tratti* se  $f$  è continua, la sua derivata  $f'$  esiste salvo al più un numero finito di punti, e  $f'$  è una funzione continua a tratti.



Per esempio, la funzione  $t - [t]$ , ove  $[t]$  è la parte intera di  $t$ , ha periodo 1 ed è continua a tratti; se le attribuiamo il valore  $\frac{1}{2}$  nei punti  $t = n$ , con  $n$  intero, essa è anche regolarizzata (Figura 11.2).

Per una funzione continua a tratti e periodica di periodo  $T$ , vale la seguente importante proprietà, di facile dimostrazione: per qualunque numero  $a$ ,

$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{T+a} f(t) dt. \quad (11.1)$$

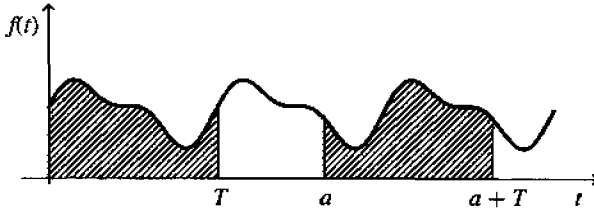


Figura 11.3

Se  $f$  è periodica di periodo  $T_1$ , e  $T_2$  è un altro numero positivo, allora la funzione  $g(t) = f\left(\frac{T_1}{T_2}t\right)$  è periodica di periodo  $T_2$ :

$$g(t) = f\left(\frac{T_1}{T_2}t\right) = f\left(\frac{T_1}{T_2}t + T_1\right) = f\left(\frac{T_1}{T_2}(t + T_2)\right) = g(t + T_2).$$

Quindi, senza restrizione alcuna, potremo all'occorrenza limitarci a considerare funzioni periodiche di periodo  $T$  fissato: molto spesso sceglieremo  $T = 2\pi$ .

Indichiamo con  $C_T$  la classe delle funzioni periodiche di periodo  $T$ , continue a tratti e regolarizzate. In  $C_T$  è possibile definire un *prodotto scalare*, ossia date  $f$  e  $g$  in  $C_T$  possiamo associare ad esse il numero

$$(f|g) = \int_0^T f(t)g(t) dt, \quad (11.2)$$

che gode delle seguenti proprietà, analoghe a quelle tipiche del prodotto scalare fra vettori di  $\mathbb{R}^n$ :

- (i)  $(f|f) \geq 0$ , e  $(f|f) = 0$  se e solo se  $f = 0$ ;
- (ii)  $(\alpha f + \beta g|h) = \alpha(f|h) + \beta(g|h)$  per ogni  $\alpha, \beta$  reali;
- (iii)  $(f|g) = (g|f)$ .

L'unica verifica non banale è la seconda parte di (i): se  $(f|f) = 0$ , indicando con  $t_1, \dots, t_n$  i punti di discontinuità di  $f$  in  $[0, T]$ , possiamo scrivere

$$0 = \int_0^T f(t)^2 dt = \int_0^{t_1} f(t)^2 dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t)^2 dt + \dots + \int_{t_n}^T f(t)^2 dt,$$

e poiché  $f$  è continua su ogni sottointervallo  $[t_i, t_{i+1}]$ , si ricava  $f(t) = 0$  in ciascuno di essi, ossia  $f = 0$ .

In presenza di un prodotto scalare si può definire la nozione di ortogonalità: due funzioni  $f, g$ , nello spazio  $C_T$ , si dicono *ortogonali* se  $(f|g) = 0$ . Per esempio, ricordando l'Esempio 6.5(g), le funzioni del tipo

$$1, \cos nt, \sin nt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sono a due a due ortogonali nello spazio  $C_{2\pi}$ .



Al prodotto scalare (11.2) è associata una norma, detta *norma quadratica*, definita da

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f|f)} = \sqrt{\int_0^T f(t)^2 dt}. \quad (11.3)$$

Essa gode delle proprietà seguenti:

- (i)  $\|f\|_2 \geq 0$ , e  $\|f\|_2 = 0$  se e solo se  $f = 0$ ;
- (ii)  $\|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$  per ogni numero reale  $\lambda$ ;
- (iii)  $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$ .

Una famiglia  $\{f_n\}$  di funzioni di  $C_T$  si dice *sistema ortonormale* se risulta

$$(f_n|f_m) = \begin{cases} 0 & \text{se } n \neq m \\ 1 & \text{se } n = m; \end{cases}$$

è facile verificare allora che la famiglia

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt; n = 1, 2, 3, \dots \right\} \quad (11.4)$$

è un sistema ortonormale nello spazio  $C_{2\pi}$ .

Un sistema ortonormale in un generico spazio dotato di prodotto scalare ha lo stesso ruolo che ha la base canonica in  $\mathbb{R}^n$ : ogni elemento dello spazio si scrive come combinazione lineare degli elementi del sistema, con l'importante differenza che tale combinazione in generale è in forma di serie infinita. Come vedremo, le serie di Fourier costituiranno, appunto, il modo con cui le funzioni di  $C_{2\pi}$  si sviluppano in termini del sistema ortonormale (11.4).

Tramite la norma quadratica è possibile definire una *distanza* fra gli elementi dello spazio  $C_T$ : se  $f, g$  appartengono a  $C_T$ , si definisce

$$d(f, g) = \|f - g\|_2. \quad (11.5)$$

Il numero  $\|f - g\|_2$  fornisce un criterio per misurare quanto le funzioni  $f$  e  $g$  sono "lontane" l'una dall'altra. La distanza sopra definita ha le proprietà usuali:

- (i)  $d(f, g) \geq 0$ , e  $d(f, g) = 0$  se e solo se  $f = g$ ;
- (ii)  $d(f, g) = d(g, f)$ ;
- (iii)  $d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$ .

## OSCILLAZIONI ARMONICHE

La più semplice funzione periodica, a partire dalla quale costruiremo tutte le altre, è la funzione  $a \sin \omega t$ , o più generalmente  $a \sin(\omega t + \varphi)$ , dove  $a, \omega, \varphi$  sono costanti. Essa rappresenta oscillazioni, o vibrazioni, sinusoidali e viene chiamata, con termine mutuato dall'acustica, *armonica elementare*. Il periodo dell'oscillazione è  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , mentre il suo inverso  $\frac{\omega}{2\pi}$  è la *frequenza*, ossia il numero di oscillazioni nell'unità di tempo; il numero  $\omega$  è detto *pulsazione* o *frequenza angolare*. La quantità  $a$  è l'*ampiezza* dell'oscillazione, mentre  $\varphi$  è la *fase* (vedi pag. 357).

Usufruento delle formule di addizione per le funzioni trigonometriche, un'armonica elementare  $a \sin(\omega t + \varphi)$  può essere espressa equivalentemente nella forma:  $\alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$ , con  $\alpha = a \sin \varphi$  e  $\beta = a \cos \varphi$ . Conseguenza di questa rappresentazione è il fatto che la somma di due o più vibrazioni aventi tutte la stessa frequenza è un'altra vibrazione con la medesima frequenza.

Una vibrazione puramente sinusoidale avviene, per esempio, nel caso del suono emesso da un diapason:

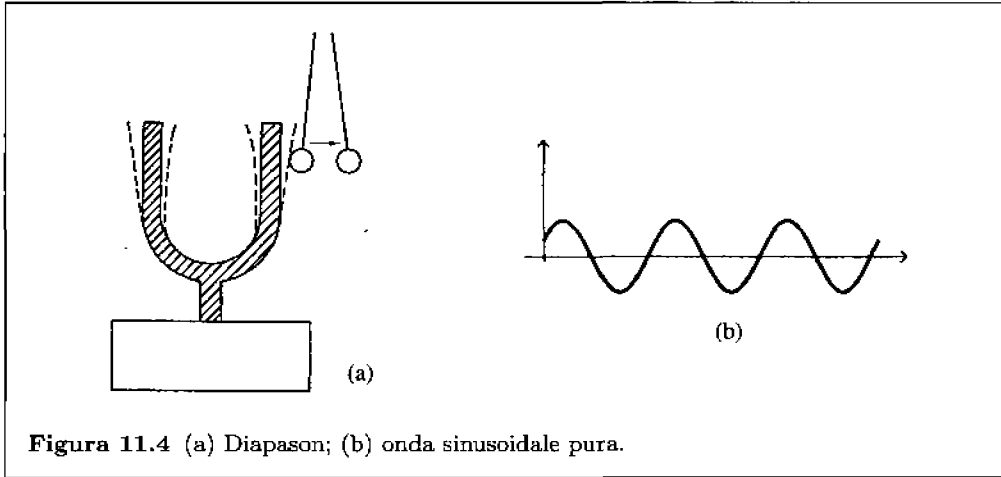


Figura 11.4 (a) Diapason; (b) onda sinusoidale pura.

il tracciato dell'onda si può ottenere facilmente fissando uno spillo su uno dei rebbi del diapason e facendo scorrere al di sotto, con velocità costante, una lastra di vetro affumicata.

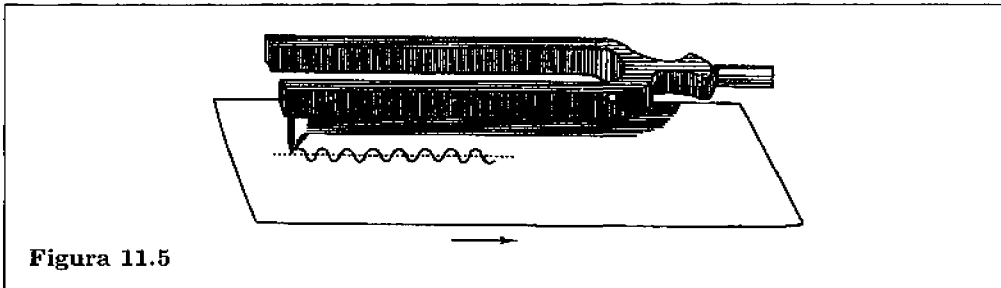
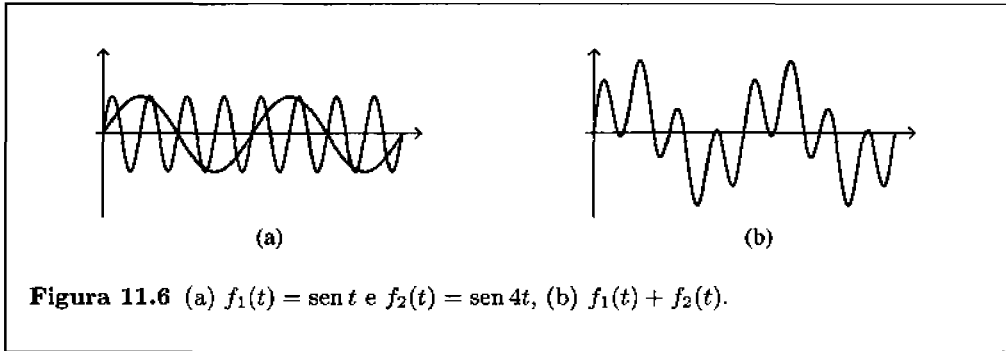


Figura 11.5

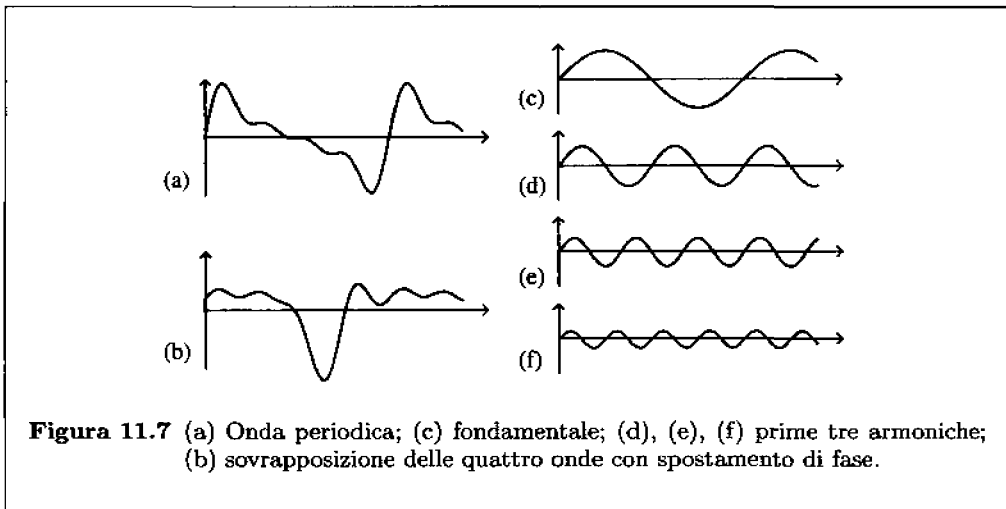
In generale, tuttavia, un fenomeno oscillatorio dà luogo a una sovrapposizione di molte oscillazioni sinusoidali con frequenze diverse; nella Figura 11.6 è rappresentato il grafico delle funzioni  $\sin t$ ,  $\sin 4t$  e quello della loro somma.

Nel seguito di questo paragrafo ci riferiremo al suono, che è un campo di sperimentazione facile e familiare.

Quando con un violino si suona una nota che corrisponde al DO centrale del pianoforte (256 Hz), accanto alla sinusoide con questa frequenza  $f$  si producono altri suoni, di



frequenze  $2f$ ,  $3f$ ,  $4f$ ,  $5f$ ,  $6f \dots$ ; essi corrispondono alle note DO<sup>''</sup>, SOL<sup>''</sup>, DO<sup>'''</sup>, MI<sup>'''</sup>, SOL<sup>'''</sup>, ... Ci possiamo rendere conto di questo fatto sollevando il coperchio del pianoforte e tenendo premuto il pedale, in modo che le corde siano libere di vibrare. Se si produce la stessa nota su un violino (ma va altrettanto bene un flauto dolce oppure la semplice voce, purché potente), si vede che entrano in vibrazione le corde che "corrispondono" alla nota prodotta, che hanno rispettivamente frequenze 256, 512, 767, 1024, 1290, 1534 Hz, e vibrano anche le corde del SI b<sup>'''</sup> (1825 Hz) e del DO<sup>''''</sup> (2048 Hz). Delle varie componenti del suono, quella con frequenza minore (nel nostro caso 256 Hz) si dice *fondamentale*, e le altre si chiamano *prima*, *seconda*, *terza*, ... *armonica*. La Figura 11.7 mostra i grafici della fondamentale e delle prime tre armoniche di una vibrazione che ha il grafico descritto in (a).



Si noti che le ampiezze delle armoniche non uguagliano quella della fondamentale ma decrescono in successione: questo fatto troverà giustificazione più avanti (Corollario 11.10). Le armoniche del DO, vale a dire DO, SOL, DO, MI, SOL, ... , sono "consonanti", e i rapporti fra le loro frequenze molto semplici: essi prendono il nome di "accordi".

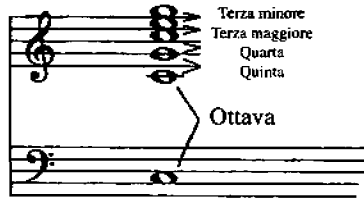


Figura 11.8 Accordi.

Un modo semplice per raffigurare le componenti armoniche di un suono è descritto, nel caso dell'onda (a) della Figura 11.7, nella Figura 11.9: esso si chiama *spetrogramma*.

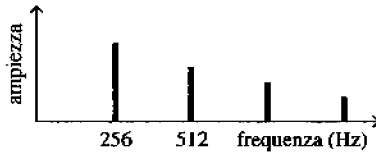


Figura 11.9 Spetrogramma.

Talvolta è più opportuno descrivere lo spettrogramma in un sistema in scala logaritmica: nella Figura 11.10 si è riportato quello relativo a un LA emesso da un clarinetto.

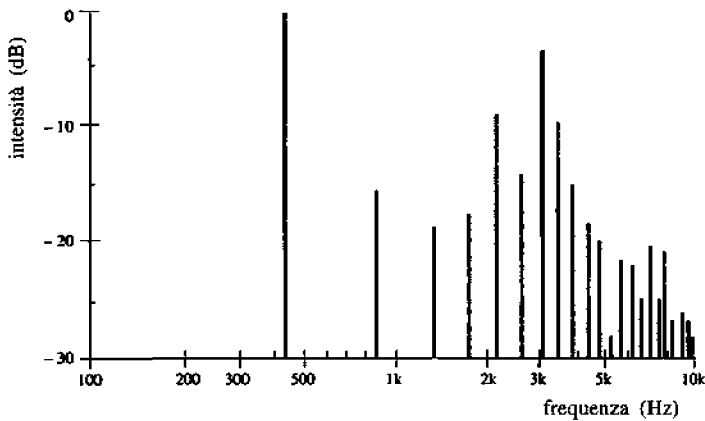


Figura 11.10

Vi è un fenomeno interessante che vale la pena di notare: con riferimento alla Figura 11.7, il grafico della funzione in (a) è dato dalla somma dei grafici delle quattro funzioni a lato. Ora, come si è visto, un'onda "pura" dipende, oltre che dalla ampiezza e dalla frequenza, dalla fase  $\varphi$ : se le armoniche vengono lievemente sfasate l'onda che ne risulta ha un grafico completamente diverso, che è raffigurato in (b); tuttavia il nostro orecchio non percepisce alcuna variazione del suono. Si può pensare che (a) e (b) siano i tracciati di una puntina di un microsolco, in assenza e in presenza di uno spostamento di fase delle armoniche, oppure il tracciato del moto della membrana timpanica: a fronte di tracciati molto diversi, ma costituiti dalle stesse armoniche con le stesse ampiezze e fasi differenti, la percezione acustica è la stessa. Viene voglia di dire che il nostro orecchio (o meglio il nostro cervello), pur non conoscendo l'analisi di Fourier, effettua spontaneamente la scomposizione di un suono nelle sue componenti. Appare allora meno misterioso il fatto che quando si sovrappongono o si susseguono suoni di frequenze che hanno rapporti "semplici", il risultato acustico sia particolarmente gradevole.

Un altro fenomeno interessante è dato dai cosiddetti *battimenti*: se sovrapponiamo due suoni di ampiezze unitarie con frequenze  $\omega_1$  e  $\omega_2$  e, per comodità, uguali fasi, la vibrazione risultante è

$$y = \text{sen } \omega_1 t + \text{sen } \omega_2 t = 2 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t \text{ sen } \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t.$$

Questa vibrazione ha periodo  $\frac{4\pi}{\omega_1 + \omega_2}$  e ampiezza variabile  $2 \cos \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t$ , la quale a sua volta è periodica di periodo  $\frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$  (vedi Figura 8.23).

Supponiamo che le quantità  $\omega_1$  e  $\omega_2$  siano abbastanza grandi se comparate alla differenza  $\omega_1 - \omega_2$ ; allora l'ampiezza della vibrazione varia lentamente e ciclicamente rispetto al periodo della vibrazione: questo cambiamento ritmico di ampiezza prende il nome di battimento (Figura 8.23). Si tratta di un fenomeno tipico delle trasmissioni radio che è a tutti familiare: quando si cerca di sintonizzare una radio su una determinata frequenza, se su una frequenza vicina emette un'altra stazione si percepisce un fastidioso ronzio; lo stesso fenomeno si può riprodurre con la percussione simultanea di due tasti consecutivi sul pianoforte (per esempio, DO, DO#).

## POLINOMI TRIGONOMETRICI

La sovrapposizione di armoniche elementari con frequenze multiple di una fissata frequenza fondamentale, che stabiliamo uguale a  $\frac{1}{2\pi}$ , dà luogo ai *polinomi trigonometrici*: un polinomio trigonometrico di grado  $n$  è dunque una funzione di periodo  $2\pi$  del tipo

$$P(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \text{sen } kt),$$

dove i numeri  $a_k$  e  $b_k$  sono costanti (e in particolare uno almeno fra  $a_n$  e  $b_n$  è non nullo). Scrivendo le armoniche elementari in termini di ampiezza e fase, un polinomio trigonometrico di grado  $n$  può scriversi anche nella forma

$$P(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n \alpha_k \text{sen } (kt + \varphi_k).$$

I polinomi trigonometrici possono essere anche rappresentati in notazione complessa. Ricordando le formule

$$\cos kt = \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2}, \quad \text{sen } kt = \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i},$$

si ottiene facilmente

$$P(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \text{sen } kt) = c_0 + \sum_{k=1}^n (c_k e^{ikt} + c_{-k} e^{-ikt}) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt},$$

dove i numeri  $c_k$  sono dati da

$$c_0 = a_0, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Viceversa, ogni espressione del tipo

$$\sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt}$$

può essere vista come la sovrapposizione di vibrazioni scritte in forma complessa; il risultato di tale sovrapposizione sarà reale anziché complesso se e solo se  $a_k = c_k + c_{-k}$  è reale e  $b_k = i(c_k - c_{-k})$  è immaginario puro; in altre parole, se e solo se  $c_k$  e  $c_{-k}$  sono complessi coniugati.

Dipendendo da  $2n + 1$  costanti libere, i polinomi trigonometrici possono avere grafici estremamente diversificati e in effetti, come vedremo, essi consentono di approssimare, in un senso opportuno, il grafico di qualunque funzione periodica e continua a tratti.

Come abbiamo visto, la famiglia delle armoniche elementari  $\cos nt$  e  $\text{sen } nt$ , divise per opportune costanti, formano un sistema ortonormale rispetto al prodotto scalare definito dalla (11.2). Consideriamo allora il sottospazio  $(2n + 1)$ -dimensionale  $\mathcal{P}_n$  dei polinomi trigonometrici di grado non superiore a  $n$ : data una funzione  $f$  appartenente a  $C_{2\pi}$ , cioè periodica di periodo  $2\pi$ , continua a tratti e regolarizzata, calcoliamo la "proiezione ortogonale" di  $f$  sul sottospazio  $\mathcal{P}_n$ , ossia il polinomio trigonometrico di grado non superiore a  $n$  che ha distanza minima da  $f$  nel senso della (11.5). Vale la seguente

**PROPOSIZIONE 11.1** Sia  $f \in C_{2\pi}$ , e sia  $S_n(f)$  l'elemento di  $\mathcal{P}_n$  così definito:

$$[S_n(f)](t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kt + b_k \text{sen } kt), \quad (11.6)$$

ove i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  sono dati da

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (11.7)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \text{sen } kt \, dt, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11.8)$$

Allora la funzione  $f - S_n(f)$  è ortogonale a ogni elemento di  $\mathcal{P}_n$ ; inoltre  $S_n(f)$  è l'unico elemento  $P$  di  $\mathcal{P}_n$  tale che  $f - P$  abbia tale proprietà. Infine

$$\|f - S_n(f)\|_2^2 = \int_0^{2\pi} f(t)^2 dt - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) = \min_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_2^2. \quad (11.9)$$

Nella (11.6) abbiamo scritto  $\frac{a_0}{2}$  in luogo di  $a_0$  con il solo scopo di rendere la formula (11.7) valida per tutti i valori di  $k$ , compreso  $k = 0$ .

**DIMOSTRAZIONE** Per provare che  $f - S_n(f)$  è ortogonale a tutti gli elementi di  $\mathcal{P}_n$  è sufficiente mostrare che per  $k \leq n$  si ha

$$(f - S_n(f) | \cos kt) = 0, \quad (f - S_n(f) | \sin kt) = 0,$$

ossia

$$\pi a_k = (f | \cos kt) = (S_n(f) | \cos kt), \quad \pi b_k = (f | \sin kt) = (S_n(f) | \sin kt),$$

e questo segue subito dalla definizione di  $S_n(f)$  e dalla mutua ortogonalità delle armoniche elementari.

Se poi  $P$  è un altro elemento di  $\mathcal{P}_n$  tale che  $f - P$  è ortogonale a tutti gli elementi di  $\mathcal{P}_n$ , allora in particolare per  $k \leq n$  deve essere

$$(f - P | \cos kt) = 0, \quad (f - P | \sin kt) = 0,$$

e ciò implica  $P(t) = [S_n(f)](t)$ .

Per provare la (11.9), osserviamo che  $f - S_n(f)$  è, per quanto visto, ortogonale a  $S_n(f)$ ; quindi

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_2^2 &= (f - S_n(f) | f - S_n(f)) = \\ &= (f | f - S_n(f)) - (S_n(f) | f - S_n(f)) = (f | f - S_n(f)) = \\ &= \|f\|_2^2 - (f | S_n(f)); \end{aligned}$$

d'altra parte con un calcolo esplicito si trova

$$(f | S_n(f)) = \int_0^{2\pi} f(t)[S_n(f)](t) dt = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2),$$

e da qui segue subito la prima parte della (11.9).

Infine, se  $P$  è un elemento di  $\mathcal{P}_n$  diverso da  $S_n(f)$ , allora  $P - S_n(f)$  appartiene a  $\mathcal{P}_n$ ; dalla mutua ortogonalità di  $f - S_n(f)$  e  $P - S_n(f)$  segue allora

$$\begin{aligned} \|f - P\|_2^2 &= \|(f - S_n(f)) - (P - S_n(f))\|_2^2 = \\ &= \|f - S_n(f)\|_2^2 + \|P - S_n(f)\|_2^2 - 2(f - S_n(f) | P - S_n(f)) = \\ &= \|f - S_n(f)\|_2^2 + \|P - S_n(f)\|_2^2 > \|f - S_n(f)\|_2^2, \end{aligned}$$

e ciò conclude la dimostrazione.  $\square$

**OSSERVAZIONE 11.2** Utilizzando la notazione complessa, il polinomio trigonometrico  $S_n(f)$  prende la forma

$$[S_n(f)](t) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikt},$$

con i coefficienti  $c_k$  dati da

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Dalla proposizione precedente segue che, data una funzione  $f \in C_{2\pi}$ ,  $S_n(f)$  è il polinomio trigonometrico di grado non superiore a  $n$  che meglio approssima  $f$  a rispetto alla norma quadratica. Notiamo anche che, al crescere di  $n$ , il polinomio  $S_n(f)$  vede nuovi termini aggiungersi ai vecchi senza che questi ultimi si modifichino. È naturale chiedersi a questo punto se, e in quale senso, risulti

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad (11.10)$$

con i numeri  $a_k$  e  $b_k$  forniti dalle (11.7) e (11.8). La serie a secondo membro della (11.10), con i coefficienti  $a_k$  e  $b_k$  sopra specificati, si chiama *serie di Fourier* di  $f$ ; i numeri  $a_k$  e  $b_k$  si dicono *coefficienti di Fourier* di  $f$ .

**OSSERVAZIONE 11.3 (a)** Si noti che in generale la serie di Fourier di  $f$  può non convergere affatto o anche convergere a una somma diversa da  $f(t)$ . Vedremo nel prossimo paragrafo alcune condizioni sufficienti per la convergenza.

**(b)** Poiché la modifica di una funzione di  $C_{2\pi}$  in un numero finito di punti non incide sul calcolo dei suoi coefficienti di Fourier  $a_k$  e  $b_k$ , possiamo definire la serie di Fourier per una funzione periodica di periodo  $2\pi$  e continua a tratti, anche se non regolarizzata: la sua serie di Fourier sarà identica a quella della corrispondente funzione regolarizzata.

## CONVERGENZA DELLE SERIE DI FOURIER

Sia  $f$  una funzione continua a tratti e periodica di periodo  $2\pi$ . Per come è stata costruita la serie di Fourier di  $f$ , in particolare per la proprietà (11.9), possiamo attenderci che essa converga a  $f$  in norma quadratica, ossia che  $\|S_n(f) - f\|_2 \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ . In effetti è proprio così:

**TEOREMA 11.4** Se  $f$  è una funzione continua a tratti e periodica di periodo  $2\pi$ , allora la serie di Fourier di  $f$  converge a  $f$  in norma quadratica, ossia

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} |f(t) - [S_n(f)](t)|^2 dt = 0.$$

Ma vi sono altri tipi di convergenza che sono validi in presenza di opportune condizioni sulla  $f$ . Anzitutto, sotto ipotesi abbastanza blande la serie di Fourier converge in tutti i punti, ossia vale un risultato di “convergenza puntuale”:



**TEOREMA 11.5** Sia  $f$  una funzione continua a tratti, periodica di periodo  $2\pi$  e tale che in ogni punto  $t_0 \in [0, 2\pi]$  esistano finiti i limiti

$$f'(t_0^+) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0^+)}{t - t_0}, \quad f'(t_0^-) = \lim_{t \rightarrow t_0^-} \frac{f(t) - f(t_0^-)}{t - t_0},$$

i quali si chiamano *derivata destra* e *derivata sinistra* di  $f$  in  $t_0$ . Allora la serie di Fourier di  $f$  converge in ogni punto  $t_0$  e si ha:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) = \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2}.$$

Osserviamo che se nel Teorema 11.5  $f$  è regolarizzata, la somma della sua serie di Fourier è precisamente  $f(t)$  in ogni punto.

Vi è poi un altro tipo di convergenza più forte, molto importante nelle applicazioni: la convergenza uniforme, che sarà oggetto di un paragrafo successivo.

Prima di accennare alla dimostrazione dei risultati sopra enunciati, vediamo qualche esempio di serie di Fourier di funzioni di  $C_{2\pi}$ . Osserviamo per cominciare che se  $f$  è una funzione pari, allora i suoi coefficienti di Fourier  $b_k$  sono tutti nulli: infatti

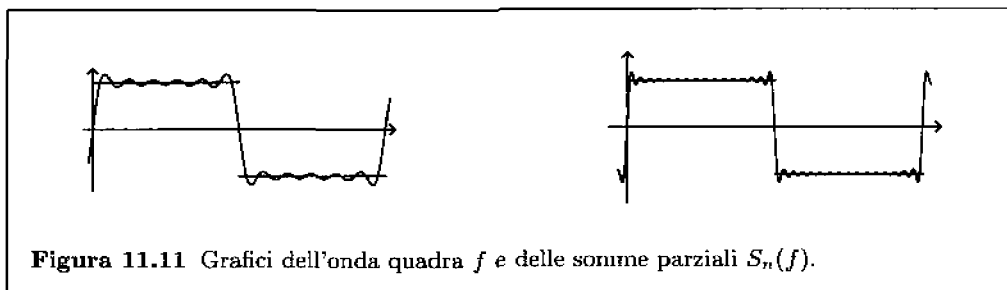
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \, dt = 0,$$

essendo l'integrale di una funzione dispari su un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Di conseguenza la serie di Fourier di  $f$  è della forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt.$$

Similmente, se  $f$  è una funzione dispari, allora sono nulli tutti gli  $a_k$  e quindi la serie di Fourier di  $f$  è del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt.$$



**Figura 11.11** Grafici dell'onda quadra  $f$  e delle somme parziali  $S_n(f)$ .

**ESEMPIO 11.6** Sia  $f(t)$  la funzione periodica di periodo  $2\pi$  definita da

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{se } -\pi < t < 0, \\ 0 & \text{se } t = -\pi, 0, \pi, \\ 1 & \text{se } 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Questa funzione è regolare a tratti e prende il nome di onda quadra. Poiché  $f$  è dispari, i coefficienti  $a_k$  sono nulli; inoltre

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} kt \, dt = \frac{2(1 - \cos k\pi)}{k\pi}. \end{aligned}$$

Dunque  $b_k = 0$  se  $k$  è pari; se invece  $k$  è dispari,  $k = 2m + 1$ , si ha

$$b_k = b_{2m+1} = \frac{4}{\pi(2m+1)},$$

cosicché la serie di Fourier di  $f$  è

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \operatorname{sen} (2m+1)t.$$

Per il Teorema 11.5, la somma di questa serie è  $f(t)$  in ogni punto; per esempio, per  $t = \frac{\pi}{2}$  si ritrova il noto risultato

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

**ESEMPIO 11.7** Consideriamo il prolungamento periodico di periodo  $2\pi$  della funzione

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t}{2} & \text{se } t \in ]-\pi, \pi[, \\ 0 & \text{se } t = \pm\pi. \end{cases}$$

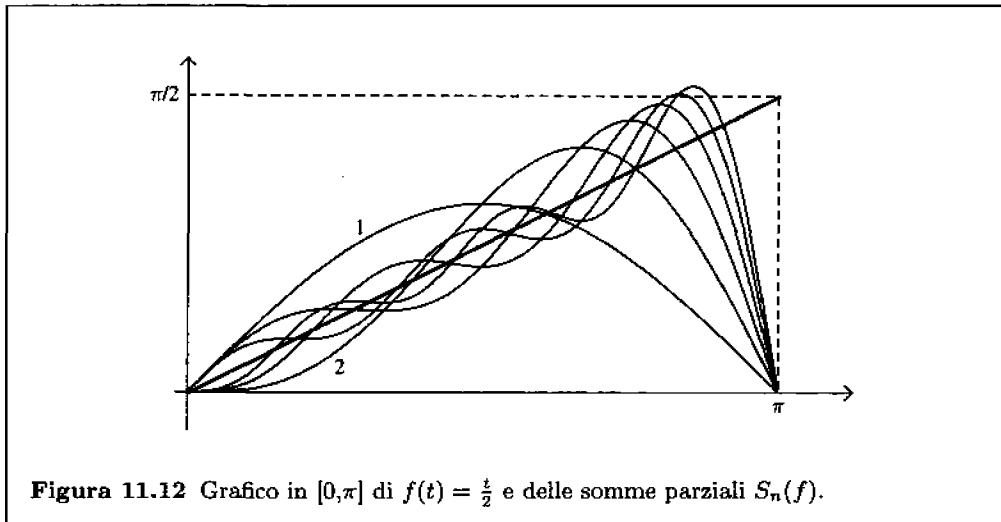
Questa funzione, che denotiamo ancora con  $f(t)$ , è regolare a tratti. Inoltre è dispari e quindi i coefficienti  $a_k$  sono nulli; per  $b_k$  si ha, con una integrazione per parti,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{t}{2} \operatorname{sen} kt \, dt = \frac{2}{k\pi} [-t \cos kt]_0^{\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos kt \, dt = -\frac{(-1)^k}{k}.$$

Pertanto la serie di Fourier di  $f$  è

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \operatorname{sen} kt$$

e per il Teorema 11.5 la sua somma è  $f(t)$  in ogni punto. Si noti che la convergenza non è assoluta: per esempio per  $t = \frac{\pi}{2}$  la serie dei valori assoluti è  $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{2}{2m+1}$ , che è divergente.

