Lezione 5 26 Ottobre 2022

Riprendiamo i sistemi lineari:

Abbiamo visto che se A è la matrice del sistema senza i termini noti, A^1 è moltiplicato per x_1, A^2 per x_2, ..., A^q per x_q.

Ma $x_1 A^1 + \dots + x_q A^q \in \mathbb{R}^p$

Allora se $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q$ e interpretiamo

$$AX = x_1 A^1 + \dots + x_q A^q \in \mathbb{R}^p$$

possiamo pensare A come applicazione da $\mathbb{R}^q$ a $\mathbb{R}^p$

$$A : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R}^p$$
$$AX = x_1 A^1 + \dots + x_q A^q \in \mathbb{R}^p$$

Notiamo che $A(X+Y) = AX + AY$ e $A(aX) = aAX$
Diciamo che A è LINEARE
Allora possiamo dire, se $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$

- Il sistema $AX = B$ è risolubile $\iff$ B è comb. lineare delle colonne di B
- L'insieme delle soluzioni è
$$S = \{X \in \mathbb{R}^q : AX = B\} = A^{-1}(B)$$
cioè S è l'immagine inversa di B

Ora diamo un'altra definizione

$U \subset \mathbb{R}^n$ $(o\ U \subset M(p, q, \mathbb{R}))$ è un SOTTOSPAZIO se

$u_1, u_2 \in U \Rightarrow u_1 + u_2 \in U$

$a \in \mathbb{R}, u \in U \Rightarrow au \in U$

Ora definiamo per $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{R})$

NUCLEO di $A = \operatorname{Ker} A = \{X \in \mathbb{R}^q : AX = 0\}$

IMAGINE di A $\quad \operatorname{Im} A = \{B \in \mathbb{R}^p : \exists X$ tale che $AX = B\} =$

$= \{B \in \mathbb{R}^p : AX = B$ ha soluzioni$\}$.

~~Sia~~ $\operatorname{Ker} A$ è sottospazio di $\mathbb{R}^q$, $\operatorname{Im} A$ è sottospazio di $\mathbb{R}^p$

Prova: facile, per esercizio.

Osservazione: $Ae_1 = A^1, Ae_2 = A^2, \ldots, Ae_q = A^q$

Ultima definizione. Dati vettori $v_1, \ldots, v_e \in \mathbb{R}^n$ (o $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{R})$)

$\operatorname{span}(v_1, \ldots, v_e) = \{$combinazioni lineari di $v_1, \ldots, v_e\}$
è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ (o di $\mathcal{M}(p,q,\mathbb{R})$)
prova: la somma di due combi. lineari di $v_1, \ldots, v_e$ è ancora una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_e$ e il multiplo di una combinazione lineare lo stesso.

Osservazione. $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}(A^1, \ldots, A^q)$.

Definizione

$W \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ se

- $w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W$
- $a \in \mathbb{R}, w \in W \Rightarrow a w \in W$

(W è chiuso per somma e prodotto per scalare)

Sia $\operatorname{Ker} A = \{ X \in \mathbb{R}^q \mid AX = 0 \}$

che $\operatorname{Im} A = \{ B \in \mathbb{R}^p \mid B$ è comb. lin di $A^1 \dots A^q \}$

$= \{ B \in \mathbb{R}^p \mid AX = B$ ha soluzione $\}$

sono sottospazi rispettivamente di $\mathbb{R}^q$ e $\mathbb{R}^p$.

Notate che $Ae_1 = A^1, \dots, Ae_q = A^q$

Definizione

il sottospazio $\operatorname{span}(v_1 \dots v_l)$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_l$ cioè

$\mathbb{R}^n \supseteq \operatorname{span}(v_1, \dots, v_l) = \{ a_1 v_1 + \dots + a_l v_l \}_{a_1, \dots, a_l \in \mathbb{R}}$

Allora $\operatorname{Im} A = \operatorname{span}(A^1, \dots, A^q) \subset \mathbb{R}^p$

Ora generalizziamo.

Definizione Dato un insieme V diciamo che V è uno SPAZIO VETTORIALE se sono definite due operazioni

$+ : V \times V \to V \quad (v_1, v_2) \to v_1 + v_2$

$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V \quad (a, v) \to av$

che verificano

1) ~~+~~ è commutativa
$v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

2) + è associativa $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$

3) c'è un elemento neutro, il vettore nullo

$$0 + v = v + 0 = v$$

4) c'è un opposto di ogni vettore v: $-v$ tale che

$$v + (-v) = -v + v = 0$$

5) $a \cdot (v_1 + v_2) = av_1 + av_2$, $(a+b)v = av + bv$

7) $(ab)v = a(bv) = b(av$

8) $1 \cdot v = v \quad 0 \cdot v = \vec{0}$

Esempi: $\mathbb{R}^n$, $M(p, q, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}[x]$

$\{f : A \to V\}$ dove A è un insieme e V uno spazio vettoriale

Def 1) $W \subset V$ è un sottospazio se W è chiuso per somma e prodotto per uno scalare

$$w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 \in W; \quad a \in \mathbb{R}, w \in W \Rightarrow a\,w \in W$$

Esempio: $v_1, \dots, v_e \in V \Rightarrow \operatorname{span}(v_1, \dots, v)$ è un sottospazio di V.

