Lezione 4 19 Ottobre 2022

Esercizio d'esame
Al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ discutere le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ ax + y - 3z = 3 - b \\ (a+1)y + z = 1 \end{cases}$$

Soluzione: scriviamo la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ a & 1 & -3 & 3-b \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Cominciamo Gauss

$R_2 \to R_2 - aR_1$ (non ci interessa il valore di a)

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -3+a & 3-a-b \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ Scambiamo R_2 ed R_3

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a^2 & -3+a & 3-a-b \end{pmatrix}$$ ora $1-a^2 = (1+a)(1-a)$ quindi possiamo fare $R_3 - (1-a)R_2$

Ci viene

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & a+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2(a-2) & 2-b \end{pmatrix}$$ Ora discutiamo

- se $a \neq -1$ e $a \neq 2$ ci sono 3 pivots $1, a+1, 2(a-2)$ e quindi una sola soluzione, qualunque sia b

- se $a = -1$ i pivots sono solo 2 pivots

$$\begin{pmatrix} +1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 2-b \end{pmatrix}$$

la seconda equazione è

$z = 1$

la terza è

$-6z = 2-b$

perché le due equazioni non siano in contraddizione si deve avere

$$\frac{b-2}{6} = \frac{2-b}{-6} = 1 \quad \text{cioè } b = 8$$

quindi

- $a = -1$ $b = 8$ ci sono infinite soluzioni che dipendono da y

- $a = -1$, $b \neq 8$ nessuna soluzione.

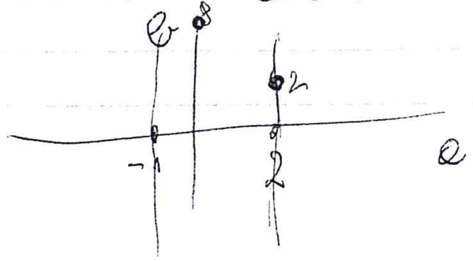
- se $a = 2$, l'ultima equazione è

$$0 \cdot z = 2 - b$$

- $a = 2$, $b = 2$ infinite soluzioni che dipendono da z

- $a = 2$, $b \neq 2$ nessuna soluzione.

Abbiamo visto tutti i casi? sì



Ora ricapitoliamo quanto visto in $\mathbb{R}^3$

Abbiamo la nozione di vettore in $\mathbb{R}^3$

- i vettori si possono sommare
- si possono moltiplicare per numeri reali

Le regole sono quelle della somma e del prodotto in $\mathbb{R}$

In particolare:

- C'è un elemento neutro per la somma
  $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v = v$
- C'è un vettore opposto $-v$ tale che $v + (-v) = 0$
  se $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad -v = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$
- il prodotto è distributivo rispetto alla somma

$$a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2 \,, \quad (a+b)v = av + bv$$

Tutto ciò dà una struttura a $\mathbb{R}^3$, struttura che rivedremo quando definiremo gli spazi vettoriali.

Abbiamo introdotto in $\mathbb{R}^3$ un prodotto scalare
$\langle v, w \rangle = |v|\,|w| \cos\alpha$
dove, per Pitagora $|v| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e α è l'angolo fra i 2 vettori.

Abbiamo dimostrato che, se p è la proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ nella retta che contiene w allora

$$p(v) = |v| \cos\alpha \, w' \qquad \text{dove } w' = \frac{w}{|w|}$$

Sapendo che $p(v_1+v_2) = p(v_1) + p(v_2)$
(perché la proiezione di un parallelogramma è un parallelogramma degenere) e $p(av) = a\,p(v)$ (per Talete), otteniamo le proprietà del prodotto scalare

$$\langle v_1+v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$$
$$\langle av, w\rangle = a\langle v, w\rangle$$
$$\langle v, w_1+w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$$
$$\langle v, a w\rangle = a\langle v, w\rangle$$

Da queste proprietà segue che se

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x e_1 + y e_2 + z e_3 \quad e \quad w = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x' e_1 + y' e_2 + z' e_3,$$

$$\langle v, w\rangle = x x' + y y' + z z'.$$

I seguenti 2 esercizi sono applicazioni di quanto visto

1) Dato il piano di equazione $ax + by + cz + d = 0$ scrivere la retta per $P_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ perpendicolare al piano
2) Data la retta $X = P_0 + t\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ scrivere l'equazione del piano per $P_1 = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ perpendicolare alla retta.

Soluzioni 1) la retta cercata è $X = P_0 + t\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$
2) il piano per 0 perpendicolare alla retta ha equazione
$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$$

Ora cerchiamo un termine noto d che lo faccia passare per P_1. Si deve avere

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma (u_3) + d = 0$$

Quindi il piano ha equazione

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \alpha u_1 - \beta u_2 - \gamma u_3 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha (x - u_1) + \beta (y - u_2) + \gamma (z - u_3) = 0$$

Ora generalizziamo.
Consideriamo $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ volte}}$. Un elemento $X \in \mathbb{R}^n$ è una n-upla di numeri reali

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Allora possiamo definire una somma e un prodotto in $\mathbb{R}^n$ come in $\mathbb{R}^3$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad X + Y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha X = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

Elemento neutro per la somma è il vettore nullo

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Consideriamo gli ~~Esistono~~ n vettori $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si ha

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$$

Anche in $\mathbb{R}^n$ c'è un prodotto scalare con le stesse proprietà di quello in $\mathbb{R}^n$ (6)

$$\langle v, w \rangle = |v||w| \cos \alpha$$

dove ancora $|v| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ se $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Scrivendo v e $w = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$ ~~tramite~~ i vettori $e_1 \dots e_n$

otteniamo $\langle v, w \rangle = x_1 x_1' + x_2 x_2' + \dots + x_n x_n'$.