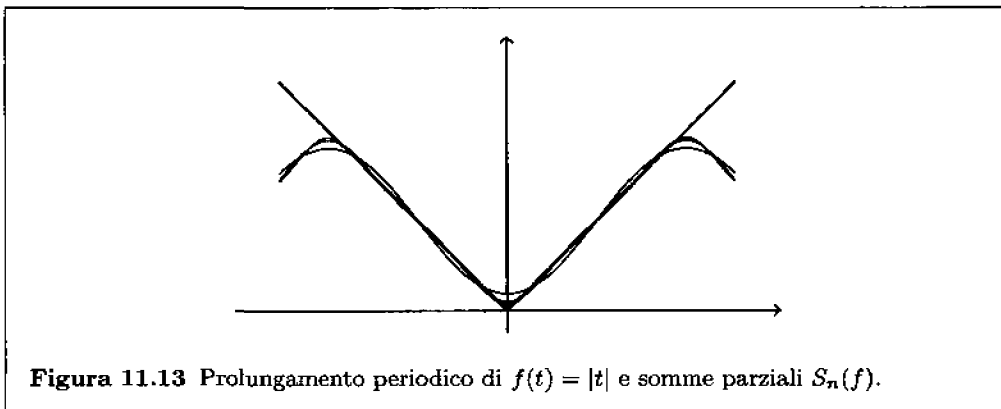


**ESEMPIO 11.8** La funzione  $f(t) = |t|$ , ristretta a  $[-\pi, \pi]$  e prolungata per periodicità, è continua e regolare a tratti. Essa è pari e quindi i coefficienti  $b_k$  sono nulli. Gli  $a_k$  sono dati, come è facile verificare, da

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos kt \, dt = \begin{cases} 0 & \text{se } k \text{ è pari e non nullo,} \\ -2/k^2 & \text{se } k \text{ è dispari,} \\ \pi & \text{se } k = 0. \end{cases}$$

Di conseguenza, per il Teorema 11.5,

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \cos(2m+1)t.$$



In particolare, scelto  $t = 0$ , si deduce l'interessante formula

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8};$$

da qui, osservato che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m)^2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8},$$

segue l'importante risultato (già dimostrato da Eulero in modo non propriamente ortodosso)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Accenniamo adesso alla dimostrazione del Teorema 11.4.

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 11.4** Il nocciolo di questa dimostrazione consiste nel costruire un polinomio trigonometrico  $Q_n(t)$  di grado  $n$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - Q_n\|_2 = 0;$$

infatti da questo fatto e dalla (11.9) segue che

$$\|f - S_n(f)\|_2 \leq \|f - Q_n\|_2 \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Un modo per costruire il polinomio  $Q_n$  è il seguente: si definisce

$$Q_n(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(s) P_n(t-s) ds,$$

dove

$$P_n(t) = \lambda_n \left( \frac{1 + \cos t}{2} \right)^n,$$

con  $\lambda_n$  costante opportuna, scelta in modo che  $\int_{-\pi}^{\pi} P_n(t) dt = 1$ . Si noti che  $P_n$  è un polinomio trigonometrico non negativo in ogni punto, e di grado  $n$  (in virtù delle formule trigonometriche che legano le potenze  $k$ -esime di  $\cos t$  e  $\sin t$  alle quantità  $\cos kt$  e  $\sin kt$ ).

A questo punto occorre verificare che  $Q_n$  è un polinomio trigonometrico di grado  $n$ , il che è conseguenza delle formule di addizione per seno e coseno, e che  $Q_n$  converge a  $f$  in norma quadratica, il che segue da un paziente calcolo esplicito che omettiamo.  $\square$

Concludiamo il paragrafo illustrando alcune importanti conseguenze del Teorema 11.4.

**COROLLARIO 11.9 (Identità di Bessel)** Sia  $f$  periodica di periodo  $2\pi$  e continua a tratti, e sia

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

la sua serie di Fourier. Allora si ha

$$\int_0^{2\pi} f(t)^2 dt = \frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2).$$

**DIMOSTRAZIONE** È sufficiente passare al limite nella (11.9) ricordando che, per il Teorema 11.4,  $\|S_n(f) - f\|_2^2 \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

**COROLLARIO 11.10** (*Lemma di Riemann-Lebesgue*) Sia  $f$  periodica di periodo  $2\pi$  e continua a tratti, e siano  $a_k$  e  $b_k$  i suoi coefficienti di Fourier. Allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$

**DIMOSTRAZIONE** Basta osservare che, per il Corollario 11.9, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

è convergente.  $\square$

**COROLLARIO 11.11** (*Principio di identità delle serie di Fourier*) Se  $f, g$  sono due funzioni periodiche di periodo  $2\pi$ , continue a tratti e regolarizzate, che hanno gli stessi coefficienti di Fourier, allora esse coincidono.

**DIMOSTRAZIONE** La differenza  $f - g$  è continua a tratti e regolarizzata; essa ha tutti i coefficienti di Fourier nulli. Per l'identità di Bessel, si deduce  $\|f - g\|_2 = 0$ , e dunque  $f = g$ .  $\square$

## ESERCIZI

**11.1.1** Scrivere la serie di Fourier delle seguenti funzioni definite su  $[-\pi, \pi]$ :

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad f(t) &= t^2, & \text{(b)} \quad f(t) &= e^t, & \text{(c)} \quad f(t) &= e^{-t}, \\ \text{(d)} \quad f(t) &= \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sgn}(t)), & \text{(e)} \quad f(t) &= \pi - |t|, & \text{(f)} \quad f(t) &= \frac{t + |t|}{2}, \\ \text{(g)} \quad f(t) &= |\operatorname{sen} t|, & \text{(h)} \quad f(t) &= |\cos t|, & \text{(i)} \quad f(t) &= \operatorname{sen} \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

**11.1.2** Scrivere le serie di Fourier delle funzioni

$$f(t) = \operatorname{sen} at, \quad g(t) = \cos at, \quad t \in [-\pi, \pi],$$

ove  $a$  è un numero reale non intero.

**11.1.3** Utilizzando le serie di Fourier delle funzioni  $t^2$  e  $t^3$ , calcolare le somme delle serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$

**11.1.4** Calcolare per  $t \in ]0, \pi[$  la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} kt}{k}.$$

**11.1.5** Fissato  $T > 0$ , sia  $f$  continua a tratti in  $[0, \frac{T}{2}]$  e siano  $f_p$  e  $f_d$  i prolungamenti pari e dispari di  $f$  all'intervallo  $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ . Si scrivano le serie di Fourier di

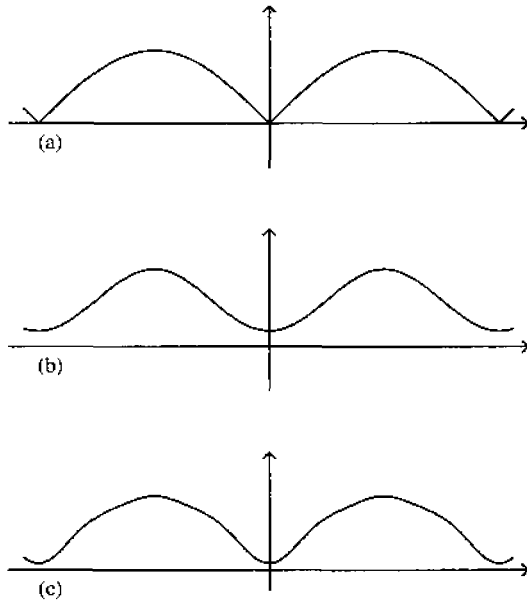


Figura 11.14 (a)  $f(t) = |\text{sen } t|$ , (b), (c) somme parziali della serie di Fourier di  $f$  di indici  $n = 1$  e  $n = 3$ .

$f_p$  e  $f_d$  rispetto al sistema  $\left\{1, \cos \frac{2\pi nt}{T}, \text{sen } \frac{2\pi nt}{T}\right\}$ , e quella di  $f$  rispetto al sistema  $\left\{1, \cos \frac{4\pi nt}{T}, \text{sen } \frac{4\pi nt}{T}\right\}$ . In quale senso le somme parziali delle tre serie soddisfano la proprietà espressa dalla (11.9)?

11.1.6 Scrivere la serie di Fourier della funzione

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{1}{4} + \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 & \text{se } t \in [-1, 0[, \\ \frac{1}{4} - \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 & \text{se } t \in [0, 1] \end{cases}$$

relativa al sistema  $\{1, \cos \pi nt, \text{sen } \pi nt\}$ , e dedurre che

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

11.1.7 Sia  $f$  periodica di periodo  $2\pi$  e derivabile  $m$  volte, con  $f^{(m)}$  continua a tratti. Si provi che

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{2m} (a_k^2 + b_k^2) < \infty.$$

**11.1.8** Siano  $f, g \in C_{2\pi}$ , e siano  $a_k, b_k$  e  $\alpha_k, \beta_k$  i rispettivi coefficienti di Fourier. Si dimostri l'identità di Parseval

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt = \frac{a_0\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\alpha_k + b_k\beta_k).$$

[Si applichi l'identità di Bessel a  $f + g$  e  $f - g$ .]

## 11.2 Convergenza uniforme

La convergenza puntuale per successioni e serie di funzioni è una nozione troppo debole per mantenere nel passaggio al limite certe proprietà matematicamente interessanti: per esempio, il limite puntuale di una successione di funzioni continue è in generale una funzione discontinua. La convergenza uniforme, più restrittiva della puntuale, garantisce invece la stabilità di molte proprietà e questo è il motivo della sua importanza applicativa.

**DEFINIZIONE 11.12** Siano  $f_n$  e  $f$  funzioni definite su un intervallo  $I$ . Diciamo che la successione  $\{f_n\}$  converge uniformemente a  $f$  in  $I$  se risulta

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| = 0,$$

ossia se comunque si fissi  $\varepsilon > 0$  esiste un numero naturale  $\nu$  tale che

$$|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

per ogni  $n \geq \nu$  e per ogni punto  $t$  dell'intervallo  $I$ .

**OSSERVAZIONE 11.13 (a)** La differenza fra convergenza puntuale e convergenza uniforme sta nel fatto che l'indice  $\nu$ , cioè la soglia a partire dalla quale  $|f_n(t) - f(t)|$  è piccola, va a dipendere solo da  $\varepsilon$ , e non anche dal punto  $t$ : dunque vi è un'unica soglia  $\nu$  che, per un dato  $\varepsilon$ , è efficace per tutti i punti di  $I$ . In particolare, la condizione che si richiede è più restrittiva di quella della convergenza puntuale: la convergenza uniforme implica la puntuale e il viceversa è falso.

(b) Affinché  $f_n$  converga uniformemente a  $f$  in  $I$  occorre e basta che per ogni  $\varepsilon > 0$  i grafici delle  $f_n$  siano contenuti definitivamente nella striscia di larghezza  $\varepsilon$  intorno al grafico di  $f$ , cioè nell'insieme  $\{(t, y) : t \in I, |y - f(t)| < \varepsilon\}$  (Figura 11.15).

(c) Nel caso di una serie di funzioni  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$ , la convergenza uniforme si esprime dicendo che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} \left| \sum_{n=N}^{\infty} f_n(t) \right| = 0.$$

(d) Si verifica facilmente che la quantità  $\sup_{t \in I} |f(t)|$  è una norma nello spazio delle funzioni continue e limitate su  $I$ ; essa si denota usualmente con  $\|f\|_{\infty}$ . Quindi la convergenza uniforme di  $f_n$  a  $f$  si può esprimere dicendo che  $\|f_n - f\|_{\infty} \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ .

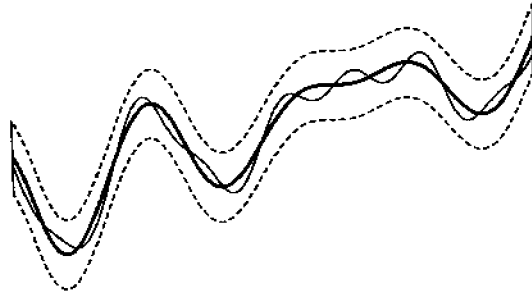


Figura 11.15 Convergenza uniforme.

**ESEMPI 11.14** (a) Si considerino in  $[0,1]$  le funzioni  $f_n(t) = t^n$ . Si ha, fissato  $t \in [0,1]$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = 0;$$

Quindi  $f_n$  converge puntualmente alla funzione  $f(t) = 0$ . Però la convergenza non è uniforme in  $[0,1]$ : fissato  $\varepsilon \in (0,1)$ , è impossibile trovare un intero positivo  $\nu$  tale che si abbia  $t^\nu = t^\nu - 0 < \varepsilon$  per tutti i punti  $t \in [0,1]$ , poiché, se così fosse, per  $t \rightarrow 1^+$  ciò implicherebbe  $1 \leq \varepsilon$ . Si osservi, tuttavia, che  $f_n$  converge uniformemente a 0 in ogni intervallo  $[0,a]$  con  $a < 1$ , in quanto per tali intervalli risulta

$$\sup_{t \in [0,a]} t^n = a^n \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Osserviamo anche che  $f_n \rightarrow 0$  in norma quadratica nell'intervallo  $[0,1]$ , poiché

$$\|f_n\|_2^2 = \int_0^1 t^{2n} dt = \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

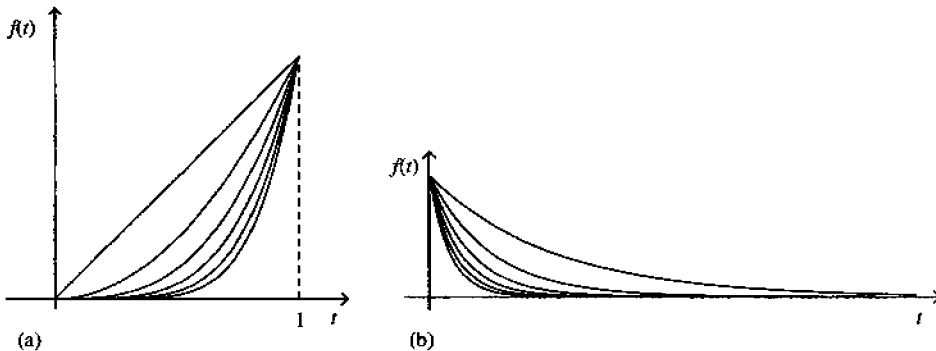


Figura 11.16 (a)  $f(t) = t^n$ , (b)  $f(t) = e^{-nt}$ , per  $n = 1,2,3,4,5,6$ .



(b) Poniamo per  $t > 0$   $f_n(t) = e^{-nt}$ . Allora  $f_n$  converge puntualmente in  $(0, \infty)$  alla funzione  $f(t) = 0$ . La convergenza non è uniforme in  $(0, \infty)$  perché per ogni intero  $n$  si ha

$$\sup_{t>0} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t>0} e^{-nt} = 1;$$

però si ha convergenza uniforme in ogni semiretta del tipo  $[a, \infty)$  con  $a > 0$ , essendo

$$\sup_{t \geq a} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t \geq a} e^{-nt} = e^{-na} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

(c) Nell'intervallo  $(0, \infty)$  consideriamo le funzioni  $f_n(t) = \min\{1/t, n\}$  e  $g_n(t) = \frac{n+t}{nt}$ . Entrambe le successioni  $\{f_n\}$  e  $\{g_n\}$  convergono puntualmente in  $(0, \infty)$  alla funzione  $f(t) = 1/t$ , però la convergenza è uniforme per le  $g_n$  e non lo è per le  $f_n$ . Infatti

$$\sup_{t>0} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{0 < t \leq 1/n} \left| \frac{1}{t} - n \right| = +\infty,$$

mentre

$$\sup_{t>0} |g_n(t) - f(t)| = \sup_{t>0} \frac{1}{n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow \infty.$$

Gli esempi precedenti mostrano che la convergenza uniforme può aver luogo, o meno, a seconda di come si sceglie l'insieme di definizione delle  $f_n$ . In genere quindi, data una successione di funzioni definite in  $I$ , ci si chiederà in quali sottoinsiemi di  $I$  si ha convergenza uniforme. Il motivo di questo tipo di richieste sta nel fatto che, a differenza della convergenza puntuale, la convergenza uniforme preserva diverse proprietà delle funzioni quali la continuità, l'integrabilità e, in un senso opportuno, la derivabilità.

Osserviamo che la convergenza uniforme in un intervallo *limitato* implica, oltre che la convergenza puntuale, anche la convergenza in norma quadratica: infatti se  $I$  è limitato e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $I$ , allora

$$\|f_n - f\|_2 \leq \sup_{t \in I} |f_n(t) - f(t)| \cdot m(I)$$

e quindi  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$  per  $n \rightarrow \infty$ . Il viceversa è falso, come mostra l'Esempio 11.14 (a).

**PROPOSIZIONE 11.15** Siano  $f_n$  funzioni definite su un intervallo  $I$  e convergenti uniformemente in  $I$  a una funzione  $f$ .

- (i) Se le  $f_n$  sono continue, anche  $f$  è continua.
- (ii) Se  $I$  è limitato e le  $f_n$  sono continue, allora  $f$  è integrabile e

$$\int_I f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(t) dt.$$

- (iii) Se le  $f_n$  sono di classe  $C^1$ , e le  $f'_n$  convergono uniformemente in  $I$  a una funzione  $g$ , allora  $f$  è di classe  $C^1$  e  $f' = g$ .

DIMOSTRAZIONE (i) Fissato  $t_0 \in I$ , dimostriamo che  $f$  è continua in  $t_0$ . Sia  $\varepsilon > 0$ : se  $\nu$  è un indice tale che  $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \nu$  e per ogni  $t \in I$ , possiamo scrivere, scelto  $n = \nu$ ,

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &\leq |f(t) - f_\nu(t)| + |f_\nu(t) - f_\nu(t_0)| + |f_\nu(t_0) - f(t_0)| \leq \\ &\leq \varepsilon + |f_\nu(t) - f_\nu(t_0)| + \varepsilon; \end{aligned}$$

d'altra parte, per la continuità di  $f_\nu$  nel punto  $t_0$ , esiste  $\delta > 0$  tale che  $|f_\nu(t) - f_\nu(t_0)| < \varepsilon$  per  $|t - t_0| < \delta$ . Ne segue

$$|f(t) - f(t_0)| < 3\varepsilon \quad \text{per } |t - t_0| < \delta$$

e ciò prova che  $f$  è continua in  $t_0$ .

(ii) Sia  $I$  limitato. La funzione  $f$  è certamente integrabile su  $I$  in quanto, per (i), è continua. Fissato  $\varepsilon > 0$  e scelto un indice  $\nu$  tale che  $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$  per ogni  $n \geq \nu$  e per ogni  $t \in I$ , possiamo dunque scrivere

$$\left| \int_I f(t) dt - \int_I f_n(t) dt \right| \leq \int_I |f(t) - f_n(t)| dt \leq \int_I \varepsilon dt = \varepsilon m(I).$$

Ne segue la tesi.

(iii) Per ogni  $n$  e per ogni  $t, t_0 \in I$  si ha

$$f_n(t) - f_n(t_0) = \int_{t_0}^t f'_n(\tau) d\tau;$$

passando al limite per  $n \rightarrow \infty$ , usufruendo di (ii) si ottiene

$$f(t) - f(t_0) = \int_{t_0}^t g(\tau) d\tau.$$

Se ne deduce, per  $t \rightarrow t_0$ , che  $f$  è derivabile in  $t_0$  con  $f'(t_0) = g(t_0)$ ; essendo  $g$  continua in  $I$  in virtù di (i), si conclude che  $f$  è di classe  $C^1$ .  $\square$

Vediamo ora qualche condizione che assicuri la convergenza uniforme delle serie di Fourier. Poiché le somme parziali  $S_n(f)$  sono funzioni continue, se  $f$  è discontinua in un punto non possiamo sperare che la convergenza della sua serie di Fourier sia uniforme; d'altra parte, la sola continuità della  $f$  non garantisce la convergenza uniforme della serie di Fourier (vi sono esempi contrari al riguardo, anche se alquanto complicati). Occorrerà dunque aggiungere alla continuità di  $f$  qualche ulteriore condizione. Noi ci limiteremo a considerare funzioni  $f$  regolari a tratti: ricordiamo che ciò significa che  $f$  è continua in ogni punto e derivabile in tutti i punti salvo un numero finito, e che  $f'$  è una funzione continua a tratti.

Si osservi che se  $f$  è periodica di periodo  $2\pi$  e regolare a tratti, allora la derivata  $f'$ , opportunamente regolarizzata, appartiene a  $C_{2\pi}$ . Inoltre si può verificare che se

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

sono le serie di Fourier di  $f$  e di  $f'$  rispettivamente, allora risulta

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_k = kb_k, \quad \beta_k = -ka_k$$

per ogni intero  $k$ . Infatti

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) dt = \frac{f(2\pi) - f(0)}{\pi} = 0,$$

e se  $k \geq 1$ , integrando per parti,

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) \cos kt dt = \frac{1}{\pi} [f(t) \cos kt]_0^{2\pi} - \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt dt = kb_k.$$

L'identità relativa ai  $\beta_k$  si prova in modo analogo.

Da queste relazioni segue facilmente:

**TEOREMA 11.16** Sia  $f$  periodica di periodo  $2\pi$  e regolare a tratti. Allora la sua serie di Fourier converge uniformemente a  $f$ .

**DIMOSTRAZIONE** Dato che  $f$  verifica le ipotesi del Teorema 11.5 ed è continua, sappiamo già che la somma della sua serie di Fourier è  $f(t)$  in ogni punto. Dobbiamo verificare che

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |[S_n(f)](t) - f(t)| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right|$$

è infinitesimo per  $n \rightarrow \infty$ . Applicando alla funzione  $f'$ , che appartiene a  $C_{2\pi}$ , il Corollario 11.9, deduciamo che la serie  $\sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2)$  è convergente. Quindi possiamo scrivere, utilizzando la disuguaglianza di Schwarz,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \right| &\leq \sup_{t \in \mathbb{R}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \sqrt{k^2(a_k^2 + b_k^2)} \cdot \sqrt{\frac{1}{k^2}(\cos^2 kt + \sin^2 kt)} \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2)} \cdot \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}, \end{aligned}$$

e l'ultimo membro è infinitesimo per  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Più in generale si può dimostrare che se  $f$  è una funzione di  $C_{2\pi}$  che è regolare a tratti in un intervallo  $(a, b)$ , allora la serie di Fourier di  $f$  converge uniformemente a  $f$  in ogni sottointervallo chiuso di  $(a, b)$ . Per esempio, questo risultato si applica all'onda quadra dell'Esempio 11.6, la cui serie di Fourier, pertanto, converge uniformemente in ogni intervallo chiuso della forma  $[\varepsilon, \pi - \varepsilon]$ .

## ESERCIZI

- 11.2.1** Si verifichi che se  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $I$  e  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $J$ , allora  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $I \cup J$ .
- 11.2.2** Supponiamo che  $f_n \rightarrow f$  uniformemente in  $I$ . Si provi che se  $\{t_n\}$  è una successione di punti di  $I$  tale che  $t_n \rightarrow t$ , con  $t \in I$ , allora  $f_n(t_n) \rightarrow f(t)$ .
- 11.2.3** Si provi che la limitatezza è una proprietà stabile per la convergenza uniforme, cioè che se  $\{f_n\}$  è una successione di funzioni limitate in  $I$  che converge uniformemente a  $f$  in  $I$ , allora  $f$  è limitata in  $I$ . Si mostri che ciò è in generale falso se la convergenza è solo puntuale.

11.2.4 Si dice che una serie di funzioni  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)$  converge *totalmente* in un intervallo

$I$  se  $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{t \in I} |f_n(t)|$  è una serie convergente. Si verifichi che la convergenza totale implica la convergenza uniforme.

11.2.5 Si consideri la serie logaritmica  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}$ . Si determini in quali intervalli

$I$  si ha:

- (a) convergenza puntuale,
- (b) convergenza assoluta,
- (c) convergenza uniforme,
- (d) convergenza totale.

11.2.6 Calcolare la somma delle seguenti serie per  $a \in (-1, 1)$  e  $t \in \mathbb{R}$ :

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{\infty} na^n \cos nt, \quad \sum_{n=1}^{\infty} na^n \sin nt;$$

$$(b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \cos nt, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} \sin nt.$$

11.2.7 Discutere il comportamento per  $n \rightarrow \infty$  delle seguenti successioni di funzioni:

$$(a) f_n(t) = n \sin \frac{t}{n}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (b) f_n(t) = \left(1 - \cos \frac{t}{n}\right)^n, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$(c) f_n(t) = nt^2 e^{-nt}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (d) f_n(t) = \frac{e^{\frac{\cos nt - 1}{n}}}{n}, \quad t \in \mathbb{R};$$

$$(e) f_n(t) = (t^2 - t)^n, \quad t \in \mathbb{R}; \quad (f) f_n(t) = \frac{nt^2}{n^2 + t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

11.2.8 Siano  $f, g \in C_{2\pi}$  e poniamo

$$F(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-s)g(s) ds, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

(La funzione  $F$  è detta *convoluzione* fra  $f$  e  $g$ .)

Si determini il legame fra i coefficienti di Fourier di  $F$  e quelli di  $f$  e  $g$ ; si deduca che la serie di Fourier di  $F$  converge uniformemente in  $[-\pi, \pi]$ .

11.2.9 Si provi che se  $f \in C_{2\pi}$ , allora per ogni  $[a, b] \subseteq [-\pi, \pi]$  si ha

$$\int_a^b f(t) dt = \frac{a_0}{2}(b-a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \int_a^b \cos kt dt + b_k \int_a^b \sin kt dt \right).$$

Si osservi che non si fa alcuna ipotesi sulla convergenza puntuale della serie di Fourier di  $f$ .

[Calcolare la serie di Fourier di  $F(t) = \int_{-\pi}^t [f(s) - \frac{a_0}{2}] ds$  e mostrare che essa converge uniformemente in  $\mathbb{R}$ ; dedurre la tesi usando la Proposizione 11.15(iii).]

**11.2.10**

(a) Provare che 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left[ \frac{\text{sen} \left( n + \frac{1}{2} \right) t}{2 \text{sen} \frac{t}{2}} - \frac{\text{sen} nt}{t} \right] dt = 0.$$

(b) Dedurre che 
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{\text{sen} t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{n\pi} \frac{\text{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

## PROPRIETÀ DEI NUMERI REALI

Una discussione soddisfacente dei concetti fondamentali dell'analisi matematica (convergenza, continuità, derivabilità, ...) necessiterebbe di una definizione accurata della nozione di numero reale. Non riteniamo però opportuno in questo libro entrare nella delicata questione di descrivere gli assiomi che riguardano i numeri interi, i numeri razionali, i numeri reali. Ciò sia nella convinzione che a una piena comprensione di questa problematica si pervenga sovente solo dopo aver acquisito notevole dimestichezza con strumenti matematici avanzati, sia nella certezza che con i numeri si possa ben operare anche senza conoscerne una loro definizione formale. Del resto una tale definizione, per ben che vada, non fa altro che ricondurre in modo formalmente corretto la nozione di numero ad altre nozioni più astratte che devono essere accettate come "primitive", mentre è ben noto che l'arte di far di conto usando gli strumenti dell'analisi si è storicamente sviluppata (e anzi ha avuto il massimo splendore) ben prima che alcuni matematici (Cantor, Dedekind, Peano, ...) si ponessero problemi di "fondamenti".

Pur abbandonando qualunque pretesa "fondazionale" sui numeri reali è tuttavia fondamentale conoscerne le proprietà.

Le proprietà del sistema dei numeri reali si possono classificare in tre gruppi:

- a) *proprietà algebriche*, riguardanti le operazioni che si possono eseguire sui numeri reali;
- b) *proprietà di ordinamento*, legate alla possibilità di confrontare fra loro i numeri reali per identificare il "maggiore";
- c) *proprietà di continuità*, più raffinate e profonde, che euristicamente sono legate all'idea che vi debbano essere "abbastanza numeri" per rappresentare una grandezza che varia "con continuità", quale il tempo o la posizione di un punto su di una retta.

Queste proprietà caratterizzano il sistema dei numeri reali, che viene indicato con  $\mathbb{R}$ , nel senso che esse si possono assumere come *assiomi* che definiscono e individuano in modo unico il sistema  $\mathbb{R}$ , ma non insisteremo su questo punto.

## PROPRIETÀ DELLA ADDIZIONE E DELLA MOLTIPLICAZIONE

Nell'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali sono definite due operazioni, dette rispettivamente *addizione* e *moltiplicazione*, le quali consentono di associare a ogni coppia di numeri  $x, y$ , la loro *somma*, per la quale si usa il simbolo  $x + y$ , e il loro *prodotto*, indicato con  $x \cdot y$ , o semplicemente  $xy$ . Somma e prodotto di due numeri reali sono numeri reali; inoltre sono soddisfatte le seguenti proprietà:

1. *Associativa.*  $x + (y + z) = (x + y) + z$ ,  $x(yz) = (xy)z$ .
2. *Commutativa.*  $x + y = y + x$ ,  $xy = yx$ .
3. *Distributiva.*  $x(y + z) = xy + xz$ .
4. *Esistenza degli elementi neutri.* Esistono due numeri reali distinti, che si indicano con 0 e 1, tali che per ogni  $x$  reale risulta  $x + 0 = 0 + x = x$  e  $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ .
5. *Esistenza degli opposti.* Per ogni  $x$  vi è un numero  $y$  tale che  $x + y = 0$ .
6. *Esistenza dei reciproci.* Per ogni  $x \neq 0$  esiste un numero reale  $y$  tale che  $x \cdot y = 1$ .

Dalle proprietà precedenti seguono facilmente tutte le leggi usuali dell'algebra elementare, ricordiamo le principali.

- A. *Semplificazione per l'addizione.* Se  $x + y = x + z$  allora  $y = z$  (ne segue che il numero 0 della proprietà 4 è unico).
- B. *Sottrazione.* Per ogni coppia  $x, y$  vi è un solo  $z$  per cui  $x + z = y$ . Tale numero viene indicato con  $y - x$ . In particolare  $0 - x$  viene scritto semplicemente  $-x$  ed è detto *opposto* di  $x$ .
- C. Si ha

$$x - y = x + (-y), \quad -(-x) = x, \quad x(y - z) = xy - xz, \quad x - 0 = x.$$

- D. *Semplificazione per la moltiplicazione.* Se  $xy = xz$  e  $x \neq 0$  allora  $y = z$  (ne segue che il numero 1 della proprietà 4 è unico).
- E. *Divisione.* Per ogni coppia  $x, y$  con  $x \neq 0$  esiste un solo  $z$  tale che  $xz = y$ . Tale numero  $z$  viene indicato con  $\frac{y}{x}$  e si dice *quoziente* di  $y$  e di  $x$ . In particolare  $\frac{1}{x}$  si scrive anche  $x^{-1}$  e si dice *reciproco* di  $x$ .
- F. Se  $x \neq 0$  allora  $\frac{y}{x} = yx^{-1}$  e  $(x^{-1})^{-1} = x$ .  
Se  $x \neq 0$  e  $y \neq 0$  allora  $\frac{z}{x} + \frac{w}{y} = \frac{zy + wx}{xy}$  e anche  $(\frac{z}{x})(\frac{w}{y}) = \frac{zw}{xy}$ .
- G. *Annullamento del prodotto.* Se  $xy = 0$  allora o  $x = 0$  oppure  $y = 0$ .

## PROPRIETÀ DELL'ORDINAMENTO

Nell'insieme dei numeri reali si può identificare un sottoinsieme  $P$ , detto dei *numeri positivi*, che ha le proprietà seguenti:

7. Se  $x$  e  $y$  sono numeri positivi allora anche  $x + y$  e  $x \cdot y$  sono positivi.
8. Per ogni numero reale  $x$  vi sono tre possibilità:  $x$  è positivo,  $x = 0$  oppure  $-x$  è positivo; inoltre tali possibilità si escludono mutuamente.

Siccome  $1 \neq 0$ , dal fatto che uno dei due numeri  $1$  e  $-1$  deve essere positivo e da  $1 = 1^2 = (-1)^2$  si deduce facilmente che  $1$  deve stare in  $P$ , cioè  $1$  è positivo. Ne segue che anche  $1 + 1, 1 + 1 + 1, \dots, 1 + 1 + \dots + 1$  sono numeri positivi, si ottengono così, in modo intuitivo, i numeri interi positivi per i quali si usa il simbolo  $\mathbb{N}^{(1)}$ .

Un numero reale diverso da zero e non positivo si dice *negativo*. Se  $x, y$  sono negativi il loro prodotto è positivo (in quanto  $xy = (-x)(-y)$  e  $-x$  e  $-y$  sono positivi); se ne deduce che il quadrato di un numero non nullo è sempre positivo.

Si usa scrivere  $x > 0$  per indicare che  $x$  è positivo, mentre la scrittura  $x < y$  (o  $y > x$ ) significa che  $y - x$  è positivo, cioè  $y - x > 0$ . Dunque la scrittura  $x < 0$  equivale a dire che  $x$  è negativo o, equivalentemente, che  $-x$  è positivo.

