Secondo compito a casa

Gli esercizi 1 e 2 sono standard

Esercizio 3 a) v_1, v_2, v_3 sono una base data di dello spazio V dato da $x+y+u=0$

Il quarto vettore da cercare è un vettore di norma 1 ortogonale a V. $(1,1,0,1)$ è ortogonale a V (dedotto come coefficienti delle variabili nell'equazione di V)

$$v_4 = \frac{(1,1,0,1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Esercizio 4

$u = (x_1, -, x_n)$ ~~se~~ è combinazione lineare di $v^1, -, v^n$ cioè

$$u = a_1 v^1 + \quad + a_n v^n$$

$$\langle u, v^1 \rangle = a_1 + 0 + \cdots + 0 \qquad \langle u, v^2 \rangle = a_2 \cdots$$

$$\langle u, v^n \rangle = a_n$$

L'esercizio 5 è standard

Esercizio 6

Se A ha rango $k = \dim \operatorname{Im} A$, $\ker A$ ha dimensione $n-k$. Ma $A^2 = 0 \Rightarrow \operatorname{Im} A \subset \ker A$, quindi deve essere $k \leq n-k$ ovvero $k \leq \frac{n}{2}$.

Esercizio 7 A ha rango 3, quindi $\operatorname{Im} A$ è un sottospazio di dim 3 di $\mathbb{R}^4$. C deve essere una matrice con nucleo $\ker C = \operatorname{Im} A$ e immagine di dim 1, invece B deve avere immagine contenuta in Ker $A = \{0\}$, quindi B è la matrice nulla.

L'esercizio 8 è un calcolo di determinante.

L'esercizio 9 è mal formulato. L'enunciato corretto e la soluzione in un altro file.

Esercizio 10.

Il polinomio caratteristico della matrice è

$$\det\begin{pmatrix} -x & 1 & -1 \\ 0 & a-x & 0 \\ a^2 & -1 & a^2+1-x \end{pmatrix} = (a-x)\left[-x(a^2+1-x)+a^2\right] =$$

$$= (a-x)\left(x^2-(a^2+1)x+a^2\right)$$

le cui radici sono

$$x_0 = a \;,\quad x_1 = \frac{a^2+1+\sqrt{(a^2+1)^2-4a^2}}{2} \;,\quad x_2 = \frac{a^2+1-\sqrt{(a^2+1)^2-4a^2}}{2}$$

$$\sqrt{(a^2+1)^2-4a^2} = \sqrt{a^4-2a^2+1} = \sqrt{(a^2-1)^2}$$

quindi $x_0 = a$, $x_1 = \dfrac{a^2+1+a^2-1}{2} = a^2$

$$x_3 = \frac{a^2+1-a^2+1}{2} = 1$$

A è triangolabile $\forall a$.

Se $a \neq \pm 1, 0$ i 3 autovalori sono distinti e A è diagonalizzabile. Se $a = 1$, $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ ma $A - I$ non è la matrice nulla quindi A non è diagonalizzabile per $a = 1$

Per $a = -1$ $\quad x_2 = x_3 = 1$ Dobbiamo vedere rango$(A-I)$

$A-I=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 2, per $a=-1$ A non è diagonalizzabile.

Resta il caso $a=0$ $x_0=x_1=0$

Calcoliamo per $a=0$ il rango di A

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ ha rango 1 quindi per $a=0$

ker A ha dimensione 2 quindi A è diagonalizz.

con autovettori e_1, e_2+e_3 autovettori di 0

ed e_1-e_3 autovettore di 1.