Questo perché $\langle e_i, e_i \rangle = |e_i|^2 = 1$ e se $i \neq j$ $\langle e_i, e_j \rangle = 0$

Le proprietà di $+$ e $\cdot$ in $\mathbb{R}^n$ ~~verifica~~ sono 8.

- $\forall u, v, w \in \mathbb{R}^n \quad (u+v)+w = u+(v+w)$
- $\exists\, 0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad 0+v = v+0 = v$
- $\forall v \in \mathbb{R}^n$ esiste $-v \in \mathbb{R}^n$: $v+(-v) = -v+v = 0$
- $\forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad v+w = w+v$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v, w \in \mathbb{R}^n \quad \lambda(v+w) = \lambda v + \lambda w$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$
- $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n \quad (\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$
- $\forall v \in \mathbb{R}^n \quad 1 \cdot v = v$ e $\underset{\mathbb{R}}{0} \cdot v = 0$

Le stesse 8 proprietà valgono per $M(p, q, \mathbb{R}) =$

$\{$ matrici a coefficienti reali con p righe e q colonne $\}$

$$M(p,q,\mathbb{R}) \ni A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1q} \\ a_{21} & a_{2q} \\ & \\ a_{p1} & a_{pq} \end{pmatrix}$$

Come $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ si scrive $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$

Ogni matrice $A \in \mathcal{M}(p, q, \mathbb{R})$ si scrive

$$A = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} a_{ij} E_{ij} \quad \text{dove}$$

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ \text{righe} \rightarrow \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow \text{colonne}$$

ha un 1 nel posto (i, j) e 0 altrove.

Ora diamo alcune definizioni in $\mathbb{R}^n$, che valgono anche per le matrici

Definizione 1. Una COMBINAZIONE lineare di k vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ è ~~una~~ ~~il vettore~~ una scrittura

$$\cancel{v =} a_1 v_1 + \dots + a_k v_k$$

dove $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$; il risultato è ancora un vettore in $\mathbb{R}^n$

2. k vettori $v_1, \dots, v_k$ sono DIPENDENTI se esistono numeri reali $a_1 \dots a_k$ non tutti nulli tali che

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0$$

Sono INDIPENDENTI se $\forall$ combinazione lineare

$$a_1 v_1 + \quad + a_k v_k$$

se essa dà il vettore nullo allora $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$

Ossia

$$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k = 0 \Rightarrow a_1 = \dots = a_k = 0$$

Esempio $e_1, \dots, e_n$ sono indipendenti e sono un insieme MASSIMALE di vettori indipendenti: ~~se~~ aggiungete un altro vettore $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ avete

che $e_1 \dots, e_n\, v$ sono dipendenti perché

$$a_1 e_1 + \dots + a_n e_n - v = 0 \qquad e \ -1 \neq 0$$

Inoltre $e_1 \dots e_n$ generano $\mathbb{R}^n$ perché ogni $v \in \mathbb{R}^n$ è loro combinazione lineare

$(e_1, \dots, e_n)$ è un insieme MINIMALE di generatori perché se ne tolgo uno non genero più tutto $\mathbb{R}^n$ (se tolgo e_1, e_1 non è comb. lineare di $e_2, \dots e_n$)

La cosa funziona anche per $M(p, q, \mathbb{R})$ con le $p \cdot q$ matrici

$$E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1q}, E_{21}, \dots, E_{2q}, \dots, E_{p1}, \dots, E_{pq}$$

che sono un insieme massimale di vettori indipendenti e un insieme minimale di generatori.

Chiameremo BASE di $\mathbb{R}^n$ o di $M(p, q, \mathbb{R})$ ogni insieme massimale di vettori indipendenti che sono quindi anche un insieme minimale di generatori

Diremo anche che $\mathbb{R}^n$ e $M(p, q, \mathbb{R})$ sono SPAZI VETTORIALI

Anche $\mathbb{R}[x] = \{$polinomi a coeff. reali, 1 variabile$\}$ sono uno spazio vettoriale con somma e prodotto per uno scalare, ma non hanno una base finita.

Infatti se per assurdo $\{P_1, \dots, P_k\}$ generassero $\mathbb{R}[x]$ e, detti $d_1 \dots d_k$ i loro gradi, sia $d = \max(d_1 \dots d_k)$ ogni loro combinazione lineare

$$\alpha_1 P_1 + \dots + \alpha_k P_k$$

avrebbe al più grado d, quindi $P_1, \dots, P_k$ non possono generare i polinomi di grado $> d$.

Tuttavia $1, x, x^2, \dots x^d \dots$ i monomi sono un insieme massimale di vettori indipendenti

- sono indipendenti: presi comunque

$$x^{s_1}, x^{s_2}, \dots, x^{s_e} \qquad s_1 < s_2 < \dots < s_e$$

il polinomio $\alpha_1 x^{s_1} + \alpha_2 x^{s_2} + \dots + \alpha_e x^{s_e}$ è il polinomio nullo $\Longleftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_e = 0$

- è un insieme massimale: se aggiungo un polinomio, esso è comb. lineare di monomi.

Quindi l'insieme $\{1, x, x^2 \dots\}$

è una base di $\mathbb{R}[x]$.

Osservazione: in uno spazio vettoriale le somme sono finite e così le combinazioni lineari.