2) Una BASE di V $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ è un insieme di vettori tali che

1) $\operatorname{span} \mathcal{B} = V$ 2) $v_1, \dots, v_n$ sono indipendenti

1 e 2 sono equivalenti a

a) $\mathcal{B}$ è un insieme MASSIMALE di vettori indipendenti

b) $\mathcal{B}$ è un insieme minimale di generatori

<u>nota</u> a) $\Rightarrow$ ogni altro vettore dipende da $v_1 - v_n$ e quindi $\operatorname{span} \mathcal{B} = V$

b) $\Rightarrow$ $v_1 - v_n$ sono indipendenti, se no uno sarebbe superfluo.

Esempi: le basi canoniche di $\mathbb{R}^n$, $M(p, q, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}[t]$

ATTENZIONE

1) $v_1, \dots, v_k$ indipendenti $\Rightarrow$ ogni $v \in \text{span}(v_1, \dots, v_k)$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $v_1 \dots v_k$. Infatti se

$$v = a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = b_1 v_1 + \dots + b_k v_k \Rightarrow$$

$$\vec{0} = v - v = (a_1 - b_1) v_1 + \dots + (a_k - b_k) v_k$$

da cui $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_k = b_k$ perché $v_1 \dots v_k$ sono indipendenti

2) Se un insieme A di vettori contiene un insieme di generatori $v_1, \dots, v_\ell$ di V allora $\text{span}\, A = V$. Infatti ogni vettore di V è combinazione lineare di $v_1, \dots, v_\ell$ che sono elementi di A

Problema. Ogni spazio vettoriale ha (almeno) una base?

Risposta SI però lo proveremo solo per spazi finitamente generati.

Teorema $V = \text{span}(v_1, \dots, v_\ell)$ e sia $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \dots, v_\ell\}$ un insieme massimale di vettori indipendenti. Allora $\mathcal{B}$ è base di V.

Prova: se $v_1 = \vec{0}$ lo scartiamo, se no lo prendiamo. Se $v_2 \in \mathrm{span}(v_1)$ lo scartiamo, se no lo prendiamo. Quando abbiamo accumulato $v_{i_1}, \dots, v_{i_k}$, prendiamo il prossimo v_i: se

$v_i \in \mathrm{span}(v_{i_1}, \dots, v_{i_k})$ lo scartiamo, se no lo prendiamo.
Ci fermiamo quando arriviamo a v_e.

L'insieme ottenuto è fatto di vettori indipendenti ed è massimale. Se esso è

$$\mathcal{B} = \{u_1, \dots, u_n\}$$

si ha $v_1, \dots, v_e \in \mathrm{span}\,\mathcal{B}$, quindi $\mathrm{span}\,\mathcal{B} = V$
Inoltre $u_1, \dots, u_k$ sono indipendenti e quindi

$\mathcal{B}$ è una base di V $\square$

Ci piacerebbe
Domanda: questo ragionamento si applica a uno spazio non finitamente generato?

Ci piacerebbe provare che tutte le basi di V hanno la stessa cardinalità, perché questo ci direbbe da quanti parametri dipende un vettore di V. Ci aiuta il prossimo teorema

Teorema (del completamento). Sia $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ una base di V e $w_1, \dots, w_k$ vettori di V indipendenti, $k < n$. Allora $\exists$ $n-k$ vettori in $\mathcal{B}$ tali che aggiunti a $w_1, \dots, w_k$ diano un'altra base di V

Corollario

Tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

prova Siano $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ due basi di V

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \quad e \quad \mathcal{B}' = \{u_1, \ldots, u_h\}$$

se $h < n$ il teorema del completamento ci dice che posso prendere $n - k$ elementi di $\mathcal{B}$ che uniti a $\mathcal{B}'$ diano una base di V. Ma $\mathcal{B}'$ è una base e i suoi elementi sono un insieme massimale di vettori indipendenti. La contraddizione ci dice che $h \geq n$.
Con lo stesso argomento si prova che $n \geq h$
Quindi $h = n$ e il Corollario è provato.