Esercizio 1

$$\det A = [t+1-t][t(t+1)+t-1] = t^2+2t-1$$

il polinomio caratteristico di A è:

$$\det(A-xI) = \begin{pmatrix} 1-x & -t & t-1 & t^2 \\ -1 & (t+1)-x & 2(t-1) & -t \\ 0 & 0 & t+1-x & 1-t \\ 0 & 0 & 1 & t-x \end{pmatrix} =$$

$$\left[(1-x)(t+1-x)-t\right]\left[(t+1-x)(t-x)+t-1\right] =$$

$$=\left(x^2-(t+2)x+1\right)\left(x^2-(2t+1)x+t^2+2t-1\right)$$

4

Gli autovalori di A sono le radici dei due fattori, ossia

$$x_1 = \frac{t+2+\sqrt{(t+2)^2-4}}{2}$$

$$x_2 = \frac{t+2-\sqrt{(t+2)^2-4}}{2}$$

$$x_3 = \frac{2t+1+\sqrt{(2t+1)^2-4t^2+8t-4}}{2} = \frac{2t+1+\sqrt{12t-3}}{2}$$

$$x_4 = \frac{2t+1-\sqrt{12t-3}}{2}$$

I primi due sono reali se $(t+2)^2 \geq 4$ ovvero se ~~$-2 \leq t+2 \leq 2$, ossia~~ $t+2 \geq 2$ oppure $t+2 \leq -2$ cioè se $t \notin (-4, 0)$

I secondi 2 sono reali per $t \geq \frac{1}{4}$

Dunque sono tutti reali per $t \geq \frac{1}{4}$.

Se si volesse discutere della diagonalizzabilità di A, oltre al caso $t = \frac{1}{4}$ per cui $x_3 = x_4$ si dovrebbe discutere se per qualche t $x_1 = x_3$ o $x_1 = x_4$ o $x_2 = x_3$ o $x_2 = x_4$ e sono calcoli abbastanza lunghi e delicati. Si noti che per $t \geq \frac{1}{4}$ si ha sempre $x_1 \neq x_2$.

Esercizio 12.

- l'unico autovalore di T è 0. Infatti se v è autovettore di T con autovalore λ

$$T^3(v) = \lambda^3 v = 0 \qquad v \neq 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

- $\operatorname{Ker} T^2 \subsetneq \operatorname{Ker} T^3 = \mathbb{R}^3$ perché $T^2 \neq 0$ implica che $\operatorname{Ker} T^2$ ha dimensione < 3.

Dobbiamo provare che $\operatorname{Ker} T \subsetneq \operatorname{Ker} T^2$. L'inclusione è chiara se $v \in \operatorname{Ker} T$ $T(v) = 0$, a fortiori $T^2(v) = 0$ cioè $\operatorname{Ker} T \subset \operatorname{Ker} T^2$

Se fossero uguali anche le immagini sarebbero uguali $\operatorname{Im} T \supset \operatorname{Im} T^2$ in generale, ma avendo la stessa dimensione si ha che $T: \operatorname{Im} T \to \operatorname{Im} T$ è un isomorfismo, in particolare è iniettiva.

Ma allora $T: \underset{\operatorname{Im} T}{\underset{\shortparallel}{\operatorname{Im} T^2}} \to \operatorname{Im} T^3$ sarebbe anche iniettiva e questo contraddice che $\operatorname{Im} T^3 = \{0\}$ mentre $\dim \operatorname{Im} T^2 = 3 - \dim \operatorname{Ker} T^2 > 0$.

- T non è diagonalizzabile. Avendo come unico autovalore 0 sarebbe diagonalizzabile solo se fosse la mappa nulla, cosa che non è.

Esercizio 13

a) se v_1 e v_2 sono indipendenti sono una base di P. Se aggiungiamo $v_0 \in r$, (v_0, v_1, v_2) è una base di $\mathbb{R}^3$. Quindi T è definito univocamente dai suoi valori su v_0, v_1, v_2 e questi li conosciamo.

T è invertibile perché manda la base (v_0, v_1, v_2) nella base (v_0, v_2, v_1)

ker $(T - Id)$ contiene v_0 e $v_1 + v_2$ quindi ha dimensione almeno 2. Ma $T(v_1 - v_2) = v_2 - v_1$, quindi anche -1 è autovalore. Una base di autovettori è $(v_0, v_1 + v_2, v_1 - v_2)$ per cui T è diagonalizzabile.

b) Se v_1 e v_2 sono dipendenti da $T(v_1) = v_2 = k v_1$

$T(v_2) = T(k v_1) = k T(v_1) = k v_2 = v_1$ si ottiene che k può essere solo 1 o -1 perché T esista.