Si ottengono facilmente le usuali regole di calcolo con le disuguaglianze:

se $x > 0$	allora $1/x > 0$ ,
se $x < y$ e $y < z$	allora $x < z$ ,
se $x < y$ e $z > 0$	allora $xz < yz$ ,
se $x < y$	allora per ogni $z$ si ha $x + z < y + z$ ,
se $x < y$ e $x, y > 0$	allora $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ .

La notazione  $x \leq y$  significa  $x < y$  oppure  $x = y$ , in altri termini  $y - x$  è positivo o nullo. In particolare vale sempre  $x \leq x$ . In modo analogo si definisce  $x \geq y$ ; si vede facilmente che le usuali regole di calcolo si estendono alle relazioni  $\leq$  e  $\geq$ . Si noti in particolare che

$$\text{se } x \leq y \text{ e } y \leq x \text{ allora } x = y.$$

## RADICE QUADRATA E VALORE ASSOLUTO

Dato un numero reale  $a$  ci si può chiedere se esistono numeri reali  $x$  tali che  $x^2 = a$ . È chiaro che se  $a$  è negativo l'equazione  $x^2 = a$  non ha soluzioni (reali). Se  $a = 0$  l'unica soluzione è  $x = 0$ . Se  $a > 0$  supponiamo che per qualche  $x, y \in \mathbb{R}$  si abbia  $x^2 = y^2 = a$ . Allora

$$x^2 - y^2 = 0$$

da cui  $(x + y)(x - y) = 0$  e dunque o  $x + y = 0$  oppure  $x - y = 0$ , cioè  $x = -y$  oppure  $x = y$ . In effetti se  $x^2 = a$  si ha anche  $(-x)^2 = a$  e dunque se vi è un  $x \in \mathbb{R}$  per cui  $x^2 = a$  allora vi sono *esattamente* due numeri reali con tale proprietà:  $x$  e  $-x$ . Uno solo di tali numeri è positivo, esso viene detto *radice quadrata* di  $a$  e indicato con il simbolo  $\sqrt{a}$ . Proveremo fra breve che ogni numero reale positivo è dotato di radice quadrata, ma ciò è conseguenza di un'altra proprietà di  $\mathbb{R}$ . In effetti le proprietà finora enunciate 1, ..., 8 sono per esempio verificate dall'insieme dei numeri razionali, che si indica con  $\mathbb{Q}$ , ma come è noto l'equazione  $x^2 = 2$  non ha soluzioni razionali.

Infine osserviamo esplicitamente che la radice quadrata di  $4, \sqrt{4}$ , è  $2$  e non  $\pm 2$ ;  $\pm 2$  sono invece le soluzioni o radici di  $x^2 = 4$ .

Per ogni numero reale  $x$  si definisce il *valore assoluto* di  $x$  (o *modulo* di  $x$ ) come

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

<sup>(1)</sup> Per motivi di notazione sovente è comodo considerare anche lo zero come elemento di  $\mathbb{N}$ .

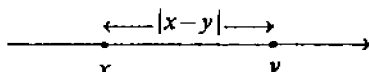
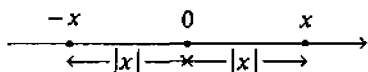


Si noti che risulta  $|x| = \sqrt{x^2}$ , si ha inoltre

$$-|x| \leq x \leq |x|,$$

dunque  $|x|$  è il più grande fra  $x$  e  $-x$ . Si osservi che il valore assoluto di  $x$  non è il numero "senza il segno":  $|-a|$  non è uguale ad  $a$ , per esempio se  $a = -2$  si ha  $|-a| = 2 = -a$ .

Prendendo spunto dalla rappresentazione di  $\mathbb{R}$  sulla retta, il numero  $|x|$  si dice anche *distanza* di  $x$  dall'origine: più in generale  $|x - y|$  si dice distanza tra  $x$  e  $y$



Le seguenti proprietà del valore assoluto sono di verifica immediata ma piuttosto importanti:

$$\begin{aligned} |x| &\geq 0, \\ |-x| &= |x|, \\ |xy| &= |x| \cdot |y|, \\ |x| &= 0 \text{ se e solo se } x = 0, \\ |x| &\leq a \text{ se e solo se } -a \leq x \leq a, \\ |x + y| &\leq |x| + |y|. \end{aligned}$$

L'ultima proprietà enunciata, detta *diseguaglianza triangolare*, si può per esempio dimostrare così:

$$|x + y|^2 = (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2,$$

da cui segue il risultato estraendo la radice quadrata.

Se  $a, b$  sono numeri reali con  $a \leq b$  allora l'insieme di tutti gli  $x$  tali che  $a \leq x \leq b$  si dice *intervallo chiuso* di estremi  $a, b$  e viene indicato con  $[a, b]$ . Se  $a < b$  l'insieme dei numeri reali  $x$  con  $a < x < b$  si dice *intervallo aperto* di estremi  $a, b$  e si indica con  $(a, b)$ ; in modo analogo si definiscono gli intervalli semiaperto a sinistra  $(a, b]$  e a destra  $[a, b)$ .

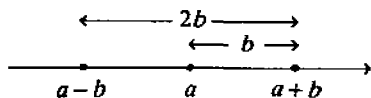
È frequente l'uso di disequazioni che hanno la seguente forma

$$|x - a| < b, \quad b > 0$$

per descrivere degli intervalli. Infatti la precedente disequazione è equivalente a

$$a - b < x < a + b,$$

cioè esprime sinteticamente il fatto che il numero  $x$  appartiene all'intervallo  $(a - b, a + b)$  di *centro*  $a$  e *raggio*  $b$  (o *ampiezza*  $2b$ ).



L'insieme dei numeri reali  $x$  tali che  $x > a$  si chiama *semiretta positiva aperta* di origine  $a$ . È d'uso, a questo punto, introdurre i simboli  $+\infty$  e  $-\infty$  (più e meno infinito) e le notazioni seguenti

$$\begin{aligned} (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, & [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \\ (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, & (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}. \end{aligned}$$

In questo modo si può parlare di intervalli con estremi  $+\infty$  o  $-\infty$  e  $a$ , o anche dell'intervallo di estremi  $-\infty$  e  $+\infty$  ( $-\infty, +\infty$ ), intendendo con questo tutto  $\mathbb{R}$ .

### PROPRIETÀ DI CONTINUITÀ DEL SISTEMA DEI NUMERI REALI

Le proprietà finora elencate sono ben note a chi ha un minimo di dimestichezza con l'algebra elementare. I numeri reali possiedono però anche delle proprietà che non sono di tipo algebrico e che hanno come conseguenza, per esempio, l'esistenza dei numeri irrazionali, numeri che compaiono naturalmente quando si cerca di risolvere certe equazioni quadratiche quali  $x^2 = 2$ . Anzitutto qualche elemento di terminologia. Se  $A$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  (non vuoto) e vi è un numero  $M$  tale che

$$x \leq M \text{ per ogni } x \text{ di } A,$$

allora si dice che  $A$  è *limitato superiormente* da  $M$  e che  $M$  è un *maggiorante* di  $A$ . Un insieme che non ha maggioranti si dice *superiormente illimitato*. Se poi esiste un maggiorante  $M$  di  $A$  che è anche elemento di  $A$  esso si chiama *massimo* di  $A$  e si scrive

$$M = \max A;$$

il massimo di un insieme superiormente limitato se esiste è unico, ma può darsi il caso che non esista.

- ESEMPIO A.1** (a) L'insieme dei numeri primi non ha maggioranti e non ha massimo.  
 (b) L'insieme dei numeri reali  $x$  che soddisfano  $0 \leq x \leq 1$  è limitato superiormente da 1 e tale numero è il suo massimo.  
 (c) L'insieme dei numeri reali  $x$  che soddisfano  $0 \leq x < 1$  è limitato superiormente ma non ha massimo.  
 (d) L'insieme dei numeri razionali  $q$  per i quali  $q^2 \leq 2$  è limitato superiormente ma non ha massimo.

Per quegli insiemi, come quelli degli esempi (c) e (d), che sono limitati superiormente ma non hanno massimo vi è una nozione che prende il posto del massimo: quella di estremo superiore.

**DEFINIZIONE A.2** Un numero  $m$  si dice *estremo superiore* di un insieme di numeri reali  $A$  se

- $m$  è un maggiorante di  $A$
- per ogni maggiorante  $M$  di  $A$  si ha  $m \leq M$ .

L'estremo superiore (se esiste) è dunque il più piccolo dei maggioranti di  $A$ , in particolare è *unico* e si indica con il simbolo  $\sup A$  (da *supremum*). L'insieme  $[0, 1]$ , come già osservato non ha massimo, mentre l'insieme  $[0, 1]$  ha massimo uguale a 1; in entrambi i

casi l'insieme dei maggioranti è ovviamente dato da  $[1, +\infty)$  e quindi 1 è il più piccolo dei maggioranti.

Una proprietà peculiare dei numeri reali è la seguente:

9. Ogni insieme (non vuoto)  $A$  di numeri reali che sia limitato superiormente ha un estremo superiore.

Si noti che l'estremo superiore non è necessariamente un elemento di  $A$ ; in effetti  $\sup A$  è un elemento di  $A$  solo se  $A$  ha massimo (e in tal caso  $\sup A = \max A$ ). Dato un sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}$  limitato superiormente un numero  $L$  è l'estremo superiore di  $A$  se e solo se

- 1) per ogni  $x$  di  $A$  si ha  $x \leq L$ ,
- 2) per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un  $x$  di  $A$  tale che  $L - \varepsilon < x$ , infatti comunque si prenda un numero più piccolo di  $L$  questo non è maggiorante di  $A$ . Le condizioni 1) e 2) forniscono una utile *caratterizzazione* dell'estremo superiore.

In modo analogo si definiscono i minoranti di un insieme  $A$  limitato inferiormente e l'*estremo inferiore* di  $A$ , la proprietà 9 è equivalente ad affermare che ogni insieme di numeri reali inferiormente limitato è dotato di estremo inferiore.

È comodo poter parlare di estremo superiore e di estremo inferiore anche quando l'insieme  $A$  non è limitato, si pone

$$\begin{aligned} \sup A &= +\infty && \text{se } A \text{ non è limitato superiormente,} \\ \inf A &= -\infty && \text{se } A \text{ non è limitato inferiormente.} \end{aligned}$$

Dalla proprietà 9 seguono altre importanti conseguenze.

**TEOREMA A.3** L'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$  non è superiormente limitato.

**DIMOSTRAZIONE** Se  $\mathbb{N}$  fosse limitato avremmo un estremo superiore  $L$ , ma allora il numero  $L - 1$  non potrebbe essere un maggiorante di  $\mathbb{N}$  e dunque vi è un intero  $n$  con

$$L - 1 < n \leq L,$$

ma da tale relazione seguirebbe  $n + 1 > L$  il che contraddice l'asserzione che  $L$  sia un maggiorante di  $\mathbb{N}$ . □

Il teorema predetto può essere riformulato nel modo seguente.

**PROPRIETÀ A.4 (di Archimede)** Siano  $x, y$  due numeri reali positivi, allora esiste un intero  $n$  tale che  $nx > y$ .

Infatti se ciò non fosse, per ogni intero positivo  $n$  si avrebbe  $n \leq \frac{y}{x}$ , in contraddizione col teorema precedente.

Un altro modo per esprimere la proprietà di Archimede è dato dal seguente

**TEOREMA A.5** Se  $x$  è un numero reale tale che

$$0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \text{ per ogni } n \in \mathbb{N},$$

allora  $x = 0$ . Equivalentemente se  $x \in \mathbb{R}$  è non negativo e più piccolo di qualunque reale positivo allora  $x = 0$ .

Dal punto di vista geometrico la proprietà di Archimede significa che ogni segmento, per quanto lungo, può essere coperto da un numero finito di segmenti di lunghezza assegnata; essa è stata enunciata esplicitamente da Archimede come uno degli assiomi della geometria e da essa segue la possibilità di suddividere un intervallo di  $\mathbb{R}$  in intervalli "piccoli a piacere".

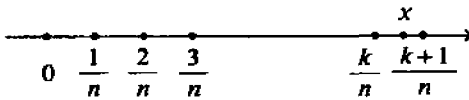
**TEOREMA A.6 (di densità)** L'insieme dei numeri razionali  $\mathbb{Q}$  è denso in  $\mathbb{R}$ , cioè, se  $x, y \in \mathbb{R}$ , allora l'intervallo aperto  $(x, y)$  contiene almeno un numero razionale e quindi infiniti. Equivalentemente per ogni  $\varepsilon > 0$  esiste un numero razionale  $r$  tale che  $|x - r| < \varepsilon$ .

**DIMOSTRAZIONE** Sia  $n$  un intero positivo tale che  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  (un tale  $n$  esiste per la proprietà di Archimede). Basterà provare che dato  $x \in \mathbb{R}$  esiste un numero razionale  $r$  con  $|x - r| \leq \frac{1}{n}$ . Supponiamo, per cominciare, che sia  $x \geq 0$ . Se  $x \leq \frac{1}{n}$  si ha la tesi, in quanto  $|x - \frac{1}{n}| \leq \frac{1}{n}$ . Se invece  $x > \frac{1}{n}$  costruiamo l'insieme degli interi positivi  $m$  tali che  $\frac{m}{n} \leq x$ ; questo insieme non è vuoto (il numero 1 appartiene all'insieme) ed è superiormente limitato. Sia  $k$  l'estremo superiore di detto insieme, si avrà

$$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$$

da cui chiaramente

$$\left| x - \frac{k}{n} \right| < \frac{1}{n}.$$



La dimostrazione nel caso  $x < 0$  è analoga. □

Anche l'insieme delle *frazioni decimali*, cioè il sottoinsieme dei razionali dato dai numeri della forma  $\frac{m}{10^n}$  con  $m$  intero e  $n$  intero positivo, è un insieme non limitato (basta osservare che  $10^n > n$ ) ed è facile dedurre il teorema seguente.

**TEOREMA A.7** Il sottoinsieme di  $\mathbb{Q}$  delle frazioni decimali è denso in  $\mathbb{R}$ .

Questo teorema ha un'ovvia ma importante conseguenza: per ogni  $x \in \mathbb{R}$  si può trovare un numero del tipo  $\frac{m}{10^n}$  "prossimo a  $x$  quanto si vuole", infatti fissato l'errore  $\varepsilon$  basta applicare il Teorema A.6 all'intervallo  $(x - \varepsilon, x)$  per ottenere quello che si chiama un *valore decimale approssimato per difetto* a meno di  $\varepsilon$  del numero reale  $x$ , se invece si considera  $(x, x + \varepsilon)$  si ottiene un *valore decimale approssimato per eccesso*. Ciò spiega il fatto che nella misura delle grandezze fisiche sia sufficiente usare solo frazioni decimali, cioè quei numeri razionali che si possono rappresentare in base 10 con un numero finito di cifre dopo la virgola. Si noti che non ogni razionale può essere rappresentato come frazione decimale, per esempio per rappresentare  $\frac{1}{3}$  occorrono "infinite" cifre decimali. Dimostriamo infine

**TEOREMA A.8** Ogni numero reale positivo possiede la radice quadrata.

**DIMOSTRAZIONE** Proviamo per esempio l'esistenza di un numero positivo il cui quadrato è 2, lasciando al lettore la dimostrazione nel caso generale. Consideriamo l'insieme  $A$  dei numeri  $y$  tali che  $0 \leq y$  e  $y^2 \leq 2$ . L'insieme  $A$  è non vuoto ( $0 \in A$ ) ed è superiormente limitato (per esempio 2 è un maggiorante).

Sia  $M$  l'estremo superiore di  $A$ , proveremo che  $M^2 = 2$ . Se fosse  $M^2 < 2$ , sarebbe possibile scegliere un intero  $n$  tale che

$$n > \frac{2M + 1}{2 - M^2}$$

in quanto  $2 - M^2 > 0$ . Avremmo allora

$$\left(M + \frac{1}{n}\right)^2 = M^2 + \frac{2M}{n} + \frac{1}{n^2} \leq M^2 + \frac{2M}{n} + \frac{1}{n} < M^2 + n \frac{2 - M^2}{n} = 2$$

e pertanto  $M + \frac{1}{n} \in A$  e dunque  $M$  non sarebbe l'estremo superiore. Se poi fosse  $M^2 > 2$ , scegliendo  $n$  in modo che

$$n > \frac{2M}{M^2 - 2}$$

si otterrebbe

$$\left(M - \frac{1}{n}\right)^2 = M^2 - \frac{2M}{n} + \frac{1}{n^2} > M^2 - \frac{2M}{n} > M^2 - (M^2 - 2) = 2$$

e anche in questo caso si contraddirebbe il fatto che  $M$  sia l'estremo superiore di  $A$ . Non potendo allora essere né  $M^2 < 2$ , né  $M^2 > 2$ , risulterà necessariamente  $M^2 = 2$ .  $\square$

Osserviamo infine che non esistono criteri generali per *trovare* l'estremo superiore di un insieme, tuttavia la caratterizzazione trovata in precedenza permette di decidere se un numero è o non è l'estremo superiore di un insieme.

**ESEMPIO A.9** Consideriamo il sottoinsieme  $A$  di  $\mathbb{R}$  costituito dai numeri  $\frac{n}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Ovviamente  $A$  è limitato superiormente (e inferiormente): si ha  $0 \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$ . Ogni numero maggiore o uguale a 1 è maggiorante di  $A$ , mentre nessun numero  $c < 1$  può essere maggiorante dovendosi avere, in tal caso

$$\frac{n}{n+1} \leq c \text{ per ogni } n$$

cioè

$$n \leq \frac{c}{1-c} \text{ per ogni } n,$$

il che è assurdo in quanto  $\mathbb{N}$  non è limitato. Dunque l'estremo superiore di  $A$  è 1.

Discutiamo ora una conseguenza di natura più teorica dell'esistenza dell'estremo superiore.

**TEOREMA A.10 (principio degli intervalli incapsulati o di Cantor)** Se  $[a_1, b_1]$ ,  $[a_2, b_2]$ ,  $\dots$ ,  $[a_n, b_n]$ ,  $\dots$  sono degli intervalli chiusi tali che ciascuno sia contenuto nel precedente

$$[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}] \text{ per ogni } n \in \mathbb{N},$$

o equivalentemente  $a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1}$ , e tali che per ogni  $\varepsilon > 0$  vi sia uno di tali intervalli con ampiezza minore di  $\varepsilon$ , cioè vi sia un  $n$  per cui  $b_n - a_n < \varepsilon$ , allora esiste un *unico* numero reale  $x$  che appartiene a tutti gli intervalli.

**DIMOSTRAZIONE** L'insieme dei primi estremi  $a_n$  è limitato superiormente e dunque ha estremo superiore finito  $a$ , analogamente l'insieme dei secondi estremi  $b_n$  ha estremo inferiore  $b$ . Si ha  $0 \leq b - a$  e se  $b_n - a_n < \varepsilon$  anche

$$0 \leq b - a \leq b_n - a_n < \varepsilon.$$

Dal Teorema A.5 segue dunque  $a = b = x$ , e siccome per ogni  $n$ ,  $a_n \leq x \leq b_n$ , segue che  $x$  appartiene a tutti gli intervalli.  $\square$

Il principio ora esposto costituisce, assieme alla proprietà di Archimede, una formulazione equivalente delle proprietà di continuità 9; altre formulazioni ancora si possono trovare legate alla nozione di limite di successione ma, come già detto, non insistiamo su questo punto.

### IL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Fin qui abbiamo usato i numeri naturali in modo intuitivo: se si parte da 0 e da 1 si ottengono i naturali come somme successive  $2 = 1 + 1$ ,  $3 = 2 + 1, \dots$  e così via. Il problema è spiegare precisamente cosa si intende per "così via" o "sommando ripetutamente 1". Vi è un modo più preciso per individuare i numeri naturali tra i numeri reali, basato sulla nozione di *insieme induttivo*, al quale accenniamo brevemente.

Un sottoinsieme di  $\mathbb{R}$  si dice *induttivo* se ha le due proprietà seguenti:

(1) il numero 0 appartiene all'insieme

(2) per ogni  $x$  appartenente all'insieme anche il numero  $x + 1$  appartiene all'insieme.

$\mathbb{R}$  stesso è induttivo, i reali positivi costituiscono un insieme induttivo. I numeri naturali si possono allora identificare come quei reali che appartengono a ogni insieme induttivo.  $\mathbb{N}$  è dunque il più piccolo insieme induttivo (o se si vuole l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi). Da queste considerazioni scaturisce il seguente principio di induzione che, in una formulazione leggermente diversa ma equivalente, fornisce un procedimento dimostrativo molto utile.

**TEOREMA A.11 (principio di induzione)** Se  $A$  è un sottoinsieme dei naturali  $\mathbb{N}$  con la proprietà che 0 appartiene ad  $A$  e che se  $a \in A$  allora anche  $a + 1 \in A$ , allora  $A = \mathbb{N}$ . In altre parole un sottoinsieme dei naturali che contenga lo 0 e il "successivo" di ogni suo elemento coincide con  $\mathbb{N}$ .

Questo principio è molto usato nelle definizioni cosiddette *ricorsive* e nelle dimostrazioni, chiamate spesso *induttive*, (a volte senza essere neppure menzionato, sostituito da locuzioni quali "eccetera", "così via", "proseguendo così") nella forma espressa dal seguente teorema.

**TEOREMA A.12** Se  $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  è una famiglia di proposizioni dipendenti dall'indice intero  $n$  e se

(1) la proposizione  $P_0$  è vera,

(2) per ogni naturale  $n$  la proposizione  $P_n$  implica la proposizione  $P_{n+1}$ , allora la proposizione  $P_n$  è vera per ogni  $n$ .

Diamo qualche esempio di uso del principio di induzione.

**ESEMPI A.13 (a)** (*Diseguaglianza di Bernoulli*) Dato  $x \in \mathbb{R}$  con  $x > -1$  per ogni naturale  $n$  vale la seguente diseguaglianza

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Dimostriamo la diseguaglianza usando il principio di induzione. Consideriamo le proposizioni

$$P_n : (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Evidentemente  $P_0$  è vera. Mostriamo ora che  $P_n$  implica  $P_{n+1}$  per ogni  $n \in \mathbb{N}$ . Usando  $P_n$  e il fatto che  $x > -1$ , cioè  $1+x > 0$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq \\ &\geq 1+(n+1)x, \end{aligned}$$

ossia  $P_{n+1}$ . Per il teorema precedente  $P_n$  è allora vera per ogni  $n$ . In modo analogo si dimostra la diseguaglianza

$$(1+x)^n \geq 1+nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2, \quad x \geq 0.$$

(b) Per ogni naturale  $n$  e ogni  $x \neq +1$  si ha

$$\sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Prima di dimostrare questa formula osseviamo che il simbolo  $\sum_{k=0}^n a_k$  si definisce in modo *ricorsivo* nel modo seguente

$$\begin{aligned} \text{per } n=0 \quad & \sum_{k=0}^0 a_k = a_0, \\ \text{per } n>0 \quad & \sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k + a_n. \end{aligned}$$

Se si considerano le proposizioni

$$P_n : \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x},$$

evidentemente  $P_0$  è vera in quanto  $1 = \frac{1-x}{1-x}$ . Mostriamo che  $P_n$  implica  $P_{n+1}$ : usando  $P_n$  si ha

$$\sum_{k=0}^{n+1} x^k = \sum_{k=0}^n x^k + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1} = \frac{1-x^{n+2}}{1-x},$$

cioè, per ogni naturale  $n$ , la  $P_{n+1}$ .

Osserviamo che nel Teorema A.12 è possibile sostituire l'ipotesi (1) con l'ipotesi:

(1)' esiste un intero  $k$  per cui  $P_k$  è vera, in questo caso si concluderà che  $P_n$  è vera per ogni  $n \geq k$ .

Una dimostrazione per induzione consiste di due passi (1) o (1)' e (2); vale la pena di sottolineare che tutti e due i passi sono necessari. Infatti:

- (a) l'affermazione  $P_n : n > n + 1$  è chiaramente falsa, ma *induttiva*, cioè verifica la (2) del teorema, nel senso che  $P_n$  implica  $P_{n+1}$ . Infatti aggiungendo 1 ad ambo i membri della disequaglianza in  $P_n$  si ottiene  $n + 1 > (n + 1) + 1$ , cioè  $P_{n+1}$ ;
- (b) l'affermazione  $P_n : n^2 - n < 10$  è vera per  $n = 0, 1, 2, 3$  ma non è possibile dimostrare che  $P_n$  implica  $P_{n+1}$  per ogni  $n$ . Si ha invece

$$P_n : n^2 - n > 10 \text{ per } n \geq 4,$$

infatti  $P_4$  è vera e, usando  $P_n$ , si ottiene

$$(n + 1)^2 - (n + 1) = n^2 + n = n^2 - n + 2n > 10 + 2n > 10.$$

Invitiamo il lettore a trovare l'errore nella seguente argomentazione: si afferma che per ogni naturale  $n$

$$0 = 1 = 2 = \dots = n.$$

Sia  $P_n$  l'improbabile asserto  $0 = 1 = 2 = \dots = n$ .  $P_0$  è certamente vero in quanto  $0 = 0$ . Ma da  $P_n : 0 = 1 = 2 = \dots = n$  sommando 1 a ogni membro si trova  $1 = 2 = 3 = \dots = n + 1$ , che, assieme a  $P_n$  fornisce  $0 = 1 = 2 = \dots = n + 1$ , cioè  $P_{n+1}$ !

**ESEMPI A.14** (Il fattoriale e i coefficienti binomiali) (a) Il simbolo  $n!$  si chiama *fattoriale* di  $n$  e si definisce per induzione nel modo seguente

$$\begin{aligned} \text{per } n = 0, & \quad 0! = 1 \\ \text{per } n > 0, & \quad n \in \mathbb{N}, (n + 1)! = n!(n + 1). \end{aligned}$$

$n!$  è dunque il prodotto di tutti i naturali minori o uguali a  $n : n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  ( $n \geq 1$ ). Il *coefficiente binomiale*  $\binom{n}{k}$ , letto  $n$  su  $k$ , si definisce per  $0 \leq k \leq n$  come

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n - k)!}.$$

È facile verificare per induzione che

$$\begin{aligned} n^n & \geq n!, \\ n! & \geq 2^{n-1}. \end{aligned}$$

Si verifica inoltre facilmente che vale la seguente legge del *triangolo di Tartaglia* (o di Pascal)

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k + 1} = \binom{n + 1}{k + 1}.$$

(b) (*Formula del binomio di Newton*) Si ha

$$\begin{aligned} (a + b)^n & = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \\ & = \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} a b^{n-1} + \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n. \end{aligned}$$



La dimostrazione di questa formula si fa per induzione. Per  $n = 1$  è chiaro che la formula è vera. Proviamo che se vale per un certo  $n$  allora vale anche per  $n + 1$ . Si ha

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= (a + b) \left[ \binom{n}{0} b^n + \binom{n}{1} ab^{n-1} + \dots + \binom{n}{n-1} a^{n-1} b + \binom{n}{n} a^n \right] = \\ &= \binom{n}{0} b^{n+1} + \left[ \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \right] ab^n + \left[ \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \right] a^2 b^{n-1} + \dots + \\ &\quad + \left[ \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \right] ba^n + \binom{n}{n} a^{n+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k},\end{aligned}$$

dove nell'ultima eguaglianza si è usata la legge del triangolo di Tartaglia. Si osservi che come conseguenza della formula di Newton si ha

$$2^n = (1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

(c) Per ogni coppia di interi  $n, m$  con  $n \geq m \geq 0$  si ha

$$\sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1},$$

infatti sia  $m$  un intero non negativo fissato e sia

$$P_n : \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1} \quad n = m, m+1, \dots$$

La proposizione  $P_m$  è vera, perché si scrive

$$\binom{m}{m} = \binom{m+1}{m+1} = 1,$$

supposta vera  $P_n$  si trova

$$\begin{aligned}\sum_{k=m}^{n+1} \binom{k}{m} &= \binom{n+1}{m} + \sum_{k=m}^n \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m} + \binom{n+1}{m+1} = \\ &= \binom{n+2}{m+1},\end{aligned}$$

cioè  $P_{n+1}$ , ove nuovamente si è usata la legge del triangolo di Tartaglia.

Si noti che, nel caso  $m = 1$ , la formula ora dimostrata fornisce la somma dei primi  $n$  interi

$$\binom{1}{1} + \binom{2}{1} + \dots + \binom{n}{1} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

(d) (*Diseguaglianza delle medie*) Proviamo la seguente affermazione  $P_n$ : se  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sono  $n$  numeri positivi con somma  $n$  allora il loro prodotto non supera 1, cioè

$$\text{se } x_1 + x_2 + \dots + x_n = n, \quad x_i > 0, \text{ allora } x_1 x_2 \dots x_n \leq 1.$$

La proposizione  $P_2$  è vera: da  $x_1 + x_2 = 2$  si ricava  $x_1 x_2 = x_1(2 - x_1) \leq 1$ , in quanto l'ultima disequaglianza equivale a  $x_1^2 - 2x_1 + 1 = (x_1 - 1)^2 \geq 0$ . Supponiamo allora che sia vera  $P_n$  e consideriamo  $n + 1$  numeri positivi  $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$  con  $x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1} = n + 1$ .

Se tutti questi numeri sono uguali a 1, ovviamente  $P_{n+1}$  è vera; in caso contrario si avrà, per esempio,  $x_1 = 1 - a$  (con  $a > 0$ ), allora vi sarà un altro numero, diciamo  $x_2$ , che "compensa" la somma (la somma degli  $n + 1$  numeri è  $n + 1$ ). Poniamo allora  $x_2 + 1 + b, b > 0$ , si avrà

$$x_1 + x_2 - 1 + x_3 + \dots + x_{n+1} = n,$$

cioè

$$(1 - a + 1 + b - 1) + x_3 + \dots + x_{n+1} = (1 - a + b) + x_3 + \dots + x_{n+1} = n.$$

Applichiamo allora  $P_n$  agli  $n$  numeri  $1 - a + b, x_3, x_4, \dots, x_{n+1}$ , ( $1 - a + b$  è positivo) ottenendo

$$(1 - a + b)x_3 x_4 \dots x_{n+1} \leq 1.$$

Ma  $x_1 x_2 = (1 - a)(1 + b) = 1 - a + b - ab \leq 1 - a + b$ , e dunque

$$x_1 x_2 \dots x_{n+1} \leq 1,$$

cioè  $P_{n+1}$ ; in base al principio di induzione concludiamo che  $P_n$  è vera per ogni  $n \geq 2$ . La proprietà dimostrata or ora consente di ricavare in modo elementare una importante disequaglianza, detta *disequaglianza delle medie*. Siano  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$   $n$  numeri positivi qualunque e sia

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

la loro *media aritmetica*.

Applichiamo la proprietà  $P_n$  agli  $n$  numeri  $\frac{x_1}{A}, \frac{x_2}{A}, \dots, \frac{x_n}{A}$ , la cui somma è  $n$ . Otteniamo  $\frac{x_1}{A} \frac{x_2}{A} \dots \frac{x_n}{A} \leq 1$ , cioè  $x_1 x_2 \dots x_n \leq A^n$  che si può scrivere

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

la *media geometrica* di  $n$  numeri positivi è dunque minore o uguale alla loro media aritmetica.

## NUMERI COMPLESSI

Sia l'algebra che il calcolo differenziale devono una parte considerevole del loro interesse e della potenza dei loro metodi all'introduzione dei numeri complessi.

Certamente il lettore sa che un'equazione di secondo grado in campo reale può avere due, una o nessuna soluzione e, in generale, che solo in un campo più vasto di quello dei numeri reali, i numeri complessi appunto, è vero che una equazione algebrica di grado  $n$  ha  $n$  radici. Questo fatto ha notevoli ripercussioni in analisi: nel Capitolo 2 sono riportate le interessanti relazioni che legano le funzioni trigonometriche e la funzione esponenziale, relazioni che si possono formulare solo in termini di numeri complessi. Si è anche visto come il passaggio ai numeri complessi possa dare una corretta spiegazione del comportamento delle serie di potenze.

Descriviamo succintamente la definizione e le proprietà elementari dei numeri complessi. I numeri complessi sono oggetti che si possono sommare e moltiplicare dando luogo ancora a numeri complessi, e che verificano le seguenti proprietà:

1. Ogni numero reale è un numero complesso; se  $x$  e  $y$  sono due numeri reali la loro somma e il loro prodotto come numeri complessi sono la loro somma e il prodotto usuali come numeri reali.
2. Vi è un numero complesso che si indica con  $i$ , e si dice *unità immaginaria*, tale che  $i^2 = -1$ .
3. Ogni numero complesso si può scrivere in modo unico nella forma  $x + iy$ , ove  $x$  e  $y$  sono numeri reali.
4. Le ordinarie proprietà aritmetiche della addizione e della moltiplicazione sono conservate<sup>(2)</sup>.

L'insieme dei numeri complessi si indica con  $\mathbb{C}$ .

Deduciamo alcune conseguenze delle proprietà enunciate.

Se  $z_1 = x_1 + iy_1$ ,  $z_2 = x_2 + iy_2$  sono due numeri complessi, allora

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$

dunque la somma dei numeri si può effettuare "per componenti". Per esempio  $(5 + 4i) + (-1 - 5i) = 4 - i$ .

Per moltiplicare due numeri complessi si userà la regola  $i^2 = -1$ , per semplificare i termini. Per esempio

$$\begin{aligned} & (1 + i)(2 - 4i) = \\ & = (2 - 4i) + i(2 - 4i) = 2 - 4i + 2i - 4i^2 = \\ & = 2 - 4i + 2i + 4 = 6 - 2i. \end{aligned}$$

Se  $z = x + iy$  è un numero complesso definiamo *complesso coniugato*  $\bar{z}$  di  $z$  il numero complesso  $\bar{z} = x - iy$ .

