# Soluzione del compito

Esercizio 1 Sia P un piano in $\mathbb{R}^4$ dato dalle equazioni $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$

Si chiede una matrice A $4\times 4$ tale che

$\ker A = P$ e $\operatorname{Im} A = P$

soluzione: scegliamo 2 vettori indipendenti che generino P, ad esempio

$$v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \quad v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Se prendiamo le prime due colonne di A come $v_1$ e $v_2$ e aggiungiamo 2 colonne che siano combinazione lineare di $v_1$ e $v_2$ avremo senza altro $\operatorname{Im} A = P$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&a&c\\0&1&b&d\\-1&0&-a&-c\\0&-1&-b&-d\end{pmatrix}$$ ora dobbiamo scegliere $a, b, c, d$ in modo che $Av_1=0$, $Av_2=0$

di modo che A (che ha rango 2 per costruzione) abbia nucleo uguale a P

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-a\\-b\\-1+a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\Longleftrightarrow \begin{matrix}a=1\\b=0\end{matrix} \qquad \cancel{A\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix}=}$$

quindi $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & d \\ -1 & 0 & -1 & -c \\ 0 & -1 & 0 & -d \end{pmatrix}$. Imponiamo $Av_2 = 0$

$$Av_2 = \begin{pmatrix} -c \\ 1-d \\ c \\ -1+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ d = 1 \end{cases}$$

per cui $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Non c'è bisogno di calcolare $A^2$. Poiché $\operatorname{Im} A = P = \operatorname{Ker} A$, tutti i vettori di $\mathbb{R}^4$ sono trasformati da $A$ in elementi di $\operatorname{Ker} A$ per cui $A^2$ si annulla su tutto $\mathbb{R}^4$ e quindi è la matrice nulla.

Esercizio 2 Sia $r \subset \mathbb{R}^3$ la retta di equazioni $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$ e $P$ il piano di equazione $2x+y+3z=0$

Si chiede $A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $\operatorname{Ker} A = r$ e $\operatorname{Im} A = P$

Soluzione: si osserva in primo luogo che $P \supset r$ perché l'equazione di $P$ è la somma delle equazioni di $r$. Possiamo quindi trovare una base di $\mathbb{R}^3$ dove $v_1 \in r$, $(v_1, v_2)$ è una base di $P$

e poi completiamo a base $(v_1, v_2)$.

$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ possiamo completare con

$e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ora imponiamo le condizioni,

$$A(v_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad A(v_2) = v_1 \quad A(e_3) = v_2$$

C'è un unico $A \in M(3,3)$ che verifica queste condizioni perché $(v_1, v_2, e_3)$ è una base di $\mathbb{R}^3$

Anche senza sapere ancora come è fatta $A$ possiamo dire che

$$A(v_1) = 0 \quad A(A(v_2)) = A^2 v_2 = 0 \quad AAA(e_3) =$$

$$= A(A(v_2)) = 0.$$ Per cui $A^3$ si annulla

su una base e dunque è la matrice nulla.

Ora calcoliamo $A$. Scriviamo $e_1$ ed $e_2$ nella base $v_1, v_2, e_3$

$$e_1 = a v_1 + b v_2 + c e_3 = \begin{pmatrix} -2a + b \\ a - 2b \\ a + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ a - 2b = 0 \\ -4b + b = 1 \end{cases} \qquad b = -\frac{1}{3} \quad a = -\frac{2}{3} \quad c = \frac{2}{3}$$

quindi $A(e_1) = -\frac{2}{3} A(v_1) - \frac{1}{3} A(v_2) + \frac{2}{3} A(e_3)$

scriviamo $e_2 = a v_1 + b v_2 + c e_3 = \begin{pmatrix} -2a+b \\ a-2b \\ a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 4

$$\begin{cases} a+c=0 \\ b=2a \\ a-4a=1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a&=-\frac{1}{3} \\ b&=-\frac{2}{3} \\ c&=\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$A(e_2) = -\frac{1}{3}A(v_1) - \frac{2}{3}A(v_2) + \frac{1}{3}e_3$$

Dunque $A(e_1) = 0 - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\frac{2}{3}+\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3}-\frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 4/3 \\ -5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$A(e_2) = -\frac{2}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/3+1/3 \\ -2/3-\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{matrix} 5/3 \\ -4/3 \\ -\frac{2}{3} \end{matrix}$$

Per cui $A = \begin{pmatrix} 4/3 & 5/3 & 1 \\ -5/3 & -4/3 & -2 \\ 1/3 & -2/3 & 0 \end{pmatrix}$

Esercizio 3 $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. $\theta \neq$ multiplo intero di $\pi/2$

Calcolare $A^{-1}$.

Soluzione: A rappresenta una rotazione in senso orario di un angolo $\theta$ attorno all'asse $x$.

Quindi $A^{-1}$ è la rotazione inversa. Quindi una rotazione attorno all'asse $x$ dell'angolo $-\theta$.

$\cos(-\theta) = \cos\theta$ perché coseno è pari.

$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$ perché seno è dispari.

Quindi
$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Esercizio 4 rango $AB \leq$ rango $A$, rango $B$
dove $A \in M(p,q)$ e $B \in M(q,1)$

Soluzione: rango $AB =$ dim Im $AB$.

