Lezione 8 17.11.22

①

Composizione di applicazioni lineari

$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{S} U$ T e S lineari

$S \circ T$ è lineare: $S\circ T(v_1+v_2) = S\left(T(v_1)+T(v_2)\right) =$

$= S(T(v_1)) + S(T(v_2)) =$
$= (S\circ T)(v_1) + (S\circ T)(v_2)$

• $S\circ T(\alpha v) = S(T(\alpha v)) = S(\alpha T(v)) =$
$= \alpha S(T(v)) = \alpha (S\circ T)(v)$.

Allora se abbiamo $\mathbb{R}^q \xrightarrow{A} \mathbb{R}^p \xrightarrow{B} \mathbb{R}^s$, $A \in M(p,q)$
$B \in M(s,p)$

$B \circ A$ deve essere una matrice $C \in M(s,q)$

Vediamo $C^1 = B(A^1) = a_{11}B^1 + \quad + a_{p1}B^p$

$C^i = \sum_{j=1}^{p} a_{ji} B^j$

Questo è un prodotto "righe per colonne"

Posso fare BA se le righe di B sono lunghe come le colonne di A. Le righe di $B \in M(s,p)$ sono lunghe p, le colonne di $A \in M(p,q)$ sono lunghe p. Allora definiamo

$C = (c_{ij})$ dove $c_{ij} = \langle B_i, A^j \rangle$ $\quad i = 1, \dots, s$
$j = 1, \dots, q$

Esercizio

$rk\, C \leq rk\, B, rk\, A$

Se $T: V \to W$ è iniettiva e surgettiva, allora
1. $\dim V = \dim W$
2) $S = T^{-1} : W \to V$ è lineare

Infatti $\dim \ker T = 0 \Rightarrow \dim V = \dim \operatorname{Im} T$. Ma $\operatorname{Im} T = W \Rightarrow \dim V = \dim \operatorname{Im} T = \dim W$.

Sia $S = T^{-1}$ S è iniettiva e surgettiva e lineare
$S(w_1 + w_2) = S(T(v_1) + T(v_2))$ dove v_1 e v_2 ~~esistono~~
perché T è su e sono unici perché T è iniettiva
cioè $v_1 = S(w_1)$, $v_2 = S(w_2)$
Quindi $\cancel{S(w_1)}$ $S(w_1 + w_2) = v_1 + v_2 = S(w_1) + S(w_2)$
$S(\alpha w) = S(\alpha T(v)) = ST(\alpha v) = \alpha v$. Ma $S(w) = v$
cioè $S(\alpha w) = \alpha S(w)$ S è lineare

$$S \circ T = id_V \qquad T \circ S = id_W$$

Definizione $A \in M(n,n)$ è invertibile se $\exists B \in M(n,n)$ tale che $AB = I = BA$.

Da quanto visto prima A è invertibile $\Leftrightarrow$ ha rango n

Infatti in tal caso $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è iniettiva e surgettiva $\Rightarrow$ ha un'inversa B. Come si calcola?
Con Gauss.
Dobbiamo trovare $B = (x_{ij})$ tale che

$$AB = I \quad \text{cioè} \quad AB^1 = I^1$$

$$\vdots$$

$$AB^n = I^n$$

Sono n sistemi con la stessa matrice dei coefficienti che è A e diversi termini noti, le colonne di I

Sappiamo che la soluzione è unica perché le righe di A sono indipendenti. Risolviamo gli n sistemi simultaneamente. Si parte da

$$A \; I_n$$

e si fa Gauss. Si arriva a SC dove S è triang superiore con n pivots sulla diagonale. Si fa Gauss all'indietro, dall'ultima riga in su. Troviamo DC' dove D è diagonale con i pivots sulla diagonale.

Dividiamo ogni riga per il suo pivot e troviamo

$$I \; B$$

dove B è l'inversa di A.

Esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

$$AI = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{Gauss } R_2 - 2R_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad R_3 + \frac{3}{2} R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -3 & 3/2 & 1 \end{array}\right)$$

Ora Gauss all'indietro
$R_2 - 2R_1$
$R_3 + 2R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -5 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -3 & 3/2 & 1 \end{array}\right) \qquad R_1 + \frac{1}{2} R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -3 & 3/2 & 1 \end{array}\right)$$ Ora dividiamo per i pivots

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 3 & 2 \end{array}\right)$$ moldise $\begin{cases} b_{11} = -3 \\ b_{21} = -2 \\ b_{31} = -6 \end{cases}$ $\begin{cases} b_{12} = 2 \\ b_{22} = 1 \\ b_{32} = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} b_{13} = 1 \\ b_{23} = 1 \\ b_{33} = 2 \end{cases}$

e (salvo errori) $B = A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Esercizio Se A non è invertibile ($A \in M(n,n,\mathbb{R})$). esistono B e C in $M(n,n,\mathbb{R})$ tali che $BA = AC = O$
Hint usare che $\operatorname{Ker} A \neq \{0\}$ e $\operatorname{Im} A \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base dello spazio vett. V.
Allora c'è un isomorfismo

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$$ così definito:

se $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$, $\varphi_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Si noti che $\varphi_{\mathcal{B}}(v_i) = e_i$, $i = 1, \dots, n$.