Se a ogni numero complesso  $x + iy$  associamo il punto del piano che ha coordinate  $(x, y)$  rispetto a un sistema di assi ortogonali, notiamo che un numero  $z$  e il suo complesso coniugato  $\bar{z}$  sono rappresentati da due punti simmetrici rispetto all'asse delle ascisse (asse reale), e che

$$z\bar{z} = x^2 + y^2$$

è il quadrato della distanza dall'origine del punto che rappresenta  $z$  (vedi Fig. A.1 (a)).

Possiamo così introdurre la divisione, con divisore non nullo, fra numeri complessi. Se  $z = x + iy$  è diverso da zero, posto  $w = \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2}$  si ha

$$zw = zw = 1;$$

infatti

$$z \cdot \frac{\bar{z}}{x^2 + y^2} = \frac{z\bar{z}}{x^2 + y^2} = 1.$$

<sup>(2)</sup> Cioè se  $\alpha, \beta, \gamma$  sono numeri complessi si ha

- (a)  $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ ,  $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ ,
- (b)  $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$ ,  $(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$ ,
- (c)  $\alpha\beta = \beta\alpha$ ,  $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ ,
- (d)  $0\alpha = 0$  ove  $0$  è il numero reale  $0$ ,
- (e)  $1\alpha = \alpha$  ove  $1$  è il numero reale  $1$ ,
- (f)  $\alpha + (-1)\alpha = 0$ .

Il numero  $w$  si dice *inverso* di  $z$  e si indica con  $z^{-1}$  o  $\frac{1}{z}$ . Se  $z, w$  sono numeri complessi si scrive  $z/w$  in luogo di  $w^{-1}z$ , come per i numeri reali (si noti che non è possibile dividere per 0).

Per esempio

$$\frac{4-3i}{1+i} = (4-3i) \frac{\overline{(1+i)}}{1+1} = \frac{(4-3i)(1-i)}{2} = \frac{1-7i}{2}.$$

Le seguenti proprietà sono di dimostrazione immediata:

$$\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}, \quad \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z/w} = \bar{z}/\bar{w}.$$

Se  $z = x + iy$  è un numero complesso e  $x, y$  sono reali  $x$  si dice *parte reale* e  $y$  si dice *coefficiente immaginario* di  $z$ :

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z;$$

si ha

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re} z, \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im} z,$$

il *modulo* di  $z$  è poi

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}:$$

come già osservato  $|z|$  è la distanza dall'origine del punto che rappresenta  $z$ .

Si hanno allora le seguenti proprietà:

- (a)  $|z| > 0$ ,  $|z| = 0$  se e solo se  $z = 0$ ,
- (b)  $|\bar{z}| = |z|$ ,  $|zw| = |z| \cdot |w|$ ,
- (c)  $\operatorname{Re} z \leq |z|$ ,  $\operatorname{Im} z \leq |z|$ ,
- (d)  $|z + w| \leq |z| + |w|$ .

Le proprietà (a), (b), (c) sono di dimostrazione immediata; proviamo (d):

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\bar{z} + \bar{w}) = \\ &= z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2 \operatorname{Re}(w\bar{z}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|w| \cdot |z| = \\ &= (|z| + |w|)^2. \end{aligned}$$

La (d) si dice *diseguaglianza triangolare*; infatti, siccome la somma si effettua "per componenti", nel piano complesso la somma di due numeri complessi ha le proprietà della somma dei vettori, la (d) traduce quindi il fatto che in un triangolo un lato è minore della somma degli altri (Fig. A.1 (b)). Si osservi, comunque, che la moltiplicazione fra numeri complessi non ha nulla a che vedere con i tradizionali prodotti scalare e vettoriale di vettori del piano.

Un'altra utile rappresentazione dei numeri complessi si può ottenere introducendo nel piano complesso, al posto delle coordinate cartesiane, le *coordinate polari*

$$x = r \cos \vartheta, \quad y = r \operatorname{sen} \vartheta.$$

Il numero complesso  $z = x + iy$  si scrive allora nella *forma polare*:

$$z = r(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta),$$

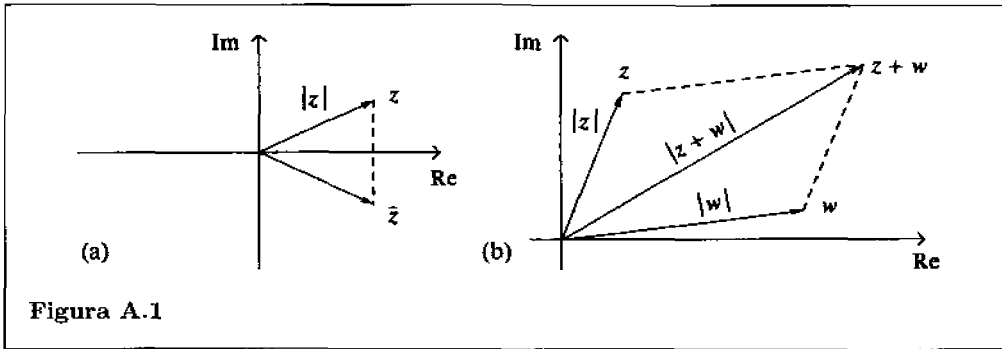


Figura A.1

ove  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$  e  $\vartheta$  è l'angolo formato fra la direzione positiva dell'asse  $x$  e la semiretta di origine  $O$  passante per il punto  $P$  che rappresenta  $z$ . L'angolo  $\vartheta$  si dice *argomento* o *anomalia* di  $z$  ed è definito a meno di multipli di  $2\pi$ . In forma po-

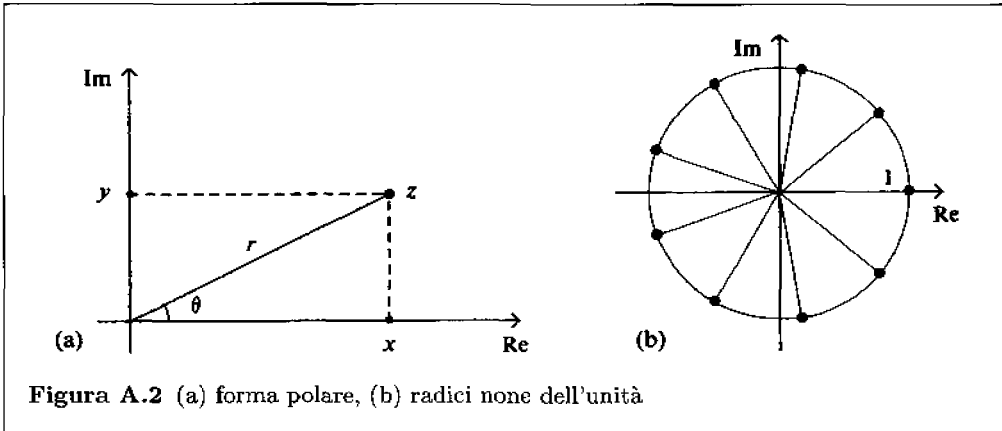


Figura A.2 (a) forma polare, (b) radici none dell'unità

lare la rappresentazione del prodotto di due numeri complessi diviene particolarmente semplice, infatti se

$$z = r(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta), \quad z' = r'(\cos \vartheta' + i \operatorname{sen} \vartheta')$$

si ha

$$\begin{aligned} zz' &= rr'[(\cos \vartheta \cos \vartheta' - \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta') + i(\cos \vartheta \operatorname{sen} \vartheta' + \operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta')] = \\ &= rr'[\cos(\vartheta + \vartheta') + i \operatorname{sen}(\vartheta + \vartheta')], \end{aligned}$$

dunque moltiplicando due numeri complessi il modulo si moltiplica e gli argomenti si sommano.

La formula

$$(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)(\cos \vartheta' + i \operatorname{sen} \vartheta') = \cos(\vartheta + \vartheta') + i \operatorname{sen}(\vartheta + \vartheta')$$

è nota come *formula di De Moivre*.

Essa conduce alla relazione

$$(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)^n = \cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta,$$

la quale permette di risolvere l'equazione  $x^n = 1$ , in cui  $n$  è un intero positivo: le radici (le cosiddette radici  $n$ -esime dell'unità) sono

$$\cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}, \cos \frac{4\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{n}, \dots, \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2(n-1)\pi}{n}, 1.$$

Geometricamente i punti che corrispondono alle radici dell'unità sono vertici di un poligono regolare di  $n$  lati inscritto nel cerchio di centro l'origine e raggio 1.

La formula di Eulero (2.20)

$$e^{i\vartheta} = \cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta$$

è compatibile con la definizione di  $e^z$  tramite la serie di potenze esponenziale (si veda (2.24)) e consente di scrivere i numeri complessi in *forma esponenziale*

$$z = r e^{i\vartheta} \text{ ove } |z| = r;$$

si noti che la formula di De Moivre diviene allora l'abituale regola di moltiplicazione delle potenze

$$r e^{i\vartheta} \cdot r' e^{i\vartheta'} = r r' e^{i(\vartheta+\vartheta')}.$$

## APPLICAZIONI TRA INSIEMI

Molti degli argomenti trattati nell'analisi infinitesimale si fondano sulla nozione di *funzione* o di *applicazione* fra insiemi.

Consideriamo il caso più semplice: se  $A$  e  $B$  sono due insiemi di numeri reali, una funzione di  $A$  in  $B$  è una legge che ad ogni elemento di  $A$  fa corrispondere un elemento di  $B$ . Indicando con  $f$  questa legge si scrive  $f : A \rightarrow B$ , oppure  $y = f(x)$ , intendendo che ad ogni  $x$  di  $A$  corrisponda un elemento  $y = f(x)$  di  $B$ . Si dice che  $A$  è il *dominio* o *insieme di definizione* di  $f$ . Il simbolo  $f(\cdot)$  indica un complesso di operazioni che si devono effettuare su  $x$  (*argomento* di  $f$ ) per ottenere  $y$  (*valore* di  $f$ ).

Queste operazioni possono essere di tipo molto diverso; vi può essere una formula, come nel caso

$$f(x) = x^3 - 3x,$$

oppure diverse formule

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

o una descrizione di tipo geometrico:  $f(P)$  è la distanza dal punto  $P = (x, y)$  dal punto  $(1, 3)$ , o ancora una caratterizzazione di tipo fisico: ad un dato istante  $f(P)$  è la temperatura nel punto  $P$ .

Come si intuisce facilmente dagli esempi sopra citati il dominio di una funzione può essere molto diverso a seconda dell'ambiente in cui si opera; negli ultimi due esempi il punto  $P$  può essere un arbitrario punto dello spazio a 2 o a 3 dimensioni mentre nel primo esempio  $x$  può essere, invece che un numero reale, un numero complesso etc...

Se il punto  $P$  varia in una regione  $A$  del piano  $(x, y)$  e a ciascuno dei punti di  $A$  risulta associato un valore  $f(P)$ , come nel caso  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , avremo una funzione di due variabili, ma nulla ci impedisce di considerare funzioni di tre, quattro o più variabili.

Occorre prestare però qualche attenzione, per non incorrere in inutili complicazioni. Se  $f(P)$  è la temperatura in un punto  $P$  di un sottile filo curvo  $F$  si può pensare

che  $f$  sia una funzione di tre variabili ma è molto più semplice pensare a  $f$  come a funzione della distanza, lungo il filo, del punto  $P$  da un dato punto iniziale.

Soprattutto non occorre pensare che una funzione debba necessariamente assumere valori numerici. Il moto di una particella si può descrivere come una corrispondenza fra il tempo e i punti dello spazio occupato dalla particella stessa, tramite una funzione  $f$  con  $P = f(t)$ . In questo caso il dominio della funzione è un intervallo della retta reale e i valori di  $f$  sono punti dello spazio tridimensionale.

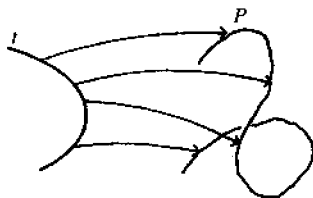


Figura A.3

Se la particella si muove sotto l'azione di un campo magnetico e si vogliono individuare direzione e ampiezza del campo di forze in ogni posizione, occorrerà assegnare a ogni punto occupato dalla particella un vettore

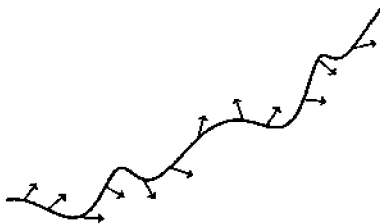


Figura A.4

In questo caso si ha una funzione a valori vettoriali di una variabile reale (il tempo).

### FUNZIONI COMPOSTE E INVERSE

Un aspetto interessante delle funzioni o applicazioni proviene dalla possibilità di applicare la legge a più riprese. Se ad esempio poniamo

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{se } x \text{ è pari} \\ 3x + 1 & \text{se } x \text{ è dispari,} \end{cases}$$

partendo da un determinato intero  $x_0$  possiamo calcolare  $f(x_0)$ ,  $f(f(x_0))$ ,  $f(f(f(x_0)))$ , ...; ad esempio se  $x_0 = 23$  si ottengono i numeri 70, 35, 106, 53, 160, 80, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

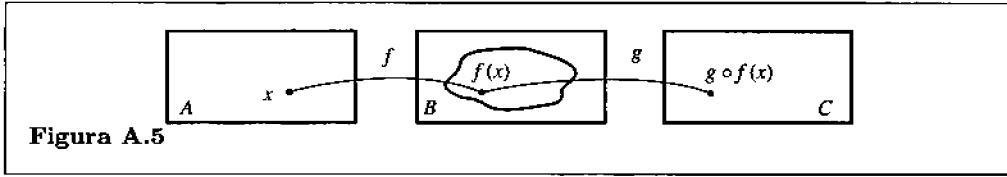


Figura A.5

Nessuno è ancora stato in grado di dimostrare se per ogni valore iniziale  $x_0$  la sequenza generata termina con la terna 4, 2, 1, che si ripete infinite volte. Tuttavia il processo di *applicazione successiva* è chiaro, e non è neppure necessario che la legge sia sempre la stessa. Se  $f$  è una applicazione da un insieme  $A$  in un insieme  $B$  e su un sottoinsieme di  $B$  un'altra legge  $g$  è definita con valori in un altro insieme  $C$ , l'applicazione  $g(f(x))$  si chiama applicazione composta e si denota anche con il simbolo  $g \circ f(x)$ .

Se per esempio  $A$  è un intervallo temporale,  $f$  è la posizione occupata da Giove all'istante  $x$  (dunque  $B$  è un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$ ) e  $g$  è l'intensità della luce di Giove percepibile dalla Terra,  $g(f(x))$  rappresenta la magnitudo astronomica con cui dalla Terra possiamo osservare Giove nell'istante  $x$ .

Se invece  $x$  indica le coordinate di un punto dell'Oceano,  $f$  è l'altezza del fondale nel punto  $x$  e  $g$  è la funzione di trasferimento di un sonar (non lineare a causa della differente densità dell'acqua)  $g(f(x))$  ci consentirà di valutare la profondità del fondale.

La legge di composizione delle funzioni, come certamente il lettore sa, si presta a un'altra importante estensione: quella di *funzione inversa*. Se  $f : x \rightarrow \frac{1}{x}$ ,  $x$  reale diverso da 0, si ha che  $f \circ f(x) = x$ , vale a dire  $f$  applicata due volte ridà il valore di partenza; è dunque la *applicazione identica*  $x \rightarrow x$  (ve ne sono altre?). Si dice che  $f$  coincide con la sua inversa.

Se due applicazioni  $f$  e  $g$  sono tali che su un certo insieme  $A$  si ha  $g \circ f = I$ , ove  $I$  è l'applicazione identica  $x \rightarrow x$ , si dice che  $g$  è l'*inversa* di  $f$  e si denota anche con  $f^{-1}$ .

Quasi tutte le funzioni che si incontrano in pratica sono "localmente invertibili": l'altezza del sole sull'orizzonte in un dato giorno consente di stimare con buona approssimazione l'ora, ma in un giorno diverso alla stessa altezza corrisponde un'ora diversa. Le applicazioni per le quali se  $f(x) = f(y)$  allora  $x = y$  si dicono iniettive e sono le funzioni dotate di inversa.

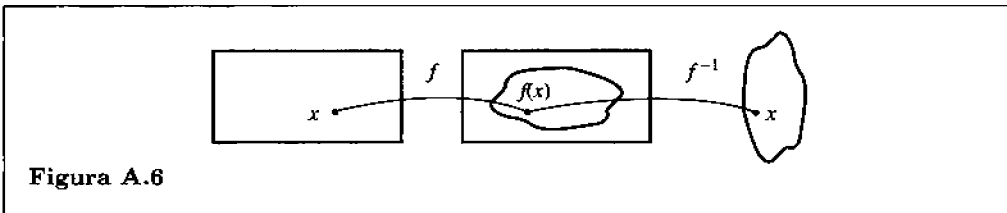


Figura A.6

Ovviamente le funzioni lineari  $f(x) = ax + b$  con  $a \neq 0$  sono invertibili [ $g(y) = \frac{y-b}{a}$ ], così come sono invertibili  $f(x) = e^x$ ,  $f(x) = \ln(x)$ , ma non lo sono le funzioni  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = \text{sen}(x)$ ,  $f_3(x) = \text{tg } x$ , a meno di limitare il loro dominio di definizione:  $[0, +\infty)$  per  $f_1$ ,  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  per  $f_2$  e per  $f_3$ .



## ESERCIZI

**A.1** Dimostrare che per ogni numero reale  $a$  e  $b$

$$(a) \quad |-a| = |a|; \quad (b) \quad |ab| = |a| \cdot |b|; \quad (c) \quad ||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|.$$

**A.2** Calcolare e rappresentare nel piano complesso la somma, la differenza, il prodotto e il quoziente delle seguenti coppie di numeri

$$(a) \quad 3 + 5i, \quad 2 - 3i, \quad (b) \quad 5e^{i\frac{\pi}{12}}, \quad 4e^{i\frac{\pi}{6}},$$

$$(c) \quad 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right), \quad 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \right), \quad (d) \quad 3e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad -2e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

**A.3** Dati i numeri

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3}, \quad z_2 = \frac{e}{\sqrt{2}}(1 - i)$$

scriverli in forma polare e in forma esponenziale, poi calcolarne il quadrato e l'inverso in ciascuna delle forme scritte.

**A.4** Calcolare e rappresentare nel piano complesso i numeri della forma  $z^n$  per  $n = 2, 3, 4, 5, 6$  e

$$(a) \quad z = 1/4 + i\frac{\sqrt{3}}{4}; \quad (b) \quad z = 1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad (c) \quad z = 1 + i\sqrt{3}.$$

**A.5** Trovare modulo, parte reale e coefficiente immaginario dei numeri

$$z_1 = (2 - 3i)^2; \quad z_2 = \left( \frac{1}{3} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) \right)^2; \quad z_3 = (x + iy)^3; \quad z_4 = (1 + i\sqrt{2})^6.$$

**A.6** Calcolare

$$(a) \quad \frac{2 + 3i}{2 - i} + 4i, \quad (b) \quad \frac{1 + i}{1 - i} - (8 - 7i)i,$$

$$(c) \quad \frac{1}{2i}(i^5 - i^{-5}), \quad (d) \quad (1 + i)^7.$$

**A.7** Calcolare

$$(a) \quad (1 + 2i)^5 - (1 - 2i)^5, \quad (b) \quad (2 + i)^7 + (2 - i)^7,$$

$$(c) \quad \frac{(1 + i)^n}{(1 - i)^{n-2}}, \quad (n \text{ intero positivo}).$$

**A.8** Calcolare modulo e argomento di

$$(a) \quad (1 - \sqrt{3}i)^{14}, \quad (b) \quad \frac{1 + \cos \vartheta - i \operatorname{sen} \vartheta}{1 + \cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta}.$$

**A.9** Provare la *seconda disequaglianza triangolare*:

$$||z| - |w|| \leq |z + w|.$$

**A.10** Verificare che l'equazione  $z^n = w$ , ove  $w$  è un numero complesso dato non nullo, ha  $n$  radici distinte (esse si dicono *radici n-esime di w*); esprimere modulo e argomento di tali radici in termini del modulo e dell'argomento di  $w$ , osservare infine che le radici  $n$ -esime sono i vertici di un poligono regolare di  $n$  lati.

A.11 Calcolare (a)  $\sqrt[3]{-1}$ ; (b)  $\sqrt[3]{1+i}$ ; (c)  $\sqrt[5]{\sqrt{3}-1}$ .

A.12 Calcolare la parte reale e la parte immaginaria delle soluzioni dell'equazione

$$(1+i)z^2 = z.$$

A.13 Trovare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni

$$(a) z^5 = 1 + i\sqrt{3}, \quad (b) z^3 = 1, \quad (c) z^4 = -1,$$

$$(d) z^3 = 8 + 8i, \quad (e) z \cdot |z|^2 = i\bar{z}, \quad (f) |z|^3 - 3z^2 - 4|z| = 0.$$

A.14 Individuare gli insiemi dei punti del piano complesso tali che

$$(a) |z-1| < 2, \quad (b) |z-i-1|^2 > 1, \quad (c) \operatorname{Im}(z+2i) < \frac{7}{2},$$

$$(d) \operatorname{Re}(z) > 1, \quad (e) |z-2| = 3|z+2|, \quad (f) \left| \frac{z-2}{z+1} \right| = \sqrt{2}.$$

A.15 Risolvere l'equazione

$$z^4 - 4z^3 + 20z - 25 = 0$$

sapendo che una radice è  $2-i$ .

A.16 Siano  $z, w$  due numeri complessi. Provare che l'area del triangolo del piano complesso di vertici  $0, z, w$  è uguale a  $\frac{1}{2}|\operatorname{Im}(z\bar{w})|$ .

A.17 Siano  $z_1, z_2, z_3$  le radici cubiche di un numero complesso  $z$ . Determinare i possibili valori di  $w$  in modo che risulti

$$z_1 - z_2 = w \cdot z_3.$$

A.18 (a) Provare che i vettori che rappresentano due numeri complessi  $z, w$  sono ortogonali se e solo se  $z\bar{w}$  è immaginario puro.

(b) Si verifichi che per ogni numero complesso  $q$  con  $|q|=1$  si ha che  $(q-1)(\bar{q}+1)$  è immaginario puro. Qual è il teorema di geometria piana espresso da questo risultato?

A.19 (a) Siano  $z, w$  due numeri complessi di modulo 1 ma diversi da 1. Si dimostri che

$$[(z-1)(\bar{w}-1)]^2 \bar{z}w$$

è reale positivo.

(b) Detti  $Z$  e  $W$  i punti che rappresentano i numeri  $z$  e  $w$ , indicato con  $O$  l'origine e con  $A$  il punto che corrisponde al numero 1, si verifichi che il risultato (a) ha la seguente interpretazione geometrica:

$$Z\widehat{O}W = 2Z\widehat{A}W.$$

A.20 Trovare le soluzioni complesse dell'equazione *ciclotomica*

$$z^n + z^{n-1} + \dots + z^2 + z + 1 = 0,$$

ove  $n$  è un intero positivo.

[Si moltiplichi l'equazione per  $z-1$ .]

**A.21** Usufruento dell'esercizio precedente provare che

$$\cos \frac{2}{9}\pi + \cos \frac{4}{9}\pi + \cos \frac{6}{9}\pi + \cos \frac{8}{9}\pi = -\frac{1}{2}.$$

**A.22** Determinare i numeri complessi  $z$  per i quali

$$\begin{cases} |z|^3 = (\operatorname{Re} z)^3 + (\operatorname{Im} z)^3 \\ |z - i| = |z|. \end{cases}$$

**A.23** (a) Dati tre numeri complessi  $z_1, z_2, z_3$ , dire quale significato geometrico ha l'espressione

$$\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

(b) Dimostrare che quattro numeri complessi  $z_1, z_2, z_3, z_4$  si trovano su un cerchio oppure si trovano su una retta se e solo se il loro *birapporto*

$$\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1} : \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_1}$$

è un numero reale.

**A.24** Risolvere l'equazione  $z^3\bar{z} + 3z^2 + 4 = 0$  utilizzando la notazione esponenziale.

**A.25** Si provi che l'applicazione del piano complesso in sé

$$z \rightarrow w = e^z$$

è biunivoca fra la striscia  $\{z : -\infty < \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$  e il semicerchio  $\{w : |w| < 1, \operatorname{Im} w > 0\}$ .

**A.26** (*Polinomi di Chebyshev*). Usufruento della formula di De Moivre esprimere  $\cos n\vartheta$ , ove  $n$  è un intero positivo, come polinomio  $P(\cos \vartheta)$  in  $\cos \vartheta$ . Valutare, in funzione di  $n$ , il grado del polinomio. ▀

**A.27** Trovare il dominio e l'immagine delle funzioni seguenti

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} & [2x] - [x], & \text{(b)} \quad \frac{|x|}{x}, & \text{(c)} \quad |[x]|, \\ \text{(d)} & [\operatorname{sgn}(x)], & \text{(e)} \quad \frac{2}{x + |x|}, & \text{(f)} \quad \frac{|x| + \operatorname{sgn}(x)}{[x]}. \end{array}$$

Si ricorda che  $[a]$  denota la parte intera del numero reale  $a$  e che  $\operatorname{sgn}(a)$  vale 1 se  $a$  è positivo,  $-1$  se  $a$  è negativo, 0 se  $a = 0$ .

# Risoluzione degli esercizi

---

## CAPITOLO 1

1.2.28 (a)  $\sum_{j=1}^5 \frac{j}{j+1}$ ; (b)  $\sum_{j=1}^7 \frac{1}{j}$

(c) si vede che la somma proposta si può scrivere  $\sum_{j=1}^4 \frac{1}{2 - \frac{2j-1}{j}}$  e semplificando si ottiene  $\sum_{j=1}^4 j$ .

1.2.3 I termini intermedi si elidono e rimangono solo il primo e l'ultimo; il risultato è dunque  $\sqrt{n+1} - 1$ .

1.2.5 (a)  $\sum_1^n 2^{j+2} = 8 \sum_1^n 2^{j-1} = 8 \sum_0^{n-1} 2^j = 8(2^n - 1)$ ;

(b)  $\sum_1^n (j+1)^2 = \sum_2^{n+1} j^2 = \sum_1^{n+1} j^2 - 1 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) - 1$ , per la (1.13);

(c)  $\sum_1^n 4(j^2 - j) = \frac{2}{3}n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) = \frac{4}{3}n(n^2 - 1)$ .

1.2.7 Si ha  $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ . Sommando per  $k = 1, 2, \dots, n$  si ottiene  $(n+1)^4 - 1 = 4 \sum_1^n k^3 + 6 \sum_1^n k^2 + 4 \sum_1^n k + n$ . Usando (1.13) e (1.11) si ottiene

$$\sum_1^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left( \sum_1^n k \right)^2.$$

Alternativamente, usando il principio di induzione: l'affermazione è vera per  $n = 1$  e, supponendola vera per  $n$ , si ha

$$\begin{aligned} 1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 &= (1 + \dots + n)^2 + (n+1)^3 = \\ &= (1 + \dots + n)^2 + n(n+1)^2 + (n+1)^2 = \\ &= (1 + \dots + n)^2 + 2(n+1) \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = \\ &= [(1 + \dots + n) + (n+1)]^2 \end{aligned}$$

che è la forma richiesta. Si noti che il risultato può essere scritto anche nella forma più concisa

$$\left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2.$$

- 1.2.9** La successione è limitata in quanto  $\left| \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right| \leq \frac{1}{2}$ , essendo  $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2}$  per  $n \geq 1$ . I termini di posto pari sono positivi e  $\leq \frac{1}{4}$  e quelli di posto dispari sono negativi e  $\geq -\frac{1}{2}$ , quindi  $\frac{1}{4}$  e  $-\frac{1}{2}$ , assunti rispettivamente per  $n = 2$  e  $n = 1$ , sono il massimo e il minimo.
- 1.2.11** (a) Sì, infatti  $\frac{n!}{n^n} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \dots \frac{1}{n} \leq n \cdot \frac{1}{n} = 1$ ;  
 (b) sì, infatti  $\frac{n+300}{n} = 1 + \frac{300}{n} \leq 2$  per  $n \geq 300$ ;  
 (c) è limitata superiormente perché  $a_n < 0$  ma non limitata inferiormente;  
 (d) sì, perché  $|\sin n| \leq 1$  e quindi  $\left| \frac{\sin n}{n} \right| \leq \frac{1}{n} \leq 1$ ;  
 (e) no, perché si possono trovare dei termini maggiori di qualunque  $K > 0$  e minori di qualunque  $M < 0$ ;  
 (f) è limitata inferiormente da zero ma non è limitata superiormente perché ci sono infiniti valori di  $n$  per cui  $\left(\sin \frac{\pi}{2}n\right)^2 = 1$ ;  
 (g) sì, infatti  $\frac{2n+1}{n-1} = 2 + \frac{3}{n-1}$ ;  
 (h)  $\frac{2n^2+1}{n-1} = 2(n+1) + \frac{3}{n-1}$  è limitata inferiormente ma non superiormente;  
 (i) è limitata: si scrive  $\frac{1}{\sqrt{n^2+1+n}}$ ;  
 (l) sì, infatti  $\left| (-1)^n \left(\frac{2}{3}\right)^n \right| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{2}{3}$ ;  
 (m) no.
- 1.2.13** (a) La diseuguaglianza per  $n > 2$  equivale a  $n^2 - 5n + 4 > 0$  ed essendo le radici del trinomio 1 e 4 è verificata per  $n > 4$ ; (b) e (c) si verificano con un calcolo analogo.
- 1.2.15** Dalla formula del binomio si ha  $(1 + \varepsilon)^n > \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2$  e quindi  $\frac{(1+\varepsilon)^n}{n} > \frac{n-1}{2} \varepsilon^2$ , ma l'ultimo membro è definitivamente  $> 1$ , cioè  $(1 + \varepsilon)^n > n$ .
- 1.2.17** (a)  $a_n = k^{2^n}$ ; (b)  $a_n = h^{2^n-1} k^{2^n}$ .
- 1.2.19** Per induzione: si ha  $0 < x_1 < 1$  e se  $0 < x_n < 1$  si ricava  $0 < 1 - x_n^2 < 1$  e, essendo  $x_{n+1} = x_n(1 - x_n^2)$ , tutti i termini della successione appartengono a  $(0,1)$ .

**1.2.21** La successione è costante se  $a_n^2 - 2 = a_n$ , cioè  $a_n = 2$  oppure  $a_n = -1$ . Dalla formula ricorsiva si ricava che se  $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$  si ha  $a_6 = 2$  e se  $\alpha = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$  si ha  $a_4 = -1$ . Se poi è  $a_{n+2} = a_n$ , cioè  $a_n = a_{n+1}^2 - 2 = (a_n^2 - 2)^2 - 2$ , la successione è periodica di periodo 2 oppure è costante. Si ricava l'equazione  $a_n^4 - 4a_n^2 - a_n + 2 = 0$ , di cui si conoscono le radici  $a_n = 2$  e  $a_n = -1$ , quindi si scrive

$$(a_n - 2)(a_n + 1)(a_n^2 + a_n - 1) = 0$$

e si ottengono le radici

$$a_n = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

cioè i due valori che si alternano nella successione di periodo 2.

**1.2.23** (a) Risulta

$$R_n = c_0 \sum_{i=1}^n e^{-ikt_0} = c_0 \frac{e^{-kt_0} - e^{-(n+1)kt_0}}{1 - e^{-kt_0}} = c_0 e^{-kt_0} \frac{1 - e^{-nkt_0}}{1 - e^{-kt_0}},$$

si ha quindi  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = c_0 \frac{1}{e^{kt_0} - 1}$ .

(b)  $R_1 = e^{-1}$  mg/ml,  $R_{10} \simeq 0,5820$  mg/ml;

(c)  $0,03 \leq 0$ ,  $1e^{-0,2t_0}$ ,  $e^{0,2t_0} \leq \frac{10}{3}$ , quindi  $t_0 \leq 5 \ln \frac{10}{3} \simeq 6,02$  h.

**1.2.25** (a)  $\frac{3}{2}$ ; (b) si può scrivere  $a_n = \sum_{j=0}^n 2 \cdot (-10)^{-j} = \sum_{j=0}^n 2 \cdot (-1/10)^j = 20/11$ .

**1.2.27** Risolviamo in un caso particolare; il caso generale è del tutto analogo

$$\begin{aligned} x &= 2,45\overline{376} = 2 + \frac{45}{10^2} + \frac{376}{10^5} + \frac{376}{10^8} + \frac{376}{10^{11}} + \dots = \\ &= 2 + \frac{45}{10^2} + \frac{376}{10^5} \left( 1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \dots \right) = \\ &= 2 + \frac{45}{10^2} + \frac{376}{10^5} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} \right) = \\ &= 2 + \frac{45}{10^2} + \frac{376}{10^5} \cdot \frac{10^3}{10^3 - 1} = \\ &= 2 + \frac{45}{10^2} + \frac{376}{10^2(10^3 - 1)} = \\ &= \frac{(2 \cdot 10^5 + 45 \cdot 10^3 + 376) - (2 \cdot 10^2 + 45)}{10^2(10^3 - 1)} = \\ &= \frac{245376 - 245}{10^2(10^3 - 1)} = \frac{245376 - 245}{99900}. \end{aligned}$$

**1.2.29**  $A_0A_1 = 1/2$  e la lunghezza di ogni segmento si ricava dal precedente moltiplicando per  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; si ha quindi

$$l = \frac{1}{2} + \frac{1\sqrt{3}}{2 \cdot 2} + \frac{1\sqrt{3}\sqrt{3}}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^j = 2 + \sqrt{3}.$$

**1.2.30** (a), (b), (d), (e) convergono per il criterio del rapporto; (c) diverge; (f) diverge perché  $a_n > 1/(n+1)$ ; (g) converge perché  $a_n < 1/\sqrt{n^4} = 1/n^2$ ; (h) diverge in quanto  $a_n = \frac{n+1}{2n^2} > \frac{1}{2n}$ ; (i) converge per il criterio della radice:  $\sqrt[n]{a_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)!} < \frac{1}{2}$ ; (l) si confronta con  $\sum \frac{1}{n^2}$ ; (m) ed (n) convergono.