Ma $\operatorname{Im} AB \subseteq \operatorname{Im} A$ quindi rango $AB \leq$ rango $A$

$\operatorname{Im} AB = \operatorname{Im}(A|_{\operatorname{Im} B})$ dove $A|_{\operatorname{Im} B} : \operatorname{Im} B \to \mathbb{R}^p$

quindi Im $AB$ è generato dall'immagine tramite $A$ di una base di Im $B$. Quindi

$\dim \operatorname{Im} AB \leq \dim \operatorname{Im} B$ cioè rango $AB \leq$ rango $B$.

Esercizio 5 Sia $x \in \mathbb{R}^2$, $y \in \mathbb{R}^3$ e $A$ una matrice a 3 righe e 2 colonne. Calcolare $\langle Ax, y\rangle$.

Soluzione: $\langle Ax, y\rangle = (Ax)^T y = x^T A^T y =$

$= \langle x, A^T y\rangle$. $\langle x, y\rangle$ non si può fare perché stanno in spazi diversi

Esercizio 5. bis

Sia $A \in M(n,n)$ triangolare superiore con tutti 0 sulla diagonale $a_{ii}=0$ $i=1,\dots,n$ $a_{ij}=0$ se $j<i$.

Dimostrare che $A^n=0$.

Soluzione: $A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $e_1,\dots,e_n$ base di $\mathbb{R}^n$

$A(e_1)=0$, $A(e_2) \in$ span $e_1$, quindi $A^2(e_2)=0$

e span $(e_1,e_2) \subset \ker A^2$

$A(e_3) \in$ span $(e_1,e_2) \subset \ker A^2$, quindi $A^3(e_3)=0$

e span $(e_1,e_2,e_3) \subset \ker A^3$

andando avanti così si avrà per $i=1,\dots,n$

$A(e_i) \in$ span $(e_1,\dots,e_{i-1}) \subset \ker A^{i-1}$ quindi

span $(e_1,\dots,e_i) \subset \ker A^i$

Dunque span $(e_1,\dots,e_n) \subset \ker A^n$. In altri termini $A^n(e_i)=0$ per $i=1,\dots,n$ e dunque $A^n$ è la matrice nulla.

Esercizio 6. Sia $A \in M(p,q)$. Dimostrare che $AA^T$ e $A^TA$ sono simmetriche di rango $\leq$ rango $A$. Se rango $A = \min(p,q)$ allora una delle due è invertibile e se $p \neq q$ l'altra no.

Soluzione:

$$(A\cdot A^T)^T = (A^T)^T A^T = AA^T \quad \text{quindi sono simmetriche.}$$
$$(A^T\cdot A)^T = A^T\cdot (A^T)^T = A^T A$$

il loro rango è $\leq$ rango di ogni fattore, ma rango $A$ = rango $A^T$ e quindi basta $\leq$ rango $A$

Sia ora $p<q$ e rango $A = p$

$$A: \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$A^T: \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^q \qquad AA^T: \mathbb{R}^p \xrightarrow{A^T} \mathbb{R}^q \xrightarrow{A} \mathbb{R}^p$$

quindi $AA^T$ è una matrice $p\times p$.

Poiché $A^T$ ha rango $p$ l'immagine di $A^T$ in $\mathbb{R}^q$ ha dimensione $p$. Se vogliamo che $AA^T$ sia surgettiva (e iniettiva) dobbiamo dimostrare che $A|_{\operatorname{Im} A^T}$ è iniettiva e quindi che $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A^T = \{0\}$

Sia $v \in \operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Im} A^T$. Quindi $Av = 0$ e $v = A^T(w)$. Per provare che $v=0$ basta provare che $\langle v,v\rangle = 0$. Calcoliamo

$$\langle v,v\rangle = \langle A^T(w), v\rangle = \langle w, Av\rangle = \langle w, 0\rangle = 0$$

Dunque $A^T$ è iniettiva, $A|_{\operatorname{Im} A^T}$ è iniettiva quindi $AA^T$ è iniettiva e quindi invertibile.

$A^T A : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^q$ ed ha rango $\leq p < q$ quindi 8

non può essere invertibile.

Se $q < p$ ~~si~~ si parte da $A^T$ che come $A$ ha rango $q$ e si fa lo stesso ragionamento di prima

Esercizio 7 Sia $A \in M(n,n)$ di rango ~~n~~ $< n$

Dimostrare che esistono $B, C \in M(n,n)$ non nulle tali che $AB = 0$ e $CA = 0$

Soluzione: rango $A = r < n$ vuol dire che sia $\operatorname{Ker} A$ che $\operatorname{Im} A$ sono sottospazi non nulli di $\mathbb{R}^n$ di dimensione rispettivamente $n-r > 0$ e $r > 0$.

Quindi si possono trovare $B$ e $C$

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{C} \mathbb{R}^n$$

tali che

$\operatorname{Im} B = \operatorname{Ker} A$ (quindi $B$ ha rango $n-r > 0$ non è la matrice nulla)

$\operatorname{Ker} C = \operatorname{Im} A$ (quindi anche $C$ ha rango $n-r$ e non è la matrice nulla.