seguito lezione 14.12.2022

Teorema spettrale

$A = A^T \iff A$ ha tutti gli autovalori reali e $\mathbb{R}^n$ ha una base ortonormale di autovettori di A

Prova parziale

$(\Rightarrow)$ • $A = A^T$. Gli autovalori di A sono tutti reali (non lo proviamo)
Quindi A è triangolabile e per triangolarla possiamo usare una matrice ortogonale

$$A = P^T T P \quad \text{dove } T \text{ è triangolare}$$

Quindi $\quad T = P A P^T$

Trasponiamo

$$T^T = P A^T P^T = P A P^T = T$$

Ma allora T è simmetrica, quindi è diagonale. Dunque A è diagonalizzabile con una matrice ortogonale. Pertanto $\mathbb{R}^n$ ha una base ortonormale di autovettori di A.

2

($\Leftarrow$) Supponiamo che $\mathbb{R}^n$ abbia una base ortonormale di autovettori di A. Quindi c'è una matrice P ortogonale (il cambiamento di base, dalla base canonica alla base di autovettori) tale che

$$A = P^T D P \quad \text{dove } D \text{ è diagonale.}$$

Quindi $A^T = P^T D^T P = P^T D P = A$ e A è simmetrica.