**1.2.31** (a)  $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ , da cui  $\sum_1^{\infty} a_n = 1$ ;

(b)  $a_n = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} \right]$ , quindi  $\sum_1^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$ ;

(c)  $a_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$ , cioè  $\sum_1^{\infty} a_n = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{4}$ ;

(d)  $\sum_1^{\infty} a_n = \frac{1}{4}$ .

**1.2.33** Si ha

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{(N+1)!} \sum_{j=N+1}^{\infty} \frac{(N+1)!}{j!} < \frac{1}{(N+1)!} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(N+1)^i} = \frac{1}{(N+1)!} \frac{N+2}{N+1}.$$

La (1.21) si ottiene osservando che da  $N(N+2) < (N+1)^2$  si ricava

$$\frac{N+2}{N+1} \frac{1}{(N+1)!} < \frac{1}{N \cdot N!}.$$

**1.2.35** La deduzione non è corretta, in quanto non è lecito sottrarre termine a termine delle somme infinite (nella fattispecie divergenti). Operando invece sulle somme parziali si trova

$$\sum_{n=1}^N \frac{a}{cn(n+1)} = \left( 1 - \frac{1}{N+1} \right) \frac{a}{c}$$

da cui segue la correttezza del risultato.

**1.2.36** (a), (b), (d) ed (h) convergono (criterio del rapporto), (c) e (g) convergenti (criterio della radice), (e) diverge, (f) converge in quanto  $\frac{1}{3^n} < \frac{1-\sin n}{3^n} < \frac{2}{3^n}$ .

**1.2.37** A ogni passo la lunghezza  $l_n$  della curva viene moltiplicata per  $4/3$ , dunque  $l_n = 3 \cdot (4/3)^n$  è illimitata. Per le aree invece a ogni passo si aggiungono tanti triangoli equilateri quanti sono i lati della spezzata e ciascuno ha area pari a

1/9 del precedente:

$$A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} = \alpha, \quad A_1 = \alpha \left(1 + \frac{3}{9}\right), \quad A_2 = \alpha \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{3 \cdot 4}{9^2}\right) = \alpha + \frac{\alpha}{3} \left(1 + \frac{4}{9}\right),$$

$$A = \alpha + \frac{\alpha}{3} \left(1 + \frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2\right), \dots$$

e quindi l'area della figura risulta

$$A = \alpha + \frac{\alpha}{3} \sum_0^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = \alpha + \frac{\alpha}{3} \frac{1}{1 - 4/9} = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

**1.2.39**  $\{a_n\}$  è infinitesima (Proposizione 1.12) dunque esiste  $\nu$  tale che  $a_\nu < a_{\nu-1}$ . Se  $n > \nu$  si ha

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \dots \frac{a_\nu}{a_{\nu-1}} \cdot a_{\nu-1} \leq \left(\frac{a_\nu}{a_{\nu-1}}\right)^{n-\nu+1} a_{\nu-1}$$

e quindi la serie data converge, per confronto con la serie geometrica di ragione  $a_\nu/a_{\nu-1}$ .

**1.2.41** (a) no: è sufficiente il controesempio  $a_n = \frac{1}{n^2}$ ; (b) se è  $\sqrt{a_n} < \frac{1}{n}$ ,  $\frac{\sqrt{a_n}}{n} \leq \frac{1}{n^2}$ ; per gli altri termini è  $\sqrt{a_n} \geq \frac{1}{n}$ , quindi  $a_n \geq \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ ; entrambe le serie convergono, quindi converge anche la serie costruita sostituendo ai termini l'una o l'altra maggioranza. La serie data converge per confronto.

**1.2.43** Si ha

$$\frac{a_n}{1 + n^2 a_n} = \frac{1}{\frac{1}{a_n} + n^2} \leq \frac{1}{n^2},$$

quindi converge per confronto.

**1.2.45** (a) Dato  $\varepsilon > 0$ , per l'Esercizio 1.2.15, si ha  $\sqrt[n]{n} < 1 + \varepsilon$  definitivamente; pertanto  $\frac{1}{n \sqrt[n]{n}} > \frac{1}{1 + \varepsilon} \cdot \frac{1}{n}$  definitivamente e quindi la serie diverge per confronto con la serie armonica.

(b) Si può scrivere

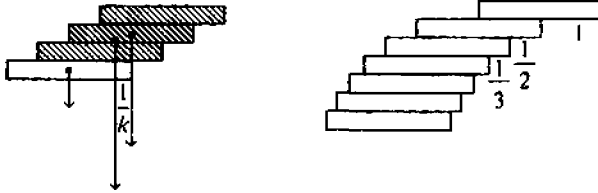
$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-\sqrt{n}} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m^2}^{(m+1)^2-1} 3^{-\sqrt{n}} \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{3^m}$$

e quindi la serie converge per confronto con la serie dell'Esempio 1.13(a).

**1.2.47** Essendo  $a_1 > 0$  si ricava  $a_n > 0$ , quindi è possibile utilizzare il criterio del rapporto ottenendo  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2}$  definitivamente. Per la seconda serie questo criterio non fornisce informazioni perché il rapporto risulta  $\leq 1$ . Il termine  $n$ -esimo può essere scritto in forma esplicita  $a_n = \frac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}} = \frac{a_1}{1+(n-1)a_1}$ ; per  $a_1 = 1$  si riconosce la serie armonica, divergente.



- 1.2.49** Se una pila di  $k - 1$  monete di raggio unitario, comunque disposta ma in equilibrio, viene collocata sopra una identica moneta orizzontale e la pila viene spostata finché il suo centro di gravità giace esattamente sopra il bordo della  $k$ -esima moneta, allora non è difficile verificare che il baricentro dell'intera configurazione si troverà a una distanza pari a  $1/k$  dal bordo della  $k$ -esima moneta.



Questa configurazione rende massimo lo spostamento della pila di  $k - 1$  monete rispetto all'ultima. Applicando questo procedimento per blocchi di  $1, 2, \dots, n - 1$  monete otteniamo che le distanze tra le verticali passanti per i centri delle monete sono (dall'alto al basso)  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n-1}$ .

- 1.3.1** (a), (b), (d) convergono per il criterio di Leibnitz ((a) è infinitesima perché se  $n > 1/\varepsilon$  allora  $\frac{n}{n^2+1} < \frac{n}{n/\varepsilon+1} < \varepsilon$ , (b) è infinitesima per l'Esercizio 1.2.15, per (d) si noti che per  $n > 51$  allora  $1/(2n - 101)$  è positiva, decrescente e infinitesima (Osservazione 1.16)). La serie (c) è invece a termini positivi e converge per confronto con  $3 \sum 1/n^2$ .
- 1.3.3** (a) assolutamente convergente, (b) assolutamente convergente, (c) convergente ma non assolutamente convergente, come si vede dal confronto con la serie di termine  $a_n = \frac{1}{2^n}$ .
- 1.3.5**  $-1 < x^2 + x - 1 < 1$  per  $-2 < x < -1$  e anche  $0 < x < 1$ ; la somma, che è nulla per  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ , per gli altri valori di  $x$  per cui la serie convergente è  $S = \frac{1}{2-x^2-x}$ .
- 1.3.7** La disequazione data è vera per ogni  $\alpha$ , quindi si ha

$$\left| 2^n \operatorname{sen} \left( \frac{x}{3^n} \right) \right| \leq 2^n \frac{|x|}{3^n} = \left( \frac{2}{3} \right)^n \cdot |x|;$$

poiché la serie geometrica  $\sum \left( \frac{2}{3} \right)^n \cdot |x|$  converge, per il criterio del confronto la serie data è assolutamente convergente per ogni valore di  $x$ .

- 1.3.9**  $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$  converge, e convergono per confronto anche le serie di termine  $|a_{2n}|$  e  $|a_{2n+1}|$ ; si conclude utilizzando la Proposizione 1.17.
- 1.3.11** La serie  $\sum x^n$  è assolutamente convergente per  $|x| < 1$ , se  $-1 < x < 0$  possiamo allora scomporla come differenza di due serie a termini positivi alle quali si applica la (1.15):

$$\sum_0^{\infty} x^n = \sum_0^{\infty} x^{2n} - \sum_0^{\infty} (-x)^{2n+1} = \frac{1}{1-x^2} - \frac{-x}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}.$$

**1.3.13** La serie converge per il criterio del rapporto e si ha

$$a_{k+1} = \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} \frac{a_k}{9} \leq \frac{\sqrt{2}}{9} a_k$$

e dalla stima dell'Esercizio 1.3.12

$$S - s_n = R_n \leq \frac{\sqrt{2}}{9 - \sqrt{2}} \frac{\sqrt{n}}{3^{2n}} < \frac{1}{5} \frac{\sqrt{n}}{9^n}.$$

Si ha  $R_n < 10^{-3}$  se  $\sqrt{n} \leq \frac{9^n}{200}$  il che è vero per  $n \geq 3$ . Calcolando si ha  $s_3 \simeq 0,13095$ .

**1.3.15** Si può scrivere

$$\frac{1}{(2k)^3 - 2k} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k+1} \right) - \frac{1}{2k},$$

quindi la serie può essere posta nella forma

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ \sum \left( \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} \right) - \sum \left( \frac{1}{2k} - \frac{1}{2k+1} \right) \right] = \\ & = \frac{1}{2} \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots \right) - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots \right) \right] = \\ & = \frac{1}{2} [\log 2 - (1 - \log 2)] = \log 2 - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**1.3.17** Seguendo la traccia fornita, si deve provare che  $\sum_{n \in P} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^k}$  si può scrivere come

$\sum_{m, n \geq 2} \frac{1}{m^n}$ . Si deve quindi trovare una corrispondenza biunivoca fra le coppie ordinate  $(m, n)$ , con  $m, n \geq 2$ , e le coppie  $(k, l)$  con  $k \in P$  e  $l \geq 1$ , ove in tale corrispondenza si abbia  $m^n = k^l$ . Se  $m$  non appartiene a  $P$  poniamo  $(m, n)$  in corrispondenza con  $(m^n, 1)$ , se invece  $m = a^b$ , e dunque appartiene a  $P$ , si porrà  $(m, n)$  in corrispondenza con  $(a^n, b)$ . Ogni coppia è considerata una e una sola volta da una parte e dall'altra. Il risultato segue poi dalla facile constatazione che  $\sum_{m, n \geq 2} \frac{1}{m^n} = \sum_{m \geq 2} \frac{1}{m(m-1)} = 1$ .

**1.4.1** (a)  $\left| \frac{n+2}{n-1} - 1 \right| < \varepsilon$  è verificata definitivamente ( $n > 1 + 3/\varepsilon$ ); (b)  $\frac{n^2+1}{n} > M$  è verificata definitivamente ( $n > \frac{M+\sqrt{M^2-4}}{2}$ ); (c)  $\frac{1-n^2}{n} < -M$  è verificata definitivamente; (d) i termini si scrivono come  $\frac{1}{2} \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)$  e dunque per  $n > \frac{2}{\varepsilon}$  si verifica la definizione.

**1.4.3** (a), (b), (c), (g), (i) decrescenti; (h) crescente; (d), (e), (f), (l), (m) non monotone.

**1.4.5** Se  $|a_n| \leq k$  si ha  $|a_n b_n| \leq k|b_n|$ ; si usi la Proposizione 1.32, pagina 49.

**1.4.7** (a) converge a 0, (b) converge a  $1/3$  (si usi la (1.13)), (c) diverge; (d) costantemente uguale a  $-1$ .

- 1.4.10 (a) Se  $b_n \geq K$  e per ogni  $M$  definitivamente si ha  $a_n \geq M$  allora  $a_n + b_n \geq M + K$  definitivamente; il caso (b) è analogo;  
 (c) per ogni  $\varepsilon > 0$  si ha definitivamente  $a_n \geq \frac{1}{\varepsilon}$  e dunque  $\frac{1}{a_n} \leq \varepsilon$ ; il caso (d) è analogo;  
 (e), (f) si usi la permanenza del segno (Proposizione 1.33, pag. 50).

1.4.11 (a) 0; nei casi (b) e (c) il limite è 0 se  $p \leq 1$ , è  $+\infty$  se  $p > 1$ .

1.4.12 Se  $\sqrt[n]{a} = 1 + h_n$  si ha  $h_n > -1$  e dunque  $a = (1 + h_n)^n \geq 1 + nh_n$ , quindi  $nh_n$  è limitata.

1.4.13 Fissato  $M > 0$ , per  $n > M$  si può scrivere

$$\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{\frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot M}{M^M}} \sqrt[n]{M^M (M+1)(M+2) \dots n};$$

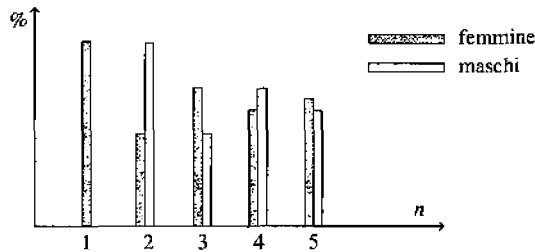
la prima radice tende a 1 e la seconda è maggiore di  $M$ .

1.4.14 Si ha

$$a_n = a_1 + \frac{p-q}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots (-1)^n \frac{1}{2^{n-2}} \right)$$

da cui si ricava  $\lim a_n = (p + 2q)/3$ .

Nel caso in cui  $p = 0$   $q = 1$  si ha dunque  $\lim a_n = 2/3$ . La figura seguente mostra l'approssimarsi della percentuale delle femmine e dei maschi ammalati alla configurazione di equilibrio. Si noti che il semplice modello qui considerato non richiede che nella popolazione il numero di maschi sia uguale al numero delle femmine.



- 1.4.15 (a) Se  $\alpha = 1/2$  la successione è costante, se  $\alpha < 1/2$  è decrescente e tende a 0, se  $\alpha > 1/2$  è crescente e tende a  $+\infty$ ;  
 (b) si ha  $0 < a_{n+1} = a_n(1 - a_n) < a_n \leq 1$ ; la successione pertanto è decrescente e limitata e tende a zero. Per  $\alpha > 1$  il comportamento è molto complesso;  
 (c) si ha  $a_{n+1} - a_n = 1 - 2a_n + a_n^2 = (1 - a_n)^2 \geq 0$  dunque la successione è monotona e ammette limite (finito o infinito). Se il limite è un numero reale  $L$  si deve avere  $L = 1 - L + L^2$  e quindi  $L = 1$ . Se  $\alpha > 1$  allora il limite è  $+\infty$ , se  $0 \leq \alpha < 1$  il limite è 1. Si vede poi che per  $\alpha < 0$  si ha  $a_1 > 1$  e dunque il limite è  $+\infty$ ;  
 (d) se  $0 \leq \alpha \leq 1$  si vede che la successione è crescente, limitata e ha limite 1. Anche in questo caso per altri valori di  $\alpha$  il comportamento è complicato.

**1.4.16** Con riferimento alla Figura 1.21 e alle notazioni usate si ha  $OC = R_n$ ,  $OH = r_n$ ,  $OH' = r_{n+1} = \frac{1}{2}(OH + OC) = \frac{1}{2}(r_n + R_n)$ , mentre dal teorema di Euclide  $A'O = R_{n+1} = \sqrt{OC \cdot OH'} = \sqrt{R_n r_{n+1}}$ . Da queste formule  $r_n < r_{n+1} < R_n$  e anche  $r_{n+1} < R_{n+1} < R_n$ , dunque le successioni  $r_n$ ,  $R_n$  sono monotone e limitate; siano  $L$  e  $L'$  i rispettivi limiti. Da  $r_{n+1} = \frac{r_n + R_n}{2}$  si ricava  $L' = L$ , mentre da  $r_n < \frac{1}{\pi} < R_n$  si ottiene  $L = \frac{1}{\pi}$ . Si noti che inizializzando le successioni con il quadrato di lato  $\frac{1}{2}$ , ( $r_2 = \frac{1}{4}$ ,  $R_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ ) dopo 4 iterazioni si ha  $\frac{1}{r_6} \simeq 3,144$ ,  $\frac{1}{R_6} \simeq 3,140$  dunque solo la seconda cifra corretta nello sviluppo decimale di  $\pi$ . Troveremo in seguito metodi più efficienti per il calcolo di  $\pi$ .

- 1.4.17** (a)  $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$  e quindi tende a  $1/2$ ;  
 (b)  $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(2n)^2}$  è minore di  $n \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n}$  e pertanto tende a 0;  
 (c)  $\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$  è maggiore di  $n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} = \sqrt{\frac{n}{2}}$  e quindi tende a  $+\infty$ .

**1.4.19** Si ha

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n},$$

applicando tale disuguaglianza agli  $n+1$  numeri indicati:

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot 1 \leq \frac{n + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} + 1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1},$$

e prendendo la potenza  $(n+1)$ -esima di ambo i membri si ha la tesi.

**1.4.20** Indichiamo con  $a_n$  i termini della prima serie proposta e con  $b_n$  quelli della seconda e denotiamo con  $l$  (ove esiste) il limite per  $n \rightarrow \infty$  del rapporto  $\frac{b_n}{a_n}$ .

- (a) Si ha  $l = +\infty$ ;  
 (b) si ha  $l = 1$ ;  
 (c)  $\frac{b_n}{a_n} = 1 - \frac{n}{2^n}$ , per cui  $l = 1$ ;  
 (d) si ha  $l = 1$ ;  
 (e)  $a_n$  si può porre nella forma  $\frac{1}{n + \sqrt{n^2 - 1}}$  per cui  $l = 2$ ;  
 (f) ponendo  $a_n$  nella forma  $\frac{1}{(n+1)^{2/3} + (n(n+1))^{1/3} + n^{2/3}}$  si ha  $l = 3$ .

In conclusione negli esempi (b), (c), (d), le serie sono asintoticamente equivalenti, nei casi (a), (e), (f) non lo sono; comunque nei casi (e), (f) è ancora vero che hanno lo stesso comportamento.

**1.4.21** Il limite è 0: ovviamente per  $x = 0$ , per confronto con il termine  $\frac{1}{n^2 x^2}$  per  $x < 1$ , per confronto con  $\frac{1}{n^2}$  per  $x = 1$  e per confronto con  $\frac{x}{1+n^2} \leq x \cdot \frac{1}{n^2}$  per  $x > 1$ . Con gli stessi confronti si vede che la serie  $\sum a_n$  è assolutamente convergente per ogni  $x$ .

## CAPITOLO 2

- 2.1.1** (a)  $R = 1$ ; (b)  $R = 1/3$ ; (c)  $R = 2$ ; (d)  $R = 3$ ; (e)  $R = 1/2$ ; (f)  $R = 1$ ;  
 (g)  $R = \infty$ ; (h)  $R = 1$ ; (i)  $R = 1$ ; (l)  $R = 4$ .

2.1.3 (a)  $R = e$ ; (b)  $R = 2$ ; (c)  $R = 1/2$ ; (d) usando il criterio della radice si trova  $R = 1$ ; (e)  $R = 1$ ; (f)  $R = 1$ ; (g)  $R = 1$ ; (h)  $R = \infty$ ; (i)  $R = \frac{1}{2}$ ; (l)  $R = \sqrt{\frac{3}{2}}$ .

$$2.1.5 \quad \ln(1+x-2x^2) = \ln(2x+1)(1-x) = \ln(2x+1) + \ln(1-x) = \\ = \sum (-1)^{n-1} \frac{(2x)^n}{n} + \sum (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n - 1}{n} x^n, \text{ se } |x| < \frac{1}{2}.$$

2.1.7 (a) Dalla (2.18) segue, ponendo  $m = 1$ :

$$\ln 2 = \frac{2}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{9^n}, \\ R_9 = \frac{2}{3} \sum_{n=9}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{9^n} < \frac{2}{3} \frac{1}{19} \frac{1}{9^9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{9^n} = \frac{1}{12 \cdot 19 \cdot 9^8} < \frac{2}{10^{10}}.$$

Eseguendo la somma dei primi 10 termini della serie (ma è meglio farsi assistere da un computer o almeno da una calcolatrice) si trova  $\ln 2 \simeq 0,693147180\dots$ . Di fatto oggi giorno ogni macchina da calcolo ha microprogrammata la funzione logaritmo (su basi *molto diverse* da quelle qui considerate) e quindi questo esercizio ha solo il valore di una reminiscenza storica, non priva di un certo fascino.

(b) Sempre dalla (2.18) con  $m = 4$  segue

$$\ln 5 = 2 \ln 2 + \frac{2}{9} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{81} + \frac{1}{5} \frac{1}{81^2} + \dots \right).$$

$$\text{Ma } R_6 = \frac{2}{9} \sum_{n=6}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{1}{81^n} < \frac{2}{9} \frac{1}{13} \frac{1}{81^6} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{81^k} < \frac{1}{4 \cdot 10 \cdot 81^6} < \frac{2}{10^{10}}.$$

Siccome  $\ln 10 = \ln 2 + \ln 5 = 3 \ln 2 + \frac{2}{9} \sum \frac{1}{2n+1} \frac{1}{81^n}$ , usufruendo del risultato in (a) possiamo calcolare

$$x_0 = 2 \sum_{n=0}^8 \frac{1}{2n+1} \frac{1}{9^n} + \frac{2}{9} \sum_{n=0}^5 \frac{1}{2n+1} \frac{1}{81^n},$$

e si ha  $\ln 10 \simeq x_0$  con un errore inferiore a  $8 \cdot 10^{-10}$ . Da questo si ricava facilmente il valore approssimato  $\frac{1}{x_0}$  di  $M = \frac{1}{\ln 10}$  e si ha  $|M - 1/x_0| < 10^{-9}$ . Il calcolo esplicito di  $\frac{1}{x_0}$  fornisce  $M \simeq 0,434294481\dots$

(c) Dalla (2.18), troncata drasticamente al primo termine:

$$\log_{10}(m+1) - \log_{10} m = \frac{2M}{2m+1} + \Delta,$$

e per l'errore  $\Delta$  abbiamo la seguente stima

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{2M}{2m+1} \left( \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(2m+1)^2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(2m+1)} + \dots \right) < \\ &< \frac{2M}{3(2m+1)^3} \left( 1 + \frac{1}{(2m+1)^2} + \frac{1}{(2m+1)^4} + \dots \right) = \\ &= \frac{2M}{3(2m+1)(4m^2+4m)} < \frac{2M}{3 \cdot 2 \cdot 4m^3}.\end{aligned}$$

Siccome  $2M < 1$  e  $m \geq 10^3$  si conclude  $\Delta < \frac{10^{-9}}{24} < \frac{1}{2} 10^{-10}$ . Perciò, noto  $\log_{10} 10^3 = 3$  si costruisce  $\log_{10}(10^3 + 1)$  con un errore che non supera  $\Delta$ , noto  $\log(10^3 + k)$  si costruisce  $\log_{10}(10^3 + k + 1)$  con un errore al più pari a  $\Delta$ ; tale errore accumulandosi ai precedenti dà un errore globale  $< 10^4 \Delta < 10^{-6}/2$ .

**2.1.9** (a)  $R = 1$ ;

$$\begin{aligned}\text{(b)} \quad (1-x^2) \sum_n^{\infty} (k+1)x^{2k} &= \sum_{k=n}^{\infty} (k+1)x^{2k} - \sum_{k=n}^{\infty} (k+1)x^{2k+2} = \\ &= \sum_n^{\infty} (k+1)x^{2k} - \sum_{n+1}^{\infty} kx^{2k} = \\ &= (n+1)x^{2n} + \sum_{k=1}^{\infty} x^{2(k+n)} = \\ &= (n+1)x^{2n} + \frac{x^{2n+2}}{1-x^2} = nx^{2n} + \frac{x^{2n}}{1-x^2}.\end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad R_n(x) = \frac{nx^{2n}}{1-x^2} + \frac{x^{2n}}{(1-x^2)^2}, \quad |x| < R, \quad n \geq 0 \text{ ponendo } n=0 \text{ si ha}$$

$$S = \frac{1}{(1-x^2)^2}.$$

**2.1.11** La successione  $\frac{a^{\sqrt{n}}}{a^{\sqrt{n-1}}}$  si scrive  $a^{\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}}$ , tende quindi a 1 e dunque  $R = 1$ .

**2.2.1** (a) Diverge perché la serie degli  $a_n$  converge, ma quella dei  $b_n$  diverge;

(b) converge;

(c) se  $|a| \sqrt{2} < 1$  è assolutamente convergente. Se  $|a| > \frac{1}{\sqrt{2}}$  diverge, se  $|a| = \frac{1}{\sqrt{2}}$  è periodica di periodo 8.

**2.2.3** (a)  $|z| < 2$ ; (b)  $|z-3| < 5$ ; (c)  $|z| < 1$ ; (d)  $|z+i| < \sqrt{2}$ ; (e) ogni  $z$ ;  
(f)  $|z-i| < \frac{1}{3}$ .

**2.2.5**  $[e \cos(-1), e \sin(-1)]$ ;  $[e^3 \cos 2, e^3 \sin 2]$ ;  $[e^{-4}, 0]$ ;  $[-\sin \sqrt{5}, \cos \sqrt{5}]$ .

**2.2.7** Scrivendo  $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$  si deve avere  $e^{\rho^2 \cos 2\theta} = 1$  e quindi  $\rho^2 \cos 2\theta = 0$ , cioè  $\theta = \pm \pi/4$ , il luogo è dato dalla coppia di rette  $y = \pm x$ .

Nel secondo caso allo stesso modo si ottengono le rette  $x = 0$  e  $y = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}x$ .

2.2.9 Si scrive  $\cos 3x = \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2}$ ,  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ , la verifica è immediata.

2.3.1 (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ ,  $|x| < 1$ ;

(b)  $3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ ,  $|x| < 1$ ;

(c)  $2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n x^n$ ,  $|x| < 1/3$ ;

(d)  $-2x \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ ,  $|x| < 1$ .

2.3.3 (a) Essendo  $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ , si avrà  $x \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n}$  per  $|x| < 1$ ;

(b)  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n-1}}$ ,  $|x| < 2$ ;

(c)  $-3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ,  $|x| < 1$ ;

(d)  $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n}$ ,  $|x| < 1$ .

2.3.5 (a)  $x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \dots$  (per ogni  $x$ );

(b)  $-x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x^3 - \dots$ ,  $|x| < 1$ ;

(c)  $1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$ ,  $|x| < 1$ .

2.3.7 Basta eseguire il prodotto di Cauchy delle serie note  $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$

e  $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ .

2.3.9 Basta eseguire il prodotto di Cauchy delle serie  $\sum a_n x^n$ ,  $\sum x^n$ , convergenti per  $|x| < 1$ .

2.3.11 Dall'Esempio 2.13 (a) si ha

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$$

e quindi

$$\frac{x}{(1-x)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^n k x^k x^{n-k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} - \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}.$$

**CAPITOLO 3**

**3.1.1** Fissato  $n$  sia  $x_i = i/n$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Si ha

$$s_n = \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{i-1}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n-1)}{2}, \quad S_n = \frac{1}{n} \sum_1^n \frac{i}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2},$$

da cui  $s_n \rightarrow 1/2$ ,  $S_n \rightarrow 1/2$ .

**3.1.3** Ogni poligono è scomponibile in triangoli e ciascuno di questi in triangoli rettangoli. L'area di un triangolo rettangolo è la metà del rettangolo dei cateti per la condizione 3.

**3.1.5** No. Si consideri per esempio la funzione che vale 1 sui razionali e  $-1$  sugli irrazionali (simile all'Esempio 3.8).

**3.1.7** Se  $f, g$  sono non negative, limitate da  $k > 0$ , e se  $s'_n, s''_n, s_n, S'_n, S''_n, S_n$  sono le somme inferiori e superiori di  $f, g, fg$  relative a  $\pi_n$ , si maggora  $S_n - s_n$  con  $k(S'_n - s'_n + S''_n - s''_n)$ .

**3.1.9** Se per esempio il punto  $\xi$  che si aggiunge sta fra  $x_0$  e  $x_1$  allora  $S - S' = M_1(x_1 - x_0) - M'_1(\xi - x_0) - M''_1(x_1 - \xi)$  ove  $M_1, M'_1, M''_1$  sono gli estremi superiori di  $f$  in  $[x_0, x_1]$ ,  $[x_0, \xi]$ ,  $[\xi, x_1]$  e sono tutti minori o uguali a  $K$ . Dunque  $S - S' \leq K(x_1 - x_0) + K(\xi - x_0) + K(x_1 - \xi) = 2K(x_1 - x_0) \leq 2K|\pi|$ .

**3.1.11** Detto  $I$  l'integrale di  $f$  su  $[a, b]$ , si ha

$$S_n - I = (S_n - S'_n) + (S'_n - I) \leq (S_n - S'_n) + (S_0 - I).$$

Per ipotesi  $S_0 - I < \varepsilon$  per l'Esercizio 3.1.10, siccome  $|\pi_n| \leq h$  (e dunque in ciascun intervallo di  $\pi_n$  cade al più un punto di  $\pi_0$ ), si ha  $S_n - S'_n \leq 2NK |\pi_n|$ .

**3.1.13** Si ha  $\sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot \frac{1}{x_i x_{i-1}} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{1}{x_{i-1}} - \frac{1}{x_i} \right) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$ .

**3.1.15** Le funzioni  $x^3$  e  $x \cos x$  sono dispari, l'intervallo  $[-1, 1]$  è simmetrico rispetto ad  $x = 0$ , quindi gli integrali sono nulli;

$$\int_{-\pi}^{3\pi} (1 + \sin x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \sin x) dx = 2\pi$$

perché il contributo del termine  $\sin x$  è nullo;

$$\int_{-1}^1 (\operatorname{tg} x + 1) dx = 2.$$

**3.2.1** (a)  $\frac{x+1}{x-1}$  è limitata;

(b)  $\frac{x-1}{x+2}$  è limitata;

(c) la funzione coincide con  $\frac{4x}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})^2}$ .

**3.2.3**  $(1, -1/2), (-2/3, 49/27)$ .



3.2.5 (a)  $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; (b)  $x = \pm 2$ ; (c)  $x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$  oppure  $x = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$ ; (d)  $x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$ .

3.2.7 (a) Per  $x > 0$  si ha  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ;

$$(b) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h+2} - \frac{1}{x+2}}{h} = \frac{-1}{(x+2)^2};$$

(c) in modo analogo scrivendo la funzione come  $x^2$  oppure  $-x^2$  per  $x > 0$  e per  $x < 0$ ; per  $x = 0$  si ha derivata uguale a zero perché  $\lim_{h \rightarrow 0^+} = \frac{h^2 - 0}{h} = 0$  e

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} = \frac{-h^2 - 0}{h} = 0.$$

3.2.9 Scrivendo  $t = 1 + \delta$  si verifica che la funzione è continua in  $x_0$  perché

$$|f(tx_0) - f(x_0)| = \delta |f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{per} \quad \delta < \frac{\varepsilon}{|f(x_0)|}.$$

3.2.11 La funzione è continua anche in  $x = 1$  se  $a + b = \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x + 1)$  ed è derivabile nello stesso punto se coincidono derivata destra e sinistra ( $a = -1$  e  $b = 5$ ).

3.2.13 Prendiamo la parabola  $y = x^2$  e osserviamo che il coefficiente angolare  $M_{PQ}$  della secante per due punti  $P, Q$  su di essa, di ascissa  $x_P, x_Q$ , è

$$M_{PQ} = \frac{x_P^2 - x_Q^2}{x_P - x_Q} = x_P + x_Q.$$

Dunque  $M_{AC} + M_{AB} - M_{CB} = 2x_A$  che coincide con la derivata di  $x^2$  per  $x = x_A$ , cioè con  $m_A$ .