Se $k = 1$ $v_1 = v_2$ e questo è un autovettore di 1. Se completiamo a base con v_3 e poniamo $T(v_3) = -v_3$ siamo nella situazione precedente $\exists$ T invertibile e diag. che fa quanto richiesto, ma non è unica.

Se $k = -1$, ancora T non è determinata, ma si può costruire invertibile e diagonalizzabile.

c) Con le notazioni eseguite possiamo prendere $v_0=(1,0,-1)$. Allora $\left((1,0,-1),(1,1,1)\,(1,-1,1)\right)$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e T fissa v_0 e scambia v_1 e v_2. Dobbiamo scrivere e_1, e_2, e_3 come loro combinazione lineare (ovvero calcolare l'inverso della matrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$).

$$e_i = a(1,0,-1)+b(1,1,1)+c(1,-1,1) =$$
$$(a+b+c,\ b-c,\ -a+b+c)$$

Quindi

$$e_1 \begin{cases} a+b+c=1\\ b-c=0\\ -a+b+c=0\end{cases} \iff \begin{cases} b=c\\ a=2c\\ c=\frac{1}{4}\end{cases} \iff \begin{cases} a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{4}\\ c=1/4\end{cases}$$

$$e_2 \begin{cases} a+b+c=0\\ b-c=1\\ -a+b+c=0\end{cases} \iff \begin{cases} a=0\\ b=-c\\ c=-\frac{1}{2}\end{cases} \iff \begin{cases} a=0\\ b=\frac{1}{2}\\ c=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$e_3 \begin{cases} a+b+c=0\\ b-c=0\\ -a+b+c=1\end{cases} \qquad \begin{cases} b=c\\ a=-2c\\ 2c+c+c=1\end{cases} \qquad \begin{cases} a=-1/2\\ b=\frac{1}{4}\\ c=\frac{1}{4}\end{cases}$$

$$T(e_1) = T\left(\frac{1}{2}v_0+\frac{1}{4}v_1+\frac{1}{4}v_2\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = e_1$$

$$T(e_2) = T\left(\frac{1}{2}v_1-\frac{1}{2}v_2\right) = -e_2 \qquad T(e_3) = -\frac{1}{2}v_0+\frac{1}{4}(v_1+v_2) = e$$

quindi la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 14

$$T(A) = 3A - 2A^T$$

$$T(A) = \lambda A \iff 3A - 2A^T = \lambda A \iff (3-\lambda)A = 2A^T$$

quindi A deve essere un multiplo di A^T

Poiché A e A^T hanno lo stesso determinante se A è invertibile e autovettore deve essere $A = \pm A^T$.

Quindi se A è simmetrica è autovettore con autovalore 1

se A è antisimmetrica è autovettore con autovalore 5.

Poiché la somma (diretta) dello spazio delle simmetriche e lo spazio delle antisimmetriche dà tutto lo spazio T è diagonalizzabile.

Esercizio 15. Poiché una matrice ortogonale conserva la lunghezza se P esiste $|u| = |v|$ in questo caso u e v stanno sulla stessa sfera di centro O e raggio $|u|$. C'è un cerchio massimo di tale sfera che contiene u e v (se e solo se sono indipendenti. Una rotazione di questo circo massimo (che lascia fermo l'ortogonale del piano del cerchio) opportuna porta u in v;

Abbiamo provato che $P \; \exists \Leftrightarrow |u| = |v|$.

Sia A una matrice di rotazione. Allora A è simile a $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. ~~La~~ La traccia è invariante per similitudine, quindi

$$\operatorname{Tr} A = 1 + 2\cos\theta \qquad \cos\theta = \frac{\operatorname{tr} A - 1}{2}$$

17 La soluzione dell'esercizio 17 è nell'ultima lezione.