3.2.15 Si ha  $f(x) = \sum_0^{\infty} (-1)^k x^{2k+2}/k! = \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} x^{2k}/(k-1)!$

Quindi  $c_{2m+1} = 0$  per ogni  $m$  e quindi le derivate di ordine dispari soddisfano la condizione. Inoltre  $c_{2m} = (-1)^{m-1} \cdot (2m)!/(m-1)!$  e quindi

$$\frac{c_{2m}}{c_{2m-2}} = \frac{(-1)^{m-1}(2m)!}{(m-1)!} \frac{(m-2)!}{(-1)^{m-1}(2m-2)!} = -\frac{2(2m)(2m-1)}{(2m-2)}.$$

3.2.17 Posto  $y(x) = \sum a_n x^n$  si ha  $xy = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n$ ,  $y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$ ,

cioè  $y'' + xy = 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n-1} + (n+2)(n+1)a_{n+2})x^n = 0$  da cui  $a_2 = 0$ ,

$$a_{n+2} = -\frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \quad \text{per } n \geq 1.$$

Quindi

$$a_{3k} = \frac{(-1)^k a_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \dots (3k-4)(3k-3)(3k-1)(3k)}$$

$$a_{3k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \dots (3k-3)(3k-2)(3k)(3k+1)}$$

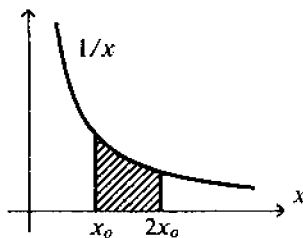
$$a_{3k+2} = 0.$$

$$\begin{aligned}
 3.3.1 \quad (a) & \frac{x^4}{8} + x^3 - 4x + C; & (b) & -\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + C; \\
 (c) & \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + C; & (d) & -\frac{1}{2x^2} + \frac{x^2}{2} - e^{-x} + C; \\
 (e) & x + \ln|x+1| + C; & (f) & \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 6 \ln|x+1| + C.
 \end{aligned}$$

$$3.3.3 \quad (b-a)^3/6.$$

$$3.3.5 \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = H_n.$$

3.3.7 0, dunque l'area che sta sotto il grafico di  $1/x$  tra le ascisse  $x_0$  e  $2x_0$  è costante (vale  $\ln 2$ ).



$$3.3.9 \quad P(x) = 14x^3 - 27x^2 + 13x.$$

$$3.3.11 \quad \text{Si può scrivere } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[ \left(\frac{1}{n}\right)^p + \left(\frac{2}{n}\right)^p + \dots + 1 \right] = \int_0^1 x^p dx.$$

$$3.3.13 \quad \text{Se } F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{e} \quad f_T = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad \text{allora}$$

$$F(x) = \int_a^x [f(t) - f_T] dt + (x-a)f_T$$

ma il primo addendo è periodico di periodo  $T$  perché da

$$\frac{d}{dx} \int_x^{x+T} f(t) dt = f(x+T) - f(x) = 0$$

$$\text{si ricava } \int_x^{x+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt.$$

3.3.14 Dalla serie  $\sin x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} - \dots$  si ricava integrando per serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}.$$

3.3.15 (a) È la serie geometrica di ragione  $x = -\frac{1}{2}$ ;

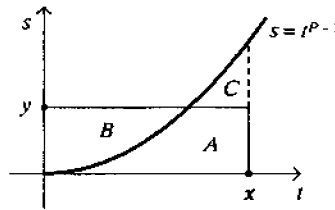
(b) si ricava per derivazione dalla serie geometrica  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ,  $|x| < 1$  (Teorema 3.21);

(c) derivando nuovamente si trova  $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$ , cioè

$$\frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{1}{(1-x)^3};$$

moltiplicando questa uguaglianza prima per  $x^2$  e poi per  $x$  e sommando, si ha  $\frac{x^2+x}{(1-x)^3} = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-1}$  e con qualche semplificazione si ottiene la tesi.

**3.3.17** (a) Consideriamo la curva di equazione  $s = t^{p-1}$  e notiamo che risulta  $t = s^{1/(p-1)} = s^{q-1}$ .



Supponiamo che sia  $x^{p-1} > y$ , allora il grafico di  $s = t^{p-1}$  interseca la retta  $s = y$  in un punto di ascissa  $< x$  e si ha:

$$\frac{x^p}{p} = \int_0^x t^{p-1} dt = \text{area (A)} + \text{area (C)}, \quad \frac{y^q}{q} = \int_0^y s^{q-1} ds = \text{area (B)}$$

e dunque

$$\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} = \text{area (A)} + \text{area (C)} + \text{area (B)} > xy = \text{area (A)} + \text{area (B)}.$$

Analogamente se  $x^{p-1} \leq y$ , ossia  $x \leq y^{q-1}$ .

(b) Posto  $\varphi(x) = |f(x)| / \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ ,  $\psi(x) = |g(x)| / \left( \int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$

si ha

$$\int_a^b [\varphi(x)]^p dx = \int_a^b [\psi(x)]^q dx = 1$$

e, per (a),

$$\varphi(x) \cdot \psi(x) \leq \frac{[\varphi(x)]^p}{p} + \frac{[\psi(x)]^q}{q}, \quad x \in [a, b].$$

Dunque  $\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  e quindi la tesi.

**3.4.1** 4,5 joule, 6 cm.

**3.4.3** mg R/2.

$$3.4.5 \quad \int_d^{2d} k/x^2 dx = k \left( \frac{1}{d} - \frac{1}{2d} \right) = \frac{k}{2d}, \text{ ove } k \text{ è la costante di proporzionalità.}$$

$$3.4.7 \quad [f(x+h)]^2 = [f(x) + hf'(x) + h\omega(h)]^2 = [f(x)]^2 + 2hf(x)f'(x) + h\eta(h) \text{ con } \eta(h) \text{ infinitesimo.}$$

$$3.4.9 \quad \int_0^{20} 100 \left( 1 - \frac{s}{40} \right) ds = 1.500 \text{ chilogrammetri.}$$

## CAPITOLO 4

4.1.1 (a) La continuità è verificata perché la disequazione  $|\sqrt[3]{(-1+h)+1} - 0| < \varepsilon$  è soddisfatta per  $-\varepsilon^3 < h < \varepsilon^3$ ;

(b) Se  $x_0 > 0$  si ha  $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}$  e se  $x > \frac{x_0}{4}$  tale quantità è maggiorata da  $\frac{2|x - x_0|}{3\sqrt{x_0}}$ . Dato  $\varepsilon > 0$ , prendendo  $|x - x_0| < \delta = \frac{3}{2}\sqrt{x_0}\varepsilon$  si ha  $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$ . Nel punto 0 la funzione  $\sqrt{x}$  è continua a destra perché  $\sqrt{x} - 0 < \varepsilon$  se  $0 < x < \delta = \varepsilon^2$ .

4.1.3 (a) Si ha  $f(x) = -x^3 - 1$ ,  $f(x) = +x^3 + 1$ ,  $f(x) = 1 - x^3$  e  $f(x) = x^3 - 1$  rispettivamente per  $x < -1$ ,  $-1 \leq x \leq 0$ ,  $0 < x < 1$  e  $x \geq 1$ , e all'interno di tali intervalli la funzione è ovviamente continua. Per  $x = -1$ ,  $x = 1$  la funzione vale 0 e ha sia limite sinistro che destro uguali a 0, quindi è continua, così come lo è per  $x = 0$  in quanto il valore della funzione è 1 come i due limiti;

(b) si ha  $f(x) = -4/x$ ,  $f(x) = 2$  e  $f(x) = 0$  rispettivamente per  $x < -2$ ,  $-2 \leq x < 0$  e  $x > 0$ . La funzione è continua all'interno dei diversi intervalli e in  $-2$ , ma non in 0 dove non è definita;

(c) si ha  $f(x) = \sqrt{-x}$ ,  $f(x) = \sqrt{x}$  rispettivamente per  $x < 0$ ,  $x > 0$ , e all'interno di tali intervalli la funzione è continua. Per  $x = 0$  i limiti destro e sinistro sono 0, tanto quanto la funzione in questo punto;

(d) in modo analogo, la funzione non è definita per  $x = 1$  e invece è continua in  $x = -1$  dove funzione, limite destro e sinistro valgono 0.

4.1.5 Deve essere  $-2 \sin(-\pi/2) = \lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} (a \sin x + b)$  e  $\cos(\pi/2) = \lim_{x \rightarrow \pi/2^-} (a \sin x + b)$ ; si ottiene  $a = -1$  e  $b = 1$ .

4.1.7 Detto  $p_6$  il peso a 6 anni, i limiti sinistro e destro sono  $5 + 2p_6$  e  $10 + 4p_6$ , tra loro diversi, quindi c'è una discontinuità qualunque sia il peso a questa età. Invece a 14 anni i limiti sono  $10 + 4p_{14}$  e 200 e si ha continuità se il peso è 47.5 kg.

4.1.9 (a) La disequazione  $|\frac{3x+1}{x+1} - 3| < \varepsilon$  è verificata per  $x > \frac{2}{\varepsilon} - 1$ , e se  $\varepsilon = 1/1000$  è  $x > 1999$ ;

(b)  $|\sqrt{\frac{3x+1}{2x-1}} - 2| < \frac{1}{1000}$  dà  $0,9992 < x < 1,0008$ .

4.1.10 (a) 1; (b) -1; (c) 0; (d) 2; (e)  $-\frac{1}{56}$ ; (f) 1; (g)  $+\infty$ ; (h)  $-\frac{1}{3}$ ; (i)  $-\infty$ ; (l)  $\frac{1}{2}$ ; (m) 3; (n)  $\frac{3}{2}$ ; (o) 0; (p) 1; (q) 1; (r)  $+\infty$ .

4.1.11 Si ha  $|x^3 + 3x^2 + 3x| \leq 7|x|$  se  $-7 \leq x^2 + 3x + 3 \leq 7$ , quindi per  $-4 \leq x \leq 1$ ; quindi si può scrivere, se  $-1 \leq x \leq 1$ ,  $|(1+x)^3 - 1| \leq 7|x| < \varepsilon$ , soddisfatta per  $\delta = \varepsilon/7$ .

4.1.13 La prima funzione può essere scritta  $\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+1+x}} = \frac{\sqrt{1+2/x^2}}{\sqrt{1+1/x^2+1}}$  e quindi tende a  $\frac{1}{2}$ . La seconda si scrive  $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x^3+1} + \sqrt{x^3-1}}$  quindi ha limite 0.

4.1.15  $3 - \frac{\pi^2}{8}$ .

4.2.1 I limiti sono ovvi quando le funzioni sono continue; negli altri casi: per  $x \rightarrow 0$  la prima si scrive  $3\frac{\text{sen } 3x}{3x}$ , quindi ha limite 3; in modo analogo si vede che la seconda ha limite 0 e la terza, trascritta nella forma  $\frac{1}{1+\cos x}$ , ha limite  $1/2$ ; per  $x \rightarrow \pi/4$  l'ultima si scrive  $1 + \sqrt{2}\text{sen } x$  e ha limite 2; per  $x \rightarrow +\infty$  per la prima si ha  $-\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sen } 3x}{x} \leq \frac{1}{x}$  e il limite è 0; il secondo caso è analogo, mentre nei rimanenti due casi non c'è limite.

4.2.3 Il primo limite è 0 perché è  $0 \leq 1 + \text{sen } \frac{1}{x} \leq 2$ , e quindi  $0 \leq x^2(1 + \text{sen } \frac{1}{x}) \leq 2x^2$ ; per il secondo, per  $|x|$  sufficientemente grande, per esempio  $|x| > 6/\pi$ , è  $\frac{1}{2} < 1 + \text{sen } \frac{1}{x} < \frac{3}{2}$ , quindi  $x^2(1 + \text{sen } \frac{1}{x}) > \frac{1}{2}x^2$  e il limite è  $+\infty$ ; per il terzo, scrivendo  $\frac{\text{sen } \frac{1}{n}}{1/n} = \frac{\cos \frac{1}{n} - 1}{\frac{1}{n^2}}$ , si vede che il limite è  $-1/2$ .

4.2.5 No. I limiti destro e sinistro sono rispettivamente 1 e 3 nel primo caso e 1, 0 nel secondo.

4.2.7 Si scrive  $\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{x^n} + \frac{1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{x}{(n+1)!} + \dots > \frac{x}{(n+1)!}$ , quindi il limite è  $+\infty$ .

4.2.9 Se  $y$  è la misura in radianti, si ha  $y = \frac{\pi}{180}x$ , quindi si ha  $|\text{sen } x| \leq |x| \cdot \frac{\pi}{180}$  e la (4.18) si scrive

$$\sqrt{(1 - \cos x)^2 + \text{sen}^2 x} \leq \frac{\pi}{180} |x| \leq (1 - \cos x) + |\text{sen } x|;$$

procedendo si ottiene per il primo limite  $\frac{\pi}{180}$  e da questo il secondo,  $\frac{1}{2}(\frac{\pi}{180})^2$ .

4.2.10 Nell'ordine si ha 0, 0, 1;  $-3/2$ , 2, -1;  $e^{14}$ , non esiste,  $1/2$ .

4.2.11 (a) convergente in quanto equivalente alla serie di termine  $2/n^2$ ;

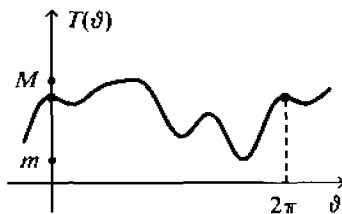
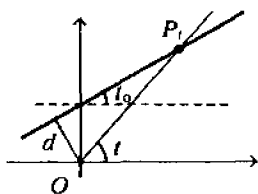
(b) diverge in quanto equivalente alla serie di termine  $\frac{1}{n}$ ;

(c) converge, equivalente alla serie di termine  $\frac{1}{n^2}$ ;

(d) converge, per il criterio di Leibniz, ma non converge assolutamente, in quanto la serie dei valori assoluti è equivalente alla serie di termine  $\frac{1}{2n}$ .

4.2.13 (a)  $S = 40$  dB; (b)  $S = 60$  dB; (c)  $S = 80$  dB. Il rapporto è  $10^6$ .

- 4.2.15 Nella prima dopo 6 mesi si ha  $C + C \frac{2.75}{100}$  e dopo un anno  $C(1 + \frac{2.75}{100})^2 = C \cdot 1,0558$ , nella seconda  $\lim_{n \rightarrow \infty} C(1 + \frac{5.25}{100 \cdot n})^n = C \cdot e^{5,25/100} \simeq C \cdot 1,0539$ .
- 4.3.1  $f(0) = 1, f(1) < 0$ .
- 4.3.3 Sia  $f(x) = \sin x + x - \frac{1}{2}$ ; si ha  $f(0) < 0, f(\pi/4) > 0$  e la funzione è crescente. L'errore deve essere  $\frac{\pi/4 - 0}{2^n} < 10^{-6}$ , quindi  $n > 24$ .
- 4.3.5 Per la prima il dominio è dato dai reali esclusi  $x = \pm 1$  e l'immagine, che si ha scrivendo  $x^2 = \frac{y+1}{y-1}$ , è costituita da  $y \leq -1$  e  $y > 1$ ; per le altre, rispettivamente,  
 $x < -1$  e  $x > 1; y \geq 2$ ;  
 tutti i valori reali per  $x, -1 \leq y \leq 1$ ;  
 tutti i valori reali per  $x, 1/e \leq y \leq e$ ;  
 $x \geq 0, -1 \leq y \leq 1$ ;  
 $2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi, k = 0, 1, 2, \dots, 0 \leq y \leq 1$ .
- 4.3.7 (a)  $k \geq -5/4$ ;  
 (b)  $k \leq -1$  e anche  $k > 1$ ;  
 (c) si osserva, per esempio, che la funzione  $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$  ha limite  $-\infty$  per  $x \rightarrow -1^+$  e  $+\infty$  per  $x \rightarrow +\infty$  ed è continua in tale intervallo, quindi assume ogni valore reale; l'equazione ammette soluzioni per ogni  $k$ .
- 4.3.9 Fissata una direzione, esistono tra le rette di direzione scelta, una a cui corrisponde area nulla ed una a cui corrisponde l'area dell'intero poligono; è sufficiente ricordare il teorema dei valori intermedi.
- 4.3.10  $OP_t = d/|\cos(t - t_0)|$ , continua in  $(t_0 - \pi/2, t_0 + \pi/2)$ .



- 4.3.11 Se si conducono, da un punto  $A$  del perimetro, due semirette che formano tra loro un angolo di  $\pi/6$ , su di esse il perimetro del poligono stacca segmenti rispettivamente lunghi  $f(t)$  e  $g(t)$ ; le due funzioni sono continue e la loro differenza è, nei due casi estremi che si hanno ruotando le rette fino a far coincidere la prima o la seconda con il lato a cui  $A$  appartiene, discorde. Il Teorema 4.18 consente di concludere.
- 4.3.12 Sia  $T(\vartheta)$  la temperatura alla longitudine  $\vartheta$ , essa essendo periodica di periodo  $2\pi$  assume almeno due volte tutti i valori compresi fra il minimo e il massimo. Se  $f(\vartheta) = T(\vartheta) - T(\vartheta + \pi)$ , si ha  $f(\pi) = -f(0)$  e dunque vi è almeno uno zero di  $f$  in  $[0, \pi]$ .

$$\begin{array}{ll}
 4.4.1 \quad (a) & 4x^3 - 15x^2 + 4x - 2; \quad (b) \quad 4x^3 - \frac{3}{x^4}; \\
 (c) & \frac{1}{3}(1+x); \quad (d) \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3}; \\
 (e) & \frac{x^2}{2} - 2x; \quad (f) \quad -\frac{133}{4}x^3\sqrt{x^3}; \\
 (g) & \frac{3\sqrt{x}}{2} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}; \quad (h) \quad \frac{-x^4 - 10x^2 - 8x + 3}{(3+x^2)^2}; \\
 (i) & -\frac{(x+2)^2}{(x-3)^2}(3x^2 - 14x + 5); \quad (l) \quad \frac{1}{2(x+1)^2} \sqrt[4]{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3}; \\
 (m) & 3(x^3 + 4x^2)^2(3x^2 + 8x); \quad (n) \quad \frac{3-x}{2(1-x)\sqrt{1-x}}.
 \end{array}$$

$$4.4.3 \quad (a) \quad y' = -2/(x-2)^2; \quad (b) \quad -2, \quad (c) \quad y+1 = -2(x-1); \quad (d) \quad y+1 = \frac{1}{2}(x-1).$$

$$4.4.5 \quad \frac{\pi}{2}.$$

4.4.7 Le rette che escono dal vertice hanno equazione  $y = mx$  e  $y = -\frac{1}{m}x$ ,  $m \neq 0$ , ed intersecano la parabola nei punti di coordinate  $(\frac{m}{a}, \frac{m^2}{a})$  e  $(-\frac{1}{ma}, \frac{1}{m^2a})$ . Si scrivono le equazioni delle rette a cui appartengono le corde e si osserva che tra queste si ha la retta  $y = 1/a$ , che le interseca tutte nel punto di ascissa  $x = 0$ .

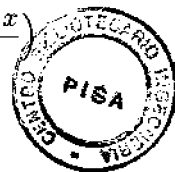
$$\begin{array}{lll}
 4.4.9 & 2 \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x); & \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos^2 x}; & \frac{1}{2\sqrt{x}}; \\
 & \ln x; & \frac{2}{x} \ln x; & e^x(\cos x - \operatorname{sen} x); \\
 & \frac{e^x}{\cos^2 x}(\operatorname{sen} x + \cos x); & -e^x \operatorname{sen} e^x; & \alpha \cos \alpha x; \\
 & \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}; & \frac{1}{x} \cos \ln x; & \frac{-2x}{\operatorname{sen}^2 x^2}; \\
 & \cos x e^{\operatorname{sen} x}; & \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}; & \frac{2 \cos x}{(1 - \operatorname{sen} x)^2}; \\
 & \frac{\cos x}{2\sqrt{1 + \operatorname{sen} x}}; & \frac{-1}{\sqrt{4x - x^2 - 3}}; & \frac{1 + x^2}{1 + x^4 - x^2}; \\
 & \frac{1}{2\sqrt{x-1} \ln x} - \frac{\sqrt{x-1}}{x \ln^2 x}; & \ln 2 \cdot 2^{x \operatorname{sen} x}(\operatorname{sen} x + x \cos x); & \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} \ln \operatorname{sen} x.
 \end{array}$$

$$4.4.11 \quad \frac{1}{x^{\cos x}} \left( \sin x \ln x - \frac{\cos x}{x} \right), \quad (\arctan x)^{x^2+1} \left( 2x \ln \arctan x + \frac{1}{\arctan x} \right),$$

$$\frac{1}{x} (\ln x)^{\ln x} (1 + \ln \ln x); \quad (\sin x)^x \left( \ln \sin x + \frac{x \cos x}{\sin x} \right);$$

$$(\ln x)^x (\ln \ln x + 1/\ln x); \quad (2x)^{\sin x} \left( \cos x \ln(2x) + \frac{\sin x}{x} \right);$$

$$(1 + 1/x)^x \left( \ln(1 + 1/x) - \frac{1}{x+1} \right).$$



4.4.13 (a)  $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ ,  $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 = S$ ; (b)  $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt}$  per ipotesi è proporzionale a  $S$ , per la parte (a) ne segue  $\frac{dr}{dt} = \text{costante}$  e quindi  $T = 1/(1 - 1/\sqrt[3]{2}) \simeq 4h$  e  $51'$ ; (c)  $450\pi$ ; (d)  $t = 48$  h.

$$4.4.15 \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}; \quad g'(y) = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}; \quad f'(g(y)) = \frac{\sqrt{y^2+1}}{y}; \quad g'(f(x)) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}.$$

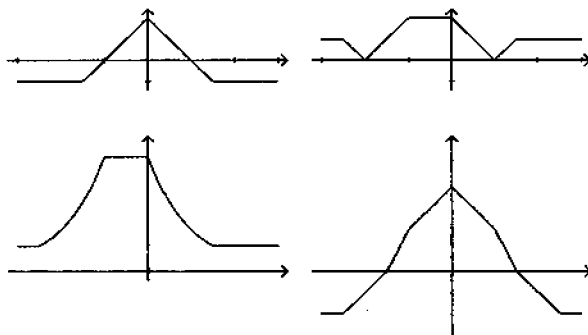
4.4.17 Nel dominio  $x > 0$ , la funzione ha derivata  $y' = x - \ln x - 1$  che, derivata a sua volta, dà  $y'' = 1 - 1/x$ ; da questa si desume che 0 è minimo assoluto per la funzione  $y'$ ;  $y$  è strettamente crescente, quindi invertibile.

4.4.19 Il primo grafico coincide con quello della retta  $y = x$  in  $[-1, 1]$ ; il secondo è il grafico di  $y = x$  in  $[-\pi/2, \pi/2]$ , prolungato per periodicità su tutto l'asse reale.

4.4.21 Dal teorema di Carnot,  $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma}$ , si calcola la derivata  $\frac{dc}{d\gamma} = \frac{ab \sin \gamma}{c}$  e si sostituisce (teorema dei seni)  $b/c = \sin \beta / \sin \gamma$ ; per provare la seconda formula si tracciano le tre altezze nel triangolo e da  $b = c \cos \alpha + a \cos \gamma$  derivando rispetto a  $\gamma$ , poi sostituendo la prima si ha  $a \sin \beta \cos \alpha - a \sin \gamma = c \sin \alpha \frac{d\alpha}{d\gamma}$ .

4.4.23 Si ha  $f'(x) = 1 + 2 \sin x \cos x = 1$ , quindi  $x = k\frac{\pi}{2}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

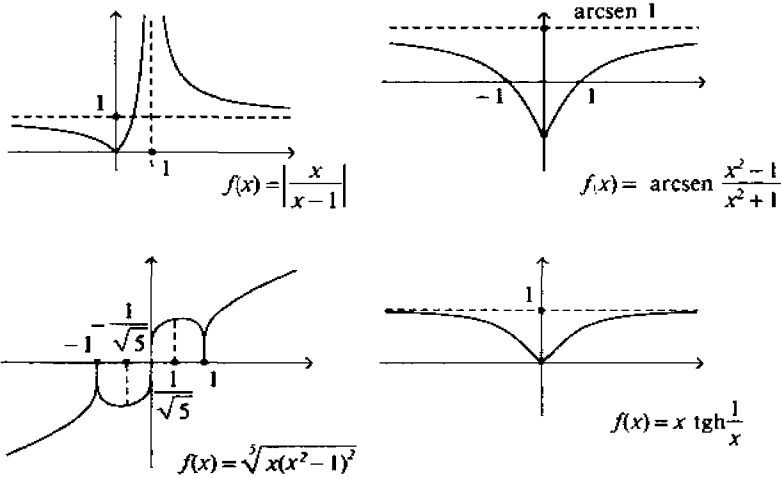
4.5.1 Si ottengono i grafici di figura



4.5.3 Si ha rispettivamente  $y = x + 1$ ;  $y = x$ ;  $y = \frac{1}{3}x$ ;  $y = x$  e  $y = \pm x$ .



4.5.4



4.5.5  $r = \beta/\alpha$ .

4.5.7 Si ha  $0 < h < R$  e  $l = 2\sqrt{2Rh - h^2}$ , quindi  $\frac{dl}{dh} = 2 \frac{R-h}{\sqrt{2Rh-h^2}}$ ; la corda è crescente con la freccia. Il cilindro ha volume  $V = 2\pi(R-h)^2\sqrt{2Rh-h^2}$ , quindi  $V' = 2\pi(R-h) \frac{R^2+3h^2-6Rh}{\sqrt{2Rh-h^2}}$ ; il volume è massimo per  $h = (1 - \sqrt{\frac{2}{3}})R$ .

4.5.9 Siano  $a$  il lato del triangolo e  $b$  l'altra dimensione dell'apertura. (a) Detto  $k$  il perimetro assegnato, si ha  $S = ab + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ , da cui  $a = \frac{k}{6-\sqrt{3}}$  e  $b = \frac{k}{5+\sqrt{3}}$ ; (b) detta  $S$  l'estensione dell'apertura si ha per il perimetro  $P = \frac{2S}{a} + \frac{6-\sqrt{3}}{2}a$  e il perimetro è minimo per  $a = 2\sqrt{\frac{S}{6-\sqrt{3}}}$ .

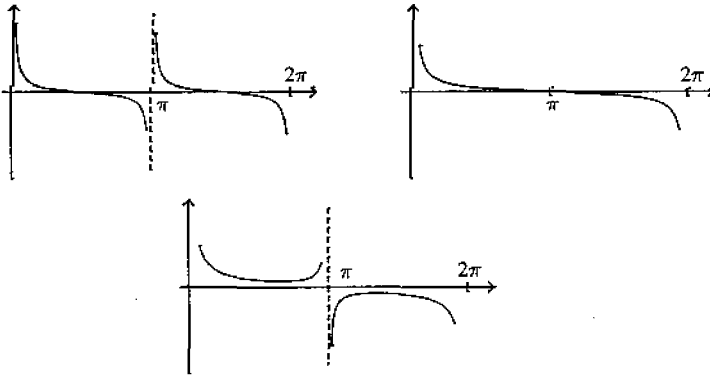
4.5.11 La concentrazione massima si ha per  $t = 2$ , così come nel precedente modello, ma nel secondo l'azione è di maggiore intensità e di minore durata.

4.5.13 Dovrà calare in mare la scialuppa quando la nave dovrà ancora percorrere una distanza  $y = \frac{vd}{\sqrt{V^2-v^2}}$  per arrivare al punto in cui essa avrà minima distanza.

4.5.15 Deve essere  $\alpha > (3x^2 + x^4)/(1 + x^2)^2$ ; la funzione a secondo membro ha il massimo per  $x^2 = 3$  pari a  $\frac{9}{8}$ .

4.5.17 La funzione  $f(x) = x^2 - x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x$  è negativa in 0 e ha derivata negativa per  $x < 0$ , positiva per  $x > 0$ . Poiché i limiti  $x \rightarrow \pm\infty$  sono entrambi  $+\infty$ , la funzione si annulla in due punti.

- 4.5.19 Si scrive  $\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{K}$ . La funzione  $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$  ha massimo assoluto pari a  $2/e$ , quindi il massimo valore è  $K = e/2$ .
- 4.5.21 Essendo i limiti per  $x \rightarrow -\infty$  e per  $x \rightarrow \infty$  rispettivamente  $\pi/2$  e  $-\pi/2$  e la funzione prima decrescente, poi crescente, ci può essere un solo zero.
- 4.5.23 Per la funzione  $f(x) = e^{-x} + \sin x$  si ha  $f(0) = 1$  e  $f(\pi/2) > 1$ . Il segno della derivata terza, sempre  $< 0$ , consente di risalire al segno di  $f'(x)$  e concludere che  $f(x)$  è prima crescente e poi decrescente, quindi sempre maggiore di 1, nell'intervallo dato.  
Per la seconda basta ricavare che  $f(x) = xe^{1/x}$  ha minimo maggiore di 1.
- 4.5.25 Per ragioni di simmetria è sufficiente studiare il caso  $a > 0$ . Detta  $d$  la distanza tra  $P(x, \sqrt{x^2 - 1})$  ( $x \geq 1$ ) e  $Q(a, 0)$ , si ha  $d^2 = 2x^2 - 2ax + a^2 - 1$ , minima per  $x = a/2$ . Se  $a \geq 2$  questa condizione indica il punto di minima distanza, per  $a < 2$  la distanza minima si ha nel vertice.
- 4.5.27 ( $a=0$ ,  $a=1$ ,  $a=2$ )



- 4.5.29 Il problema viene trattato per  $y > 0$ . Il dominio della funzione è  $R - a \leq x \leq R + a$ ; la funzione è sempre crescente, non ci sono minimi relativi e il minimo assoluto è nel primo estremo.
- 4.5.31 Detti  $l$  il lato del triangolo ed  $R$  il raggio della circonferenza, si ha  $PO = \frac{l}{2}\sqrt{3} + \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$ ; il massimo di questa funzione si ha per  $l = R\sqrt{3}$  e vale  $2R$ .
- 4.5.33 Per  $0 < a \leq 1$   $f(x) = a^x - x$  è decrescente, per  $x = 0$  è positiva e per  $x \rightarrow +\infty$  tende a  $-\infty$ , quindi l'equazione ha una sola soluzione positiva. Per  $a > 1$  si vede che  $f'' > 0$ , quindi  $f'$  è crescente ed  $f$  ha il minimo per  $x = -\log_a \ln a$  che vale  $\frac{1 + \ln \ln a}{\ln a}$ ; il minimo è negativo per  $a < e^{1/e}$ , e in questo caso si hanno due soluzioni, per  $a = e^{1/e}$  una sola e negli altri casi nessuna. La seconda equazione ha le stesse soluzioni della prima e non ne ha altre perché  $a^x$  è strettamente monotona per  $a \neq 1$ .
- 4.5.35 Dalla definizione, si scrive  $\cosh(\alpha + \beta) = \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{-\alpha-\beta}}{2}$ , ecc.

4.5.36 Da  $x = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$  segue  $\operatorname{settsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ , e analogamente dalla definizione di  $x = \cosh t$  segue  $\operatorname{settcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ ,  $x \geq 1$ .

4.6.1 (a) Sulla lunghezza  $l$  dello spigolo l'errore percentuale è  $\frac{0,01}{2}$ , sul volume  $0,01 \cdot \frac{3}{2}$ , quindi la misura del volume è ottenibile con l'errore è  $0,12 \text{ cm}^3$ ; (b) l'errore percentuale su  $6l^2$  è  $0,06$ , quindi l'errore della misura ottenuta per la superficie è  $1,44 \text{ cm}^2$ .

4.6.3 (a) Da  $\sqrt[3]{2} - 1 = \frac{1}{3\xi^{2/3}}$ , e da  $1 < \xi < 2$  segue  $\frac{1}{3 \cdot 2^{2/3}} < \frac{1}{3\xi^{2/3}} < 1/3$ ; quindi  $\frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \leq \sqrt[3]{2} - 1 \leq \frac{1}{3}$ .

4.6.5  $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{n^{k+1}}{k+1}$  e si può scrivere  $\left|\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right| \leq \frac{1}{2n^2} \rightarrow 0$ .

4.6.7  $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{\cos x \operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen}^2 x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{-x^3/2 - x^3/3! + o(x^3)}{x^3 + o(x^4)}\right) = -\frac{2}{3}$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2/2 + x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = 1$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x^2} = -1/2$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1/3x^4 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{3}$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = 1/3$ .

4.6.9 Si scrive la retta passante per il generico punto  $(x_0, x_0^2)$  della parabola con pendenza  $-1/2x_0$  e si minimizza il quadrato della distanza tra le due intersezioni; si ottiene  $x_0 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

4.6.11 Si scrive lo sviluppo in serie di  $f(x) = \frac{1}{1+(x-1)^2}$  e integrando si ottiene il risultato.

4.6.13 Applicando la formula di Taylor al 2° ordine a  $f(x+h)$  e  $f(x-h)$  si trova  $S(h) = f'(x) + \frac{h}{4}[f''(\xi) - f''(\eta)]$ .

4.6.15 Scrivendo i termini fino al 5° ordine degli sviluppi in serie si ottengono coefficienti nulli per le potenze  $x^n$ ,  $n < 9$  e  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan^5 x - 2 \operatorname{sen}^5 x + x^5}{x^9} = 53/36$ .

4.6.17 Utilizzando lo sviluppo della tangente ( $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$ ) si trova

$$\operatorname{tg} x^3 - \operatorname{tg}^3 x = x^3 - o(x^8) - \left[x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right]^3 = -x^5 + o(x^5) \sim -x^5.$$

4.6.19 Usando la regola di de l'Hôpital si vede che

$$(1+x)^{1/x} - e \sim -ex/2.$$

4.6.21 Si usa, anche ripetutamente, la regola di De l'Hôpital.

4.6.23 Nel primo caso il limite si pone nella forma

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3/6 + o(x^4)}{x^2 + o(x^3)} = 0,$$

ma anche, usando la regola di de l'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\operatorname{sen} x + x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{2 \cos x - x \operatorname{sen} x} = 0.$$

Negli altri casi in modo non dissimile si trovano i risultati  $\frac{2}{3}$ , 1,  $+\infty$ .

4.6.25 Si può scrivere

$$\begin{aligned} \ln \frac{e^x + x}{e^x - x} &= \ln(1 + xe^{-x}) - \ln(1 - xe^{-x}) = \\ &= xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-2x} - \left( -xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-2x} \right) + O(x^3) = \\ &= 2xe^{-x} + O(x^3) = 2x + O(x^2) \end{aligned}$$

e dunque  $k = 1$ .

## CAPITOLO 5

5.0.1 (a) È chiuso, non limitato, frontiera:  $x^2 - y^2 = 1$  (iperbole); (b) è aperto, limitato, frontiera:  $x^2 + 3y^2 = 2$  (ellisse); (c) è aperto, non limitato, frontiera:  $xy = \pm 1$  (coppia di iperboli equilateri); (d) è aperto, non limitato, frontiera: assi cartesiani e retta  $x = 1$ .

5.0.3 (a) non esiste; (b) 0; (c) 1/2; (d) 0; (e) 0; (f) 0; (g) 0.

5.0.5 Se  $h, k = 0$  si ha  $f(x_0, y_0) = A$ ; se poi  $k = 0$ , si ottiene  $\frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = B + o(1)$  per  $h \rightarrow 0$ , dunque  $B = f_x(x_0, y_0)$  e analogamente per  $C$ .

5.0.7 (a) Nel punto (2,3) il gradiente ha componenti (9,12) e direzione  $\mathbf{e} = (3/5, 4/5)$ ; quindi la derivata direzionale è  $9 \cdot \cos \alpha + 12 \cdot \operatorname{sen} \alpha$ , massima nella direzione del gradiente (3/5, 4/5), minima nella direzione opposta (-3/5, -4/5), nulla nella direzione perpendicolare (4/5, -3/5);

(b)  $\frac{1}{2}(9 + 12\sqrt{3})$ ;

(c)  $z = 18 + 9(x - 2) + 12(y - 3)$

(d)  $\frac{x-2}{9} = \frac{y-3}{12} = \frac{z-18}{-1}$ .

5.0.9 Se  $\alpha, \beta, \gamma$  sono le coordinate di un punto della sfera, il piano tangente in tal punto ha equazione  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 1$ , il volume del tetraedro è  $V = \frac{1}{6\alpha\beta\gamma}$  con le condizioni  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0, \alpha^2 + \beta^2 < 1$ . Il gradiente si annulla solo per  $\alpha = \beta = 1/\sqrt{3}$  che è il minimo perché il volume va all'infinito sulla frontiera. Il minimo è  $\sqrt{3}/2$ .

5.0.11 Le rette normali sono  $\frac{x-x_0}{2x_0} = \frac{y-y_0}{2y_0} = \frac{z-x_0^2-y_0^2+1}{-1}$  e passano per (0,0,0) se  $x_0^2 + y_0^2 = 1/2$ . L'angolo formato con l'asse  $x$  ha coseno uguale a  $\frac{2}{\sqrt{3}}x_0$ .

- 5.0.13** (a) Sia  $f(x,y)$  una funzione differenziabile in un cerchio  $A$ : esiste un punto  $(\xi,\eta)$  nel segmento di estremi  $(x_0,y_0)$ ,  $(x_0+h,y_0+k)$  tale che  $f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + hf_x(\xi,\eta) + kf_y(\xi,\eta)$ ;  
 (b) Da (a) segue

$$\begin{aligned} |\ln(1+x^2+y^2) - \ln(1+x_0^2+y_0^2)| &\leq \left| \frac{2\xi(x-x_0) + 2\eta(y-y_0)}{1+\xi^2+\eta^2} \right| \leq \\ &\leq \frac{2(\xi^2+\eta^2)^{1/2}}{1+\xi^2+\eta^2} ((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^{1/2} \leq \\ &\leq ((x-x_0)^2+(y-y_0)^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

- 5.0.15** (a) Basta scrivere  $\frac{\partial u}{\partial t} = -cf'(x-ct) + cg'(x+ct)$  e analogamente per le altre derivate;

(b) scrivendo  $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$  e analoghe si ha la verifica. La conclusione si ottiene osservando che la derivata parziale rispetto a una variabile non deve dipendere dall'altra e dunque  $u$  è somma di una funzione della sola  $\xi$  e di una della sola  $\eta$ .

- 5.0.17** Date due soluzioni  $u_1$  e  $u_2$  la funzione  $v = u_1 - u_2$  soddisfa  $\Delta v = 0$  in  $A$ ,  $v = 0$  su  $C$  e quindi, per il *principio del massimo*,  $v \equiv 0$ .

- 5.0.19**  $\frac{\partial v}{\partial x} = f'(u(x,y)) \cdot u_x$ ,  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f''(u(x,y)) \cdot u_x^2 + f'(u(x,y)) \cdot u_{xx}$ , dunque  $\Delta v = f''(u(x,y))(u_x^2 + u_y^2) + f'(u(x,y))\Delta u$ , siccome  $\Delta u = 0$  e  $u$  è una arbitraria funzione armonica si deve avere  $f'' = 0$  e quindi  $f(t) = at + b$ .

- 5.0.21** Il risultato, utile, richiede un calcolo laborioso che si inizia scrivendo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{z}{x^2+y^2+z^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} - \frac{y}{x^2+y^2} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

e utilizzando le relazioni date per semplificare ove possibile.

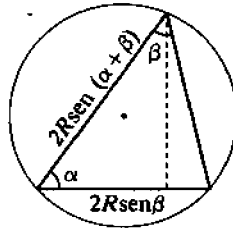
- 5.0.23** I punti di minimo di  $f(a,b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (ax_i + b)]^2$  soddisfano le equazioni  $\frac{\partial f}{\partial a} = 0$ ,  $\frac{\partial f}{\partial b} = 0$ , da cui il sistema (5.30). Si trova

$$a = \frac{\sum y_i x_i - \frac{1}{n}(\sum x_i)(\sum y_i)}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2}, \quad b = \frac{\frac{1}{n}[(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)]}{\sum x_i^2 - \frac{1}{n}(\sum x_i)^2}.$$

- 5.0.25** Utilizzando l'Esercizio 5.0.23, ove per ragioni "cosmologiche" si supponrà  $b = 0$ , si trova

$$a = \frac{\sum_{i=1}^5 v_i x_i}{\sum_{i=1}^5 x_i^2} \simeq \frac{4,14 \cdot 10^8}{2,4 \cdot 10^7}$$

e dunque, in base ai risultati sperimentali riportati nel testo, si trova  $H = 17,23 \text{ Km}/(\text{s} \cdot \text{Mparsec})$ .



**5.0.27** Si deve trovare il massimo della funzione  $f(\alpha, \beta) = 2R \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ , ove  $0 < \alpha, \beta < \pi$ . Imponendo  $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial \beta} = 0$  si trova subito  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$  e dunque  $\alpha = \beta = \pi/3$ : il triangolo di area massima è equilatero.

**5.0.29**  $2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$ .

**5.0.31**  $x = 4, y = 2, z = 2$ .

**5.0.33** (a) Il gradiente non si annulla nei punti interni. Il massimo, 8, è in (3,1), il minimo, -8, in (1,3).

(b) Massimo in  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  e  $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ , minimo in  $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ ,  $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ .

**5.0.35** Nel punto dell'ellisse di coordinate  $(x, y)$  il gradiente della funzione è  $(-y^2/x^2, 2y/x)$  e il vettore normale  $(4x, 2y)$ ; il loro prodotto scalare è nullo.

**5.0.37** Per ogni fissato valore di  $x$  sia ha che, essendo  $\frac{x+y+z}{3} \leq x$ , la funzione  $xyz$  ha massimo quando  $x = y = z$ . Dunque occorre trovare il massimo valore positivo di  $x$  per il quale è  $x^3 + x \leq 3600$ . Il massimo intero è  $x = 15$  cm.

**5.0.39** Si scrive  $A = \sqrt{(1-a)(1-b)(a+b-1)}$ ; massimo per  $a = b = c = 2/3$ .

**5.0.41** Sono i punti  $(1, 1, 1)$  e  $(-1, -1, -1)$ .

**5.0.43**  $x = y = z = \sqrt{5/6}$ .

**5.0.45**  $x = \frac{5}{2}, y = 5$  e si ha  $P = 225/4$ .

**5.0.47** È ovvio che il massimo del parallelepipedo va cercato sulla frontiera. Si scrive  $V = xy(90 - x - y)$  e la frontiera è costituita da  $x = 0, y = 60$  e  $y = x$ . Il massimo si ha per  $x = y = 30$  cm e vale  $V = 27000$  cm<sup>3</sup>. Per il cilindro, analogamente, il massimo è  $V \simeq 130833$  cm<sup>3</sup> per  $h = 2d \simeq 69,3$  cm. Quest'ultimo era il massimo consentito.

**5.0.49** Si derivi la (5.31) rispetto a  $t$ , ponendo poi  $t = 1$ .

## CAPITOLO 6

**6.1.1** Se fosse  $f(x_0) > 0$  vi sarebbe un intorno di  $x_0$  ove  $f(x) > f(x_0)/2 \dots$

**6.1.2** (a)  $x^4/2 - 1/6x^3 + x + C$ ; (c)  $\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + C$ ; (e)  $-\cos x^3 + C$ ;

(g)  $10\sqrt{x} + \frac{3}{8}x^2\sqrt[3]{x^2} + C$ ; (i)  $\arctan \ln x + C$ ; (m)  $\frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 x + C$ .

- 6.1.3 (a)  $\frac{5}{72}$ ; (b)  $7/8$ ; (c)  $2/3$ ; (d)  $\pi/4$ ; (e)  $14/3$ ; (f)  $-8/3$ ; (g)  $\pi/4$ ; (h)  $\pi/18$ ;  
(i)  $\operatorname{tg} 1 - 2 \ln \cos 1$ ; (l) 1.
- 6.1.4 (a)  $-\frac{14}{3} + 3 \ln 3$ ; (b)  $1 - \ln 9$ ; (c)  $6 + \ln \frac{9}{25}$ ; (d)  $\frac{4}{3}\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 1$ .
- 6.1.5  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1$ .
- 6.1.6  $I = \int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \operatorname{sen}(\pi - x)}{1 + \cos^2(\pi - x)} dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x) \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx$ ,  
 $2I = \int_0^\pi \frac{\pi \operatorname{sen} x}{1 + \cos^2 x} dx = \pi^2/2$  (Esempio 6.5 (d)).
- 6.1.7  $f(x) = \arctan x + x^2 + 1 - \pi/4$ .
- 6.1.8  $2/\pi$ ;  $1/3 \ln 28$ ,  $\sqrt{3}/18\pi$ , 0.
- 6.1.9 (a) 1m/s; (b) 4/3m/s; (c) 4/3m/s.
- 6.1.11 Calcolando il valor medio sulla superficie  $\bar{x} = \frac{\int_0^1 x \cdot f(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}$  e  $\bar{y} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{2} \cdot f^2(x) dx}{\int_0^1 f(x) dx}$   
si ottiene  $x = \frac{5}{9}$  e  $y = \frac{5}{12}$ .
- 6.2.1 (a)  $\frac{1}{2}(e^{\pi/2} + 1)$ ; (b) 0; (c)  $4 - 2\sqrt{e}$ ; (d)  $6 - 2e$ ; (e)  $\pi^2 - 2$ ; (f)  $\pi/2 - 1$ .
- 6.2.2 (a)  $e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + C$ ; (c)  $\frac{x^3}{3} \arcsin x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{9}(x^2 + 2) + C$ ;  
(e)  $\frac{1}{8}(2x^2 + 2x \operatorname{sen} 2x + \cos 2x) + C$ .
- 6.2.3 (a)  $\frac{65}{16}$ ; (b)  $\frac{\pi}{16}$ ; (c)  $2 - \frac{\pi}{2}$ .
- 6.2.4 (a)  $-\frac{x^2+1}{2}e^{-x^2} + C$ ; (c)  $e^{\operatorname{sen} x} + C$ ; (e)  $2 \arcsin \sqrt{x} + C$ ; (g)  $-\cos(\ln x) + C$ .
- 6.2.5 (a)  $\sqrt{2x-1} - \ln |\sqrt{2x-1} + 1| + C$ ;  $\frac{\pi}{2}(\operatorname{sen} \ln x - \cos \ln x) + C$ ,  $\frac{1}{2}(9 \arcsin \frac{\pi}{3} - x\sqrt{9-x^2}) + C$   
(b)  $\frac{x^2}{2} \arctan x^2 - \frac{1}{4} \ln(1+x^4) + C$ ,  $\frac{x^2+1}{2} \arctan^2 x - x \arctan x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ ,  
 $\arcsin(x-1) + C$ ,  
(c)  $\operatorname{sen} x - \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$ ,  $\arcsin x - \sqrt{1-x^2} + C$ ,  $\arcsin(x/2) + C$ .
- 6.2.6 (a)  $\ln \frac{5\sqrt[3]{5}}{4}$ ; (b)  $e^{e^e} - e^e$ ; (c)  $\frac{8\sqrt{2}}{15}$ .
- 6.2.7 (a)  $\ln \left| \frac{x}{1-x} \right| + C$ ;  
(b)  $-\frac{1}{x} + \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| + C$ ;  
(c)  $3/2 \ln |x| - 2 \ln |x+1| + 1/2 \ln |x+2| + C$ ;  
(d)  $-1/2 \ln |x+1| + 3/2 \ln |x-1| + \frac{1}{x-1} + C$ ;  
(e)  $\frac{4x-1}{2x^2} + \frac{1}{x+1} + 3 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$ ;  
(f)  $\frac{x^2}{2} - 3x + 3 \ln |x+1| + 4 \ln |x+2| + C$ ;  
(g)  $x + \ln |x(x-1)| - \frac{2}{x-1} + C$ ;  
(h)  $\arctan(x-1) + C$ ;  
(i)  $\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}x + \sqrt{3}) + C$ .

6.2.8 (a)  $\ln \sqrt{3}$ ; (b)  $\sqrt{2}$ ; (c)  $2(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) - \frac{\pi}{6}$ ; (d)  $\ln 3$ .

6.2.9  $\pi ab$ .

$$6.2.10 \int_a^x \left[ \int_a^t f(s) ds \right] dt = \left[ t \int_a^t f(s) ds \right]_a^x - \int_a^x t f(t) dt = \dots$$

6.2.11 Il primo è  $1 + \frac{1}{2 \cdot 2!} + \frac{1}{3 \cdot 3!} + \dots + \frac{1}{n \cdot n!} + \dots$ ; occorre calcolare i primi cinque termini, e si ha 1,3176; per il secondo occorre calcolare i primi tre termini, e si ha 0,3096.

6.2.13 (a)  $\ln(1 + \sqrt{2})$ ; (b)  $\frac{18}{\pi}$ ; (c)  $\frac{5}{16}$ ; (d)  $\frac{6}{\pi}$ .

6.2.15  $xf(y) = \int_0^{x+y} f(t) dt - \int_0^x f(t) dt - \int_0^y f(t) dt$ . Dunque  $xf(y) = yf(x)$  e se  $x \neq 0$ ,  $f(x)/x = \text{costante} \dots$

6.2.17  $P(x) = -2x^2 + x$ .

6.3.1 296.

6.3.3  $\sqrt{1+e^2} - \sqrt{2} - 1 + \ln[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{1+e^2}-1)]$ .

6.3.4 6.

6.3.5 (a) Basta quadrare; (b) usando la disuguaglianza (a)

$$\begin{aligned} \varphi(x) \int_a^b \varphi(x) dx + \psi(x) \int_a^b \psi(x) dx &\leq \sqrt{[\varphi(x)]^2 + [\psi(x)]^2} \times \\ &\times \left[ \left( \int_a^b \varphi(x) dx \right)^2 + \left( \int_a^b \psi(x) dx \right)^2 \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

6.3.6 (a) Si maggiora  $l(p)$  con una somma superiore di  $\sqrt{1+(f')^2}$ ; (b) passare all'estremo superiore in  $\sum (x_i - x_{i-1}) \sqrt{1+m_i^2} \leq l(p)$ ; (c) applicare l'Esercizio 6.3.5 alle funzioni  $\varphi(x) = 1$ ,  $\psi(x) = f'(x)$  su ciascuno degli intervalli  $(x_{i-1}, x_i)$ .

Da (c) segue che per ciascuna poligonale  $p$  si ha  $l(p) \leq \int_a^b \sqrt{1+f'^2} dx$ .

6.3.7  $x = r(\vartheta) \cos \vartheta$ ,  $y = r(\vartheta) \sin \vartheta$ , dunque

$$x'^2 + y'^2 = (r' \cos \vartheta - r \sin \vartheta)^2 + (r' \sin \vartheta + r \cos \vartheta)^2 = r'^2 + r^2.$$

6.3.8 (a)  $8a$ ; (b)  $\frac{\sqrt{1+a^2}}{a} (e^{2\pi ak} - 1)$ .

6.3.9 (a)  $24a$ ; (b)  $8a$ .

6.3.11  $a\sqrt{2} \sinh T$ .

6.3.12 Si ha  $\delta' = \alpha' + dN' = \mathbf{T} - dk \mathbf{T}$  per la formula (6.27).

6.3.13 Per la prima  $k = \frac{1}{a \cosh^2(\frac{x}{a})}$ , per la seconda  $k = -\cos x$ , per la terza  $k = -3y^2 - 2$  e per l'ultima  $k = a^2(\cos t - 1)$ .

6.4.1 (a) converge per  $\alpha < 2$ , (b) converge, (c) diverge, (d) converge a  $1/\ln 2$ , (e) diverge, (f), (g), (h), (i), (l) convergono.



6.4.2 (a) no; (b) no; (c) si;  $\pi/4$ ; (d) no; (e) no; (f) si  $\frac{2}{3}\pi$ ; (g)  $\pi$ .

6.4.3 Per esempio, dall'Esercizio 6.2.4, (a) è integrabile su  $[1, +\infty)$  e dà  $1/e$ , (e) è integrabile su  $(0,1)$  e dà  $\pi$ , (g) non è integrabile nè su  $(0,1)$  nè su  $(1, +\infty)$ ; dall'es.6.2.5, (a) non è integrabile su  $(1, +\infty)$ ;  $\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx$  è integrabile su  $(-3,3)$  e dà  $\frac{9\pi}{2}$ .

6.4.4 Entrambi gli integrali valgono  $-\frac{\pi}{2} \ln 2$ .

$$6.4.5 \quad \sum_{N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N}.$$

6.4.7  $\int_0^A e^{-st} F'(t) dt = [e^{-st} F(t)]_0^A + s \int_0^A e^{-st} F(t) dt$ , e facendo tendere  $A \rightarrow +\infty$ , se  $F(t)$  è *temperata*, cioè se  $F(t) = O(e^{ct})$  per un qualche  $c$  e  $t \rightarrow +\infty$ , si ricava  $\mathcal{L}\{F'(t)\} = s\mathcal{L}\{F(t)\} - F(0)$ . Allo stesso modo si trova la formula per la derivata seconda.

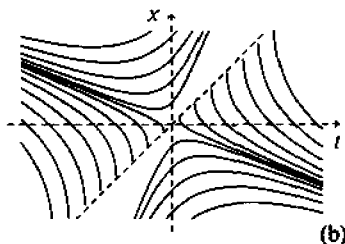
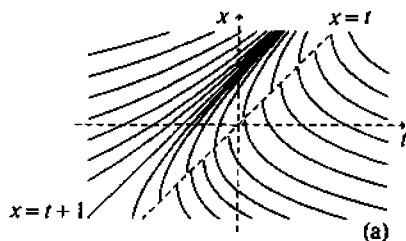
## CAPITOLO 7

7.1.1 (a), (b), (c) Basta sostituire; (d) poiché la funzione  $f(x,t) = t^2 - 2x^2 \ln x$  è nulla, ha derivata nulla  $\frac{df}{dt} = 2t - 2(2x \ln x + x)x' = 0$ . Da qui si ricava  $x'(t)$  per poi verificare. Analogamente per (e).

7.1.2 (a)  $x = 3t - \frac{4t^3}{3} + C$ ; (b)  $x = -\cos t + \frac{t^3}{6}$ ; (c)  $x = t \ln t - t + \ln(t + \sqrt{2 + t^2})$ .

7.1.3 Sottraendo le due equazioni si ottiene  $2x^2 + x - 2t^4 - t^2 = 0$  che ha soluzioni  $x = t^2$  e  $x = -t^2 - 1/2$ ; soltanto la prima risolve entrambe.

7.1.6



7.1.7 Usando la (7.22) si ottiene

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad x(t) &= t^2 e^{-t^2} + C e^{-t^2}; & \text{(b)} \quad x(t) &= C e^{-\cos t} + 1 - \cos t; \\
 \text{(c)} \quad x(t) &= \frac{t+C}{1+t^2}; & \text{(d)} \quad x(t) &= t^3 + C t^2; \\
 \text{(e)} \quad x(t) &= \ln t + C t + 1; & \text{(f)} \quad x(t) &= \frac{t+1}{t} \left( \frac{t^2}{2} - 3t + 3 \ln |t+1| + C \right); \\
 \text{(g)} \quad x(t) &= \left( \frac{t^2}{2} + C \right) e^{-t^2}; & \text{(h)} \quad x(t) &= \frac{\ln |\sin t| + C}{\cos t}.
 \end{aligned}$$

7.1.9 Usando la (7.22) si ha

$$\begin{aligned}
 x &= e^{-\psi(t)} \left[ \int e^{\psi(t)} \psi'(t) \psi(t) dt \right] = e^{-\psi(t)} [\psi(t) e^{\psi(t)} - e^{\psi(t)} + C] = \\
 &= \psi(t) - 1 + C e^{-\psi(t)}.
 \end{aligned}$$

7.1.10 (a)  $x = \sqrt{C - t^2}$  in  $-\sqrt{C} \leq t \leq \sqrt{C}$ ; (c)  $e^t = C(1 - e^{-x})$ ;  
 (e)  $\cos x = -\frac{1}{4}(\ln t)^2 + C$ ; (g)  $|\sin x \cdot \sin t| = C$ .

7.1.11 È anche risolta da  $x = \sin(t - \pi/2)$  in  $[-\pi, \pi]$  e  $x = 1$  per gli altri valori reali, così come da tutte le funzioni analoghe a questa che si ottengono disegnando due o più periodi del seno e completando la definizione utilizzando la retta  $y = 1$ .

7.1.12 (a)  $x(t) = \ln |t + C| + D$ ; (b)  $x(t) = C(t^2 + t) + D$ .

7.1.13 Se  $v = \frac{dx}{dt} = \frac{C}{\sqrt{x}}$  allora  $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2} \frac{C}{x^{3/2}} \frac{C}{\sqrt{x}} = \frac{C'}{x^2}$ , oppure si può risolvere l'equazione per determinare  $x(t)$  e verificare il risultato.

7.1.15  $x(t) = \frac{N e^{aNt}}{N - 1 + e^{aNt}}$ .

7.1.17 (a) L'equazione è esatta perché  $\frac{\partial(t^2)}{\partial x} = \frac{\partial(\cos 2x)}{\partial t} = 0$ , e si ha

$$F(t, x(t)) = \frac{t^3}{3} + \frac{1}{2} \sin 2x = C;$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad x \cdot t &= C; \\
 \text{(c)} \quad t^4 + t^2 x^2 + x^4 &= C; \\
 \text{(d)} \quad \frac{t^2}{2} + xt - \frac{x^2}{2} + C &= 0; \\
 \text{(e)} \quad t^2 x^2 + 2xt + C &= 0; \\
 \text{(f)} \quad 3tx + e^t \cos x + C &= 0.
 \end{aligned}$$

7.1.19 (a) Porre  $v = x^{-1}$ :  $x(t) = \frac{1}{B/A + C e^{-At}}$ ;

(b) porre  $v = x^{-2}$ :  $x(t) = 2e^{-t^2} / \sqrt{e^{t^2}(t^2 - 1) + C}$ .

7.1.20 (a)  $x = 1/4$ ; (c)  $x = \frac{1}{t}(e^t + ab - e^a)$ ; (e)  $x = e^{C/t}$ ; (g)  $2e^{(x^2/2)} = \sqrt{e}(1 + e^t)$ ;

(i)  $x = \frac{3}{2} \sin 2t + \frac{3}{4t} \cos 2t - \frac{\pi}{8t}$ ; (m)  $e^{-x} = -e^t - \frac{1+e^2}{e}$ .

**7.1.21** La soluzione è  $x(t) = -\frac{1}{t^2+C}$  dunque la condizione richiesta è verificata per  $C > 0$ .

**7.1.23** Si ha  $x(t) = x_0 e^{\mu(t-t_0)}$ ; la funzione, ricavata pensando che la crescita non sia influenzata da alcun fattore esterno, aumenta molto rapidamente; in effetti è ragionevole pensare che al crescere del numero di individui peggiorino le condizioni ambientali e dunque le possibilità riproduttive.

**7.1.25** Soluzione stazionaria  $x = h/a$ . Se  $x_0 < h/a$ , la popolazione si estingue in un tempo finito  $T = t_0 + \frac{1}{a} \ln(h/(h-ax_0))$ ; se  $x_0 > h/a$  vi è crescita esponenziale. La soluzione esplicita è

$$x(t) = \frac{h}{a} + e^{(t-t_0)a} \left( x_0 - \frac{h}{a} \right).$$

**7.2.1** (a)  $(t \cot g t - 1)x'' + tx' - x = 0$ ; (b)  $x'' - x = 0$ ; (c)  $\frac{t^2}{2}x'' - tx' + x = 0$ ; (d)  $x'' - 2x' + x = 0$ .

**7.2.3** (a)  $x_2(t) = -1/t$ ; (b)  $x_2(t) = \ln|t|/t$ ; (c)  $x_2(t) = 1 - \frac{t}{2} \ln \frac{1+t}{1-t}$ ; (d)  $x = At + \frac{B}{t^2}$ ,  $t \neq 0$ ; (e)  $x = A\frac{1}{t} + B\frac{1}{t} \ln t$ .

**7.2.5** (a)  $x = C_1 + C_2 e^{-t}$ ; (b)  $x = C_1 \sin t + C_2 \cos t$ ; (c)  $x = C_1 e^t + C_2 t + C_3$ ; (d)  $x = e^{-t}(C_1 t^2 + C_2 t + C_3)$ ; (e)  $x = C_1 e^{-t} + e^{-t/2}(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t)$ ; (f)  $x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t$

**7.2.6** (a)  $x = (t+C)t^2$ ; (b)  $x = t^2 e^{-t^2}$ ; (e)  $x = -te^{-t} + \ln|t| te^{-t}$ .

**7.2.7** (a)  $x = -\frac{1}{2}$ ; (b)  $x = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{3}(t - \frac{2}{3})e^t$ ; (c)  $x = 1 + \frac{1}{4}t(\sin t - t \cos t)$ ; (d)  $x = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}$ ; (e)  $x = \frac{1}{3}te^t$ ; (f)  $x = \frac{1}{4}e^{-t}t \sin 2t$ ; (g)  $x = \frac{1}{3}t^3 - 2t$ ; (h)  $x = -\frac{1}{20} \sin 2t - \frac{1}{2}t + C_3$ ; (i)  $x = \frac{1}{4}t \sin t - \frac{1}{4}t^2 \cos t + 1$ ; (l)  $x = t - 3 + \frac{t^3}{6}e^{-t}$ .

**7.2.9** Se  $r_1, r_2$  sono le radici di  $F(r) = 0$  si ha

$$x(t) = A|t|^{r_1} + B|t|^{r_2}; \quad x(t) = (A + B \ln|t|)|t|^{r_1};$$

$$x(t) = |t|^\lambda [A \cos(\mu \ln|t|) + B \sin(\mu \ln|t|)]$$

nei tre casi (nell'ultimo  $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$ ).

**7.2.11** In base alla formula (6.45) pagina 284 si ha  $x'(t) = \int_0^t g(s) \cos(t-s) ds$ . Usufruendo della stessa formula si ottiene  $x''(t) = g(t) - \int_0^t g(s) \sin(t-s) ds$  e quindi la verifica.

**7.2.12**  $x(t) = \int_0^t \sin(t-s)p(s) ds + M \cos t + N \sin t$ .

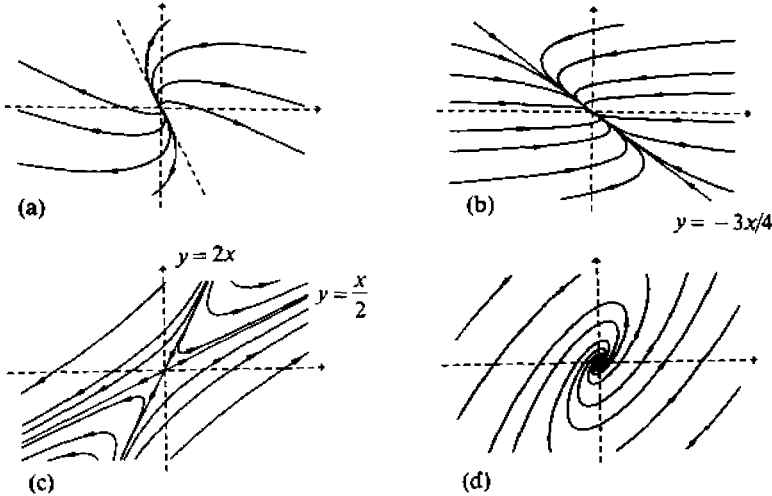
**7.2.13**  $x = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$ .

**7.2.15**  $x(t) = \frac{19}{10} + \frac{1}{10} e^{-10t} + t$ .

## CAPITOLO 8

8.1.1 (a)  $y = x'$ ,  $y' = t^2 y + tx$ ; (b)  $y = x'$ ,  $z = y'$ ,  $z' = z - t^2 y^2$ .

8.1.3 (a) nodo improprio stabile; (b) nodo asintoticamente stabile; (c) punto di sella; (d) fuoco instabile.



8.1.5 (a)  $x = (C_1 + C_2 t)e^{2t}$ ,  $y = (C_2 - C_1 - C_2 t)e^{2t}$ ;  
 (b)  $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-t/4}$ ,  $y = -\frac{3}{4} C_2 e^{-t/4}$ ;  
 (c)  $x = 2C_1 e^{2t} + C_2 e^{-t}$ ,  $y = C_1 e^{2t} + 2C_2 e^{-t}$ .

8.1.7 (a)  $x = 4e^t - 3te^t - 4$ ,  $y = \frac{5}{4}e^t - \frac{3}{2}te^t - 1 - \frac{1}{4}e^{3t}$ ;  
 (b)  $x = \frac{1}{2}(e^t - 2te^t - \cos t + 3 \sin t)$ ,  $y = \frac{1}{2}(-te^t + \sin t)$ ;  
 (c)  $x = \frac{1}{8}e^{-t}(-1 + e^{4t} + 4t)$ ,  $y = \frac{1}{8}e^{-t}(-1 + e^{4t} + 4t)$ ,  $y = \frac{1}{8}(-1 + e^{4t} - 4t)$ ;  
 (d)  $x = \frac{5}{12}e^{3t} + \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{2}{3}$ ;  $y = \frac{5}{12}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{3}$ .

 8.1.9 La soluzione generale del sistema è data da  $x = C_1 e^t$ ,  $y = C_2 e^t$ ; Dal sistema si ricava ad esempio l'equazione  $x'' = x'$ , che ha le soluzioni  $x = A + B e^t$ , e per  $A \neq 0$  non soddisfano il sistema dato.

 8.2.1 (a) il punto  $(-1,3)$ , è punto di sella;  
 (b) il punto  $(0,0)$  è un fuoco instabile;  
 (c) punti critici in  $(0,0)$ ,  $(4,2)$  il secondo è un punto di sella, nel primo il teorema di linearizzazione non è applicabile;  
 (d) punti critici in  $(1, \sqrt{2})$ ,  $(1, -\sqrt{2})$ , nel primo il sistema linearizzato ha un nodo improprio instabile e il teorema di linearizzazione non si può applicare, nel secondo si ha un punto di sella;  
 (e) il comportamento nelle vicinanze del punto critico  $(0,0)$  non può essere dedotto dal teorema di linearizzazione (il sistema linearizzato ha un centro). Tuttavia scrivendo il sistema nella forma  $\frac{dy}{dx} = \frac{-x+x^3}{y}$ ,  $y \neq 0$ , l'equazione diventa integrabile separando le variabili. I punti critici  $(-1,0)$ ,  $(1,0)$  sono invece punti di sella;  
 (f) i punti critici sono  $(0,0)$  e  $(1,1)$ . Il primo è un punto di sella, instabile

mentre nel secondo il teorema non è applicabile (ricorrendo alla separazione delle variabili si può riconoscere che il sistema ha qui un centro).

8.2.3 Si ricava  $\frac{x'}{y} = -\frac{y'}{x}$ , quindi  $xx' + yy' = 0$ , che individua le orbite  $x^2 + y^2 = \text{cost.}$

8.2.5 La retta  $x = 0$  è un'orbita del sistema.

8.2.6 Se  $(x_0, y_0)$  fosse un punto critico lo stesso punto sarebbe un'orbita del sistema, ma se un'altra orbita transitasse per  $(x_0, y_0)$  si violerebbe il teorema di unicità.

8.2.7  $(0,0)$  è il solo punto critico. Il sistema equivale a  $r' = -r$ ,  $\vartheta' = \frac{1}{\ln r}$  e dunque  $(0,0)$  è un fuoco stabile. Il sistema linearizzato  $x' = -x$ ,  $y' = -y$  ha come orbite delle semirette che vanno nell'origine.

8.2.9 Il punto critico  $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$  è un punto di sella per il sistema linearizzato e quindi anche per il sistema originario (dunque è instabile).

8.3.1  $x(t) = 3[1 + 2(0,145e^{-11,5t} - 0,655e^{-28,5t})]$  cm.

8.3.3 Se  $\omega_0 = \frac{\sqrt{4km - \mu^2}}{2m}$  si ha:

$$(a) \quad x(t) = \frac{x_0}{\omega_0} \sqrt{\frac{k}{m}} e^{-\mu t/2m} \text{sen}(\omega_0 t + \varphi), \quad \varphi = \text{arctg} \frac{2m\omega_0}{\mu};$$

$$(b) \quad x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} e^{-\mu t/2m} \text{sen}(\omega_0 t);$$

$$(c) \quad x(t) = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0} + \frac{\mu x_0}{2m\omega_0}\right)^2} e^{-\mu t/2m} \text{sen}(\omega_0 t + \varphi),$$

$$\varphi = \text{arctg} \frac{\omega_0}{v_0/x_0 + \mu/2m}.$$

8.3.5 (a)  $x(t) = e^{-\mu t/2} \left[ \frac{1}{2\mu} \cos \frac{\sqrt{16-\mu^2}}{2} t + \frac{1}{2\sqrt{16-\mu^2}} \text{sen} \frac{\sqrt{16-\mu^2}}{2} t \right] - \frac{1}{2\mu} \cos 2t;$

$$(b) \quad x(t) = \frac{18}{17} \text{sen} 2t - \frac{16}{17} \text{sen} \frac{9}{4} t.$$

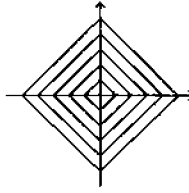
8.3.7 Dalla (8.41) si trova  $I_0 \simeq 73$  mA.

8.3.9  $C \simeq 250$  pF,  $\Delta\nu = \frac{\Delta w}{2\pi} \simeq 2,2$  kHz, rapporto dei segnali  $\simeq 170$ . Migliorare la selettività implica diminuire  $\Delta\nu = \frac{\sqrt{3} R}{2\pi L}$  con  $LC$  costante, migliorare la sensibilità significa aumentare  $\omega_1 \frac{L}{R}$ , pure con  $LC$  costante, si tratta quindi di richieste equivalenti.

8.3.11  $q'(t) = I(t)$  è uguale a 0 per  $t < 0$ , uguale a  $\frac{1}{50} e^{-5t} \text{sen} 5t$  per  $t \geq 0$ ; è continua.  $q''(t)$  è uguale a 0 per  $t < 0$ , uguale a  $\frac{1}{10} e^{-5t} (\cos 5t - \text{sen} 5t)$  per  $t \geq 0$  ed è discontinua in 0.

**CAPITOLO 9**

- 9.0.1** Il baricentro  $G$  appartiene al segmento di estremi  $M(1,1)$  e  $P(x_0, \frac{2}{x_0})$  ed è  $GP = 2GM$ , quindi le sue coordinate sono  $x = 1 + \frac{1}{3}(x_0 - 1)$ ; eliminando il parametro  $x_0$  si ottiene il luogo che è l'iperbole di equazione  $(3x-2)(3y-2) = 2$ .
- 9.0.3** Si tratta della coppia di circonferenze con centro in  $(0, \pm\sqrt{3})$ . Si intersecano nei punti  $(\pm 1, 0)$  ed in essi si annullano sia  $F_y = 2(x^2 + y^2 - 1) - 24y$  sia  $F_x = 2(x^2 + y^2 - 1)2x$ ; non si annullano invece in  $(1, 2\sqrt{3})$  e si scrive  $y = \sqrt{3} + \sqrt{4 - x^2}$ .  
Dall'osservazione che i triangoli con vertici nei centri e nei punti di intersezione sono equilateri deriva la conclusione.
- 9.0.5** Si ottiene da  $f'(x) = -\frac{F_x}{F_y}$  derivando la funzione composta e sostituendo ad  $f'(x)$  la sua espressione.
- 9.0.7** Si applica tre volte il teorema di Dini  $\frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_x}$ ,  $\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{F_z}{F_y}$ , ...
- 9.0.9** Tracciando il grafico di  $x = x(y) = (1 - y)e^{-y}$  si vede che  $x$  è invertibile localmente in ogni punto eccettuato  $y = 2$ . In un intorno del punto  $(0, 1)$  si ha  $y'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{e^y}{xe^y + 1}$ , da cui  $y'(0) = -e$ , analogamente si calcola  $y''(0) = 2e^2$ .
- 9.0.11** Infatti  $J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = -1 - 2y$  si annulla per  $y = -1/2$ , mentre  $J = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,\xi)} = -7$  è sempre diverso da zero.
- 9.0.12** (a) Il triangolo di area 1 è trasformato nel triangolo di vertici  $(0,0)$ ,  $(2a, 2c)$ ,  $(2a + b, 2c + d)$  e area  $|ad - bc|$ .  
(b) Con calcolo analogo nel caso generale. I poligoni sono scomponibili in triangoli.
- 9.0.13** La trasformazione ha coefficienti  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$ ,  $d = 3$ , quindi lo jacobiano è  $= 1$ ; si usi il risultato dell'esercizio precedente.
- 9.0.15** (a)  $J = 4(x^2 + y^2) \neq 0$  tranne che nell'origine, in tutti gli altri punti la trasformazione è localmente invertibile.  
(b)  $J = x - y$ . La locale invertibilità c'è nei punti per i quali  $x \neq y$ .  
(c)  $J = 0$  ovunque; la trasformazione non è iniettiva nell'intorno di ogni punto.
- 9.0.17**  $f_{xx} + f_{yy} = g_{xy} - g_{yx} = 0$  per il Teorema 5.7. Se  $\xi = f(x, y)$ ,  $\eta = g(x, y)$  si ha  $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = f_x^2 + f_y^2$  e se  $\text{grad } f \neq 0$  la tesi segue dal Teorema 9.6. Se  $\text{grad } f = 0$  in  $(x_0, y_0)$ , la trasformazione non può essere invertibile perché se  $x = \varphi(\xi, \eta)$ ,  $y = \psi(\xi, \eta)$  fosse la sua inversa da  $\xi = f(\varphi(\xi, \eta), \psi(\xi, \eta))$  derivando si ricava  $1 = f_x \varphi_\xi + f_y \psi_\xi = 0$ , assurdo.
- 9.0.19** Il massimo è nel punto  $(0,4)$  e il minimo in  $(0,2)$ .
- 9.0.21** Minimo nei punti  $(0, \pm 1)$ ,  $(\pm 1, 0)$ , massimo nei punti  $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$  come si vede anche geometricamente.



**9.0.23** Il gradiente si annulla in  $(0,0)$ , ma l'hessiano è negativo, quindi non corrisponde né al massimo né al minimo.

(a) Sul contorno si trovano il massimo  $f(x,y) = e$  in  $(\pm 1,0)$  e il minimo  $f(x,y) = 1/e$  in  $(0, \pm 1)$ ;

(b) sul contorno si trovano il massimo  $f(x,y) = e$  in  $(\pm 1,0)$  e il minimo  $1/e$  in  $(0, \pm 1)$ .

**9.0.25** (a) La funzione è definita per  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Nei punti interni il gradiente si annulla solo in  $(-1/\sqrt{2}, 0)$ , punto in cui la funzione vale  $\sqrt{2}$ , l'Hessiano è positivo e  $f_{xx} < 0$ , quindi si ha il massimo. Sul contorno è  $f(x,y) = -x$ , quindi il minimo è  $-1$  e si ha in  $(1,0)$ , e il massimo è  $1$ , in  $(-1,0)$ . Globalmente il minimo è  $-1$  e il massimo  $\sqrt{2}$ .

(b) sul contorno  $y = x$  la funzione assume il valore massimo  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  nel punto  $(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}})$  e il minimo è  $-1$ , assunto nel punto  $(1,0)$ .

**9.0.27** Risolvendo il sistema dei moltiplicatori di Lagrange si ottiene  $a = 1, b = 2, c = 3$ . La funzione ha il massimo e vale  $108$ .

**9.0.29** (a) Sull'iperbole  $xy = 1, x > 0, y > 0$  la funzione  $f(x,y) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$  diverge sia per  $x \rightarrow 0^+$  che per  $x \rightarrow +\infty$  quindi se si trova un unico estremante questo è il minimo cercato. Con il metodo dei moltiplicatori si trova  $x^{p-1} + \lambda y = 0, y^{q-1} + \lambda x = 0, xy = 1$  da cui  $x = y = 1$ .  $f(1,1) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  è il minimo cercato.

**9.0.31** Risolvendo il sistema dei moltiplicatori di Lagrange si trova  $x = 300$  e  $y = 500$ . Si verifica che è il punto di minimo.

**9.0.33** Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{aligned} 2x_1 + \lambda a_1 &= 0 \\ \dots\dots\dots \\ 2x_n + \lambda a_n &= 0 \\ -\frac{\lambda}{2} a_1^2 - \dots &= 1 \end{aligned}$$

e risolvendo si trova per  $x_1 = \frac{-a_1}{a_1^2 + \dots + a_n^2}, \dots$ ; il minimo è  $\frac{1}{a_1^2 + \dots + a_n^2}$ .

**9.0.35** Studiando la funzione  $d = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$  col vincolo  $y - f(x) = 0$  si ottiene il punto di coordinate  $x = a + bf'(x) - f(x)f'(x), y = f(x)$  e scrivendo la pendenza del segmento che lo congiunge con  $P$  si ha  $-\frac{1}{f'(x)}$ ; nel caso in cui  $f'(x) = 0$  la conclusione è ovvia.

- 9.0.37** Poiché il gradiente è nullo in  $(0,0)$ , sono condizioni sufficienti per il massimo  $pr > q^2$ ,  $p < 0$ , per il minimo  $pr > q^2$ ,  $p > 0$ ; sono condizioni necessarie per il massimo  $pr \geq q^2$ ,  $p < 0$  e per il minimo  $pr \geq q^2$ ,  $p > 0$ ; sono condizioni necessarie e sufficienti per il punto di sella  $pr < q^2$ .
- 9.0.39** È sufficiente studiare il problema per  $x, y, z \geq 0$ . Si trova che per  $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ,  $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$ ,  $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$  il volume è massimo e ha il valore  $V = \frac{8}{3\sqrt{3}} abc$ .
- 9.0.41** Il gradiente della funzione non si annulla. Si studia la funzione sul vincolo col metodo dei moltiplicatori di Lagrange oppure scrivendo la funzione nella forma  $e^{-[(x+\frac{1}{2})^2 + (z+\frac{1}{2})^2 - \frac{3}{2}]}$  si vede che per  $x = -1/2$ ,  $z = -1/2$  si ha massimo, mentre la funzione non ha minimo.
- 9.0.43** Occorre cercare il massimo della sezione  $S = 2(w - 2x + x \cos \vartheta)x \sin \vartheta$  con le limitazioni  $0 \leq x \leq w/2$ ,  $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$ . Si trova che il gradiente si annulla in  $\vartheta = \pi/3$ ,  $x = w/3$ . Dallo studio dell'Hessiano questo risulta un punto di massimo, quindi non occorre studiare il comportamento sul contorno.

## CAPITOLO 10

- 10.1.1** (a)  $9\pi/2$ ; (b)  $3a^2\pi/8$ ; (c)  $\pi a^2/4$ ; (d)  $a^2$ .
- 10.1.3**  $12a^2\pi$ .
- 10.1.5** (a)  $(e^\pi - 1)^2$ ; (b)  $2e - \frac{16}{3}$ ; (c)  $\ln \frac{16}{9}$ ; (d)  $-\frac{\pi^2}{8} \cos 1 + \frac{\pi}{2} - 1$ ; (e)  $\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{16}$ .
- 10.1.7**  $\frac{1}{16}$ .
- 10.1.9**  $\frac{16}{15}\pi a^3 bc$ .
- 10.1.11** Utilizzando la simmetria rispetto alla retta  $y = x$  e passando a coordinate polari si ha  $m = 2k \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{l/\cos\theta} d\rho$  e osservando che  $\text{tg}(\pi/8) = \sqrt{2} - 1$  si ottiene  $m = 2kl \ln(1 + \sqrt{2})$ .
- 10.1.13** Per il cilindro parabolico  $\bar{z} = \frac{6}{10}a^2$ , per il paraboloido  $\bar{z} = \frac{2}{3}a^2$ . Le condizioni di stabilità sono rispettivamente  $a < \sqrt{5/6}$ ,  $a < \sqrt{3/2}$ .
- 10.1.15**  $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ .
- 10.1.17** Essendo

$$A = \iiint_V (y^2 + z^2) dx dy dz;$$

$$B = \iiint_V (z^2 + x^2) dx dy dz;$$

$$C = \iiint_V (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

si ha per esempio

$$A + B = \iiint_V (x^2 + y^2 + 2z^2) dx dy dz = C + \iiint_V 2z^2 dx dy dz > C.$$

- 10.1.19**  $2\sigma \arctan \frac{1}{a}$ .



**10.2.1** (a) Una forma  $\omega = A dx + B dy + C dz$  è chiusa se  $\frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial A}{\partial z} = \frac{\partial C}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}$ ; la forma (a) è chiusa, (b), (c), (d) non lo sono.

**10.2.3** (a)  $-\frac{16}{15}$ , (b) 0; (c)  $-\frac{8}{3}$ ; (d) 24.

**10.2.5** (a)  $\frac{4}{3}$ ; (b)  $\frac{27}{20}$ ; (c)  $2\pi$ ; (d)  $\frac{17}{2}$ .

**10.2.7**  $\left| \int_{\Gamma} A dx + B dy \right| \leq \int_a^b \sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{x'^2 + y'^2} dt \leq \sqrt{2k} \int_a^b \sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{2k} L$ .

**10.2.8** Nel primo caso  $\phi(x, y) = x^3/3 + \varphi(y)$ , nel secondo  $\phi(x, y) = x \cos y + \varphi(y)$ , con  $\varphi(y)$  funzione arbitraria.

**10.2.9** (a)  $-\pi$ ; (b)  $\ln 8 - 2$ ; (c)  $\frac{1}{8}(e^2 + \frac{1}{e^2} - 2)$ .

**10.2.11** (a)  $\alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + (\gamma + \beta - \gamma)^2 = \alpha^2 + \gamma^2 + (\beta - \gamma)^2 + 2\gamma(\beta - \gamma) \geq \alpha^2 + \gamma^2 - 2|\gamma| |\beta - \gamma| \geq \alpha^2 + \gamma^2 - 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \alpha^2 + \gamma^2 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{\varepsilon}{2}$ .

(b) Sia  $\varepsilon > 0$  tale che  $x'(\xi)^2 + y'(\xi)^2 \geq \varepsilon$ ,  $\forall \xi \in [a, b]$ . Esiste  $\delta > 0$  tale che se  $|\xi - \eta| < \delta$  si ha  $|y'(\eta) - y'(\xi)| < \varepsilon/4M$ . La tesi segue allora da (a) con  $\alpha = x'(\xi)$ ,  $\beta = y'(\eta)$ ,  $\gamma = y'(\xi)$ .

(c) Se  $t, t_0 \in [a, b]$  si ha  $(x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2 = (t - t_0)^2 [x'(\xi)^2 + y'(\eta)^2]$ , con  $\xi, \eta \in (t, t_0)$ . Fissato  $\varepsilon$  esiste  $\delta$  tale che  $|\xi - \eta| < \delta$  implica  $x'(\xi)^2 + y'(\eta)^2 \geq \frac{\varepsilon}{2}$  (per la parte (b)), dunque se  $|\xi - \eta| < \delta$  si ha  $|t - t_0| \leq \frac{2}{\varepsilon} (x(t) - x(t_0))^2 + (y(t) - y(t_0))^2$ . In conclusione se  $|t - t_0| \leq \frac{\delta}{\varepsilon}$  allora  $|\xi - \eta| \leq |\xi - t_0| + |t_0 - \eta| \leq \delta$  e dunque  $|t - t_0| \leq \frac{2}{\varepsilon} \text{dist}((x(t), y(t)), (x(t_0), y(t_0)))$ , cioè la tesi.

**10.2.13** Da  $B(B_1, B_2, B_3)$ , scrivendo il rotore e ricordando che  $t = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$  si ricava la tesi.

**10.2.15** La retta di intersezione dei due piani sia l'asse  $x$ , e siano  $(x, y)$  le coordinate sul piano  $\pi$  e  $(x', y')$  quelle sul piano  $\pi'$ . La trasformazione corrispondente è  $x = x'$ ,  $y = \frac{y'}{\cos \alpha}$ , quindi lo jacobiano è  $\frac{1}{\cos \alpha}$ . Che  $D'$  sia quadrabile segue dalla definizione di quadrabilità e dal fatto che, per proiezioni ortogonali, i poligoni (interni o esterni a  $D$ ) danno dei poligoni (interni o esterni a  $D'$ ).

**10.2.17**  $\pi(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^4})$ .

**10.2.19**  $4\pi \ln a/b$ .

**10.2.21** Pensando il cono pieno e uniforme, si ha  $I_z = \frac{1}{10} \pi h b^4$ .

**10.2.23** La prima formula si ottiene in modo ovvio in quanto

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = (\varphi')^2 \left[ \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + \left( \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 \right].$$

Se  $x_0$  è l'ascissa del baricentro, si ha ( $s$  è l'ascissa curvilinea):

$$\begin{aligned} 2\pi Lx_0 &= 2\pi L \left( \frac{1}{L} \int_0^L x(s) ds \right) = 2\pi \int_0^L x(s) ds = 2\pi \int_a^b x(s(t)) s'(t) dt = \\ &= 2\pi \int_a^b \rho \sqrt{1 + \varphi'(\rho)^2} d\rho = A. \end{aligned}$$

**10.2.25**  $\frac{98}{8}\pi$ .

**10.2.27** Il primo risultato si ricava dalla figura con considerazioni sui triangoli rettangoli. Il secondo osservando che la figura che approssima il cilindro è costituita da  $2nm$  triangoli, e calcolando il limite.

**10.2.29** Sia  $V_r$  la parte interna di  $B_r$ , per il teorema della media (per gli integrali tripli)

$$\iiint_{V_r} \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz = \frac{4}{3} \pi r^3 \operatorname{div} \mathbf{A}(Q),$$

ove  $Q$  è un punto di  $V_r$ . Per il teorema della divergenza

$$\iiint_{V_r} \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy dz = \iint_{B_r} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} d\sigma$$

la tesi segue prendendo il limite per  $r \rightarrow 0$  e sfruttando la continuità di  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ .

**10.2.31** Dal teorema della divergenza passando al limite si trova che il flusso del campo elettrico uscente da una superficie chiusa è pari a  $q/\varepsilon_0$ , ove  $q$  è la quantità di carica interna alla superficie e  $\varepsilon_0$  è la costante dielettrica. Nel nostro caso si ha dunque  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  all'interno di ogni superficie chiusa contenuta nella sfera.

**10.2.33**  $-4\pi$ .

**10.2.35** Riferendosi all'esercizio precedente,  $D_n$  sia  $D$  privato del cerchio di centro  $(0,0)$  e di raggio  $\tau_n$ . Su  $D_n$  la funzione da integrare è  $f(x,y) < \frac{M}{(\sqrt{x^2+y^2})^\alpha}$ .

Quest'ultima passando a coordinate polari diventa  $\frac{M}{\rho^\alpha} \cdot \rho$ , quindi l'integrale improprio esiste per  $\alpha < 2$ .

**10.2.37** Passando a coordinate polari la funzione da integrare si scrive  $f(\rho, \vartheta) = \frac{\rho}{\cos 2\vartheta}$ , dunque è limitata sul  $D$ . L'integrale vale  $\frac{1}{4} \ln(2 - \sqrt{3})$ .

**10.2.39**  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \int_0^n \rho e^{-\rho^2} d\rho = \pi$ ; il medesimo limite si può calcolare sui quadrati  $[-n, n]^2$  e si ottiene la tesi.

**10.2.41** Dal teorema della divergenza si ha

$$\iint_D \operatorname{div} \mathbf{A} dx dy = \int_\Gamma \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} ds$$

ponendo  $\mathbf{A} = \mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} v$ , si ha

$$\iint_D (u \operatorname{div} \operatorname{grad} v + \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v) dx dy = \int_\Gamma u \frac{\partial v}{\partial n} ds.$$

Poiché  $\operatorname{div} \operatorname{grad} v = \Delta v$ , ponendo  $u = 1$  per ogni funzione armonica  $v$  si ha  $\int_\Gamma \frac{\partial v}{\partial n} ds = 0$ . Ponendo poi  $u = v$  si ricava la tesi.

## CAPITOLO 11

- 11.1.1 (a)  $\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos kt}{k^2}$ ;
- (b)  $\frac{2}{\pi} \sinh \pi \left[ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} (\cos kt - k \operatorname{sen} kt) \right]$ ;
- (c)  $\frac{2}{\pi} \sinh(-\pi) \left[ -\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{1+k^2} (\cos kt + k \operatorname{sen} kt) \right]$ ;
- (d)  $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)t}{2k+1}$ ;
- (e)  $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}$ ;
- (f)  $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \operatorname{sen} nt \right]$ ;
- (g)  $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos 2kt$ ;
- (h)  $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2-1} \cos 2kt$ ;
- (i)  $-\frac{8}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k \operatorname{sen} kt}{4k^2-1}$ .

11.1.3 I coefficienti di Fourier di  $t^2$  sono:

$$a_0 = \frac{2}{3}\pi^2; \quad a_n = \frac{4(-1)^n}{n^2}, \quad b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Usufruento dell'identità di Bessel si ha  $\frac{2}{5}\pi^5 = \int_{-\pi}^{\pi} t^4 dt = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4}$

da cui  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ . Similmente, per  $t^3$  si ha

$$a_0 = a_n = 0, \quad b_n = -\frac{2}{n}\pi^2(-1)^n + \frac{24}{n^3}(-1)^n$$

e procedendo analogamente si trova  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$ .

11.1.5 Se poniamo  $\alpha_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos \frac{2\pi nt}{T} dt$ ,  $\beta_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} \operatorname{sen} \frac{2\pi nt}{T} dt$ , si ha

$$S(f_p) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos \frac{2\pi nt}{T}, \quad S(f_d) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \operatorname{sen} \frac{2\pi nt}{T},$$

mentre  $S(f) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \alpha_{2n} \cos \frac{4\pi nt}{T} + \beta_{2n} \sin \frac{4\pi nt}{T} \right)$ .

Le somme parziali  $N$ -esime minimizzano la distanza da  $f$  (in norma quadratica) nell'intervallo  $[0, T/2]$  rispetto ai polinomi trigonometrici della classe  $P_n$ , mentre  $S_n(f)$  minimizza la stessa distanza rispetto ai polinomi di classe  $P_{2n}$  che però dipendono solo dalle funzioni  $\sin \frac{2\pi nt}{T}$  con  $n$  pari.

**11.1.7** Dalle ipotesi sia  $f^m$  sia  $f$  sono sviluppabili in serie di Fourier e da (11.10), indicando con  $\alpha$  e  $\beta$  i coefficienti dello sviluppo di  $f^m$ , si ottiene  $|\alpha_k| = k^m |a_k|$ ,  $|\beta_k| = k^m |b_k|$  per  $m$  pari e invece  $|\alpha_k| = k^m |b_k|$ ,  $|\beta_k| = k^m |a_k|$  per  $m$  dispari. Dalla identità di Bessel applicata a  $f^{(m)}$  si ha la tesi.

**11.2.1** Per la definizione (11.12), fissato  $\varepsilon$  la disequazione  $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$  vale per ogni  $t \in I$  e ogni  $n \geq \nu_1$  e anche per ogni  $t \in J$  e ogni  $n \geq \nu_2$ , quindi vale per ogni  $t \in I \cup J$  pur di prendere  $n$  maggiore del massimo tra  $\nu_1$  e  $\nu_2$ .

**11.2.3** Poiché  $f_n$  converge uniformemente a  $f$ , dalla definizione si ha che esiste per ogni  $\varepsilon$ , un  $\nu$  tale che per ogni  $n > \nu$  sia  $|f_n| - \varepsilon < f(t) < |f_n| + \varepsilon$ ; essendo poi le  $f_n$  limitate, per ogni  $k$  esiste un  $\nu_1$  tale che per ogni  $n > \nu_1$  sia  $|f_n| \leq k$ . Si ha quindi per ogni  $n$  maggiore di entrambi  $-k - \varepsilon \leq |f_n| - \varepsilon < f(t) < |f_n| + \varepsilon \leq k + \varepsilon$ , cioè la tesi.

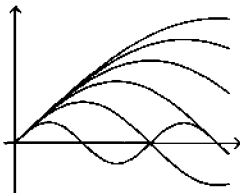
Invece la successione  $f_n = \frac{1}{x+1/n}$ , funzioni limitate su  $I = (0,1)$ , converge puntualmente alla funzione  $\frac{1}{x}$  che non è limitata.

**11.2.5** Per  $t > 1$  e  $t < -1$  la serie diverge perché  $a_n$  non è infinitesimo. Per  $t = 1$  è convergente ma non assolutamente convergente. Per  $t = -1$  diverge. La serie è totalmente e uniformemente convergente su ogni intervallo  $[-\delta, \delta]$  con  $\delta < 1$ .

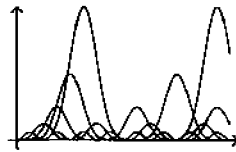
**11.2.7** (a) La successione converge a  $t$ : convergenza puntuale e assoluta, ma non uniforme; (b) converge puntualmente a 0 ma non uniformemente (per  $t = -\pi n$  si ha  $f_n(t) = 2^n$ );

(c) converge per  $t \geq 0$ ; converge totalmente per confronto con la serie  $\sum \frac{t}{n^2}$ ;

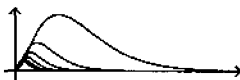
(d) le funzioni convergono a 0, si ha  $-\frac{2}{n} \leq \frac{\cos nt - 1}{n} \leq 0$ , quindi  $|f_n| \leq \frac{k}{n}$  e si ha convergenza uniforme.



(a)



(b)



(c)



(d)

## APPENDICE

- A.1** Per (a) e (b) si applica la definizione di modulo a entrambi i termini.  
 (c) Elevando al quadrato si ottiene  $a^2 + b^2 - 2 |a| |b| \leq a^2 + b^2 + 2ab \leq a^2 + b^2 + 2 |ab|$  e analizzando i casi di  $a$  e  $b$  concordi e discordi si ha la tesi.

**A.3** Si ha

$$z_1 = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\pi/3},$$

$$z_1^2 = 4 \cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3} = 4e^{i\frac{2}{3}\pi},$$

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{-\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} e^{-i\pi/3};$$

$$z_2 = e \left( \cos \frac{-\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{4} \right) = e^{1-i\pi/4},$$

$$z_2^2 = e^2 \left( \cos \frac{-\pi}{2} + i \operatorname{sen} \frac{-\pi}{2} \right) = e^{2-i\pi/2},$$

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{e} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) = e^{-1+i\pi/4}.$$

- A.5**  $|z_1| = 13$ ,  $\operatorname{Re}(z_1) = -5$ ,  $\operatorname{Im}(z_1) = -12$ ;  $|z_2| = 1/9$ ,  $\operatorname{Re}(z_2) = 0$ ,  $\operatorname{Im}(z_2) = 1/9$ ;  
 $|z_3| = (x^2 + y^2)^{3/2}$ ,  $\operatorname{Re}(z_3) = x^3 - 3xy^2$ ,  $\operatorname{Im}(z_3) = 3y(x^2 - y^2)$ ;  $z_4 = 27$ ,  
 $\operatorname{Re}(z_4) = 23$ ,  $\operatorname{Im}(z_4) = -10\sqrt{2}$ .

- A.7** (a)  $-76i$ ; (b)  $-556$ , (c) se  $z = (1+i)^n / (1-i)^{n-2}$  si ha  $z = 2i^{n-1}$  e dunque  $z = 2$  se  $n = 4k + 1$ ,  $z = 2i$  se  $n = 4k + 2$ ,  $z = -2$  se  $n = 4k + 3$ ,  $z = -2i$  se  $n = 4k$ .

- A.9**  $|z| = |z + w - w| \leq |z + w| + |w|$ ;  $|w| = |w + z - z| \leq |w + z| + |z|$ , da cui  $|z| - |w| \leq |z + w|$  e anche  $|w| - |z| \leq |z + w|$  cioè la tesi.

- A.11** (a)  $\cos \frac{\pi}{8} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{8}$ ; (b)  $\sqrt[6]{2} (\cos \frac{\pi}{12} + i \operatorname{sen} \frac{\pi}{12})$ ; (c)  $2^{1/5} e^{i\frac{11}{30}\pi}$

- A.13** (a)  $z = \sqrt[5]{2} e^{i(\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi n}{5})}$ ,  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ;

(b)  $z = 1$ ,  $z = -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;

(c)  $z = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm i \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;

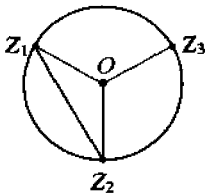
(d)  $z = 2\sqrt[6]{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right)$ ,  $k = 0, 1, 2$ ,

(e)  $z = 0$ ,  $z = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}$ ;

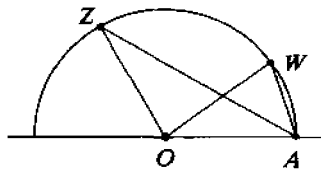
- (f) dovendo essere  $z^2$  reale, sarà  $a \cdot b = 0$ ; si ha  $z = 0$ ,  $z = 4$ ,  $z = -4$ ,  $z = -i$ ,  
 $z = i$ .

**A.15** Poiché l'equazione ha coefficienti reali, avrà anche la radice complessa coniugata  $2 + i$ , quindi, dividendo, l'equazione si scrive  $(z^2 - 4z + 5)(z^2 - 5) = 0$ , e si trovano anche le radici  $z = \pm\sqrt{5}$ .

**A.17** Poiché  $z_1, z_2, z_3$  sono i vertici di un triangolo equilatero inscritto nella circonferenza di raggio  $\sqrt[3]{|z|}$  si avrà  $|z_1 - z_2| = \sqrt{3} \sqrt[3]{|z|} = \sqrt{3}|z_3|$ . Inoltre  $z_1 - z_2$  è perpendicolare a  $z_3$ , cioè  $\arg[(z_1 - z_2)/z_3] = \pm\frac{\pi}{2}$ . I soli valori possibili per  $w$  sono dunque  $\pm i\sqrt{3}$ .



Esercizio A.17



Esercizio A.19

**A.19** (a) Per ogni  $\alpha$  con  $|\alpha| = 1$  e  $\alpha \neq 1$  si ha che  $(\alpha - 1)^2 \bar{\alpha}$  è reale  $< 0$ . Infatti  $(\alpha - 1)^2 \bar{\alpha} = \alpha^2 \bar{\alpha} - 2\alpha \bar{\alpha} + \bar{\alpha} = \alpha + \bar{\alpha} - 2 = 2(\operatorname{Re} \alpha - 1) < 0$ .

Assumendo  $\alpha = z$  e poi  $\alpha = \bar{w}$  si ha la tesi.

(b) Sappiamo che l'argomento di  $[(z - 1)(\bar{w} - 1)]^2 \bar{z}w$  è nullo (in quanto è reale  $> 0$ ); tale argomento è anche uguale a

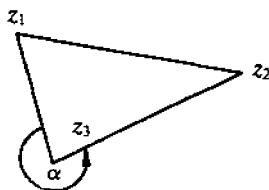
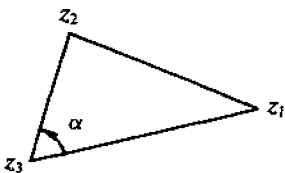
$$\begin{aligned} & 2\arg[(z - 1) - (\bar{w} - 1)] - \arg(z\bar{w}) = \\ & = 2[\arg(z - 1) - \arg(w - 1)] - [\arg z - \arg w] = 2\widehat{ZAW} - \widehat{ZOW}. \end{aligned}$$

**A.21** L'equazione equivale a

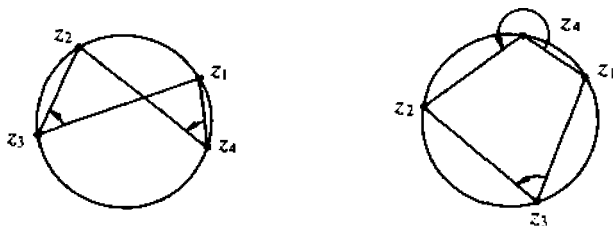
$$\begin{aligned} 0 &= 1 + 2 \cos \frac{2}{9} \pi + 2 \cos \frac{4}{9} \pi + 2 \cos \frac{6}{9} \pi + 2 \cos \frac{8}{9} \pi = \\ &= \sum_{k=0}^8 \cos \frac{2k}{9} \pi = \sum_{k=0}^8 \operatorname{Re}(e^{2i\pi/9})^k. \end{aligned}$$

Ma  $e^{2\pi i/9}$  è radice di  $\sum_{k=0}^8 z^k = 0$  (Esercizio A.20), da cui la tesi.

**A.23** (a) L'argomento di  $(z_3 - z_1)/(z_3 - z_2)$  è l'angolo (orientato)  $\alpha$  fra le direzioni individuate dai punti  $z_3, z_1$  e  $z_3, z_2$ .



(b) Il birapporto è reale se e solo se gli argomenti dei numeri  $(z_3 - z_1)/(z_3 - z_2)$  e  $(z_4 - z_1)/(z_4 - z_2)$  sono uguali, oppure differiscono di  $\pi$ . Ciò avviene se e solo se i quattro punti stanno su una circonferenza, oppure sono allineati.



**A.25** Scrivendo  $z = a + ib$  e  $w = e^a(\cos b + i \sin b)$ , si vede che se  $a < 0$ , si ha  $e^a < 1$  e se  $0 < b < \pi$  si ha  $\sin b > 0$ ; in modo analogo per le considerazioni inverse. La funzione  $e^{a+ib}$  è crescente sia in  $a$  che in  $b$ , quindi la corrispondenza è biunivoca.

**A.27** Detti  $A$  il dominio e  $B$  l'immagine, si ha

(a)  $A$  è dato da tutti i reali,  $B$  è costituito dai numeri naturali; (b)  $A$  è dato dai reali escluso lo zero,  $B = \pm 1$ ; (c)  $A$  è dato da tutti i reali,  $B = 1$ ; (d)  $A = \mathbb{R}$ ,  $B = -1, 0, 1$ ; (e)  $A = x > 0$ ,  $B = x > 0$ ; (f)  $A = x < -1, x > 1$ ,  $B$  è costituito dai reali in  $[1, 2]$  e in  $(0, -1)$ .

