Lezione 2 29.9.2022

Eliminando i parametri t ed s dalle equazioni parametriche di un piano

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) + s(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) + s(y_2 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) + s(z_2 - z_0) \end{cases}$$

(dove $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sono i 3 punti non allineati che determinano il piano)

abbiamo trovato un'equazione di grado 1

$$* \qquad ax + by + cz + d = 0$$

che è l'equazione cartesiana del piano che passa per P_0, P_1 e P_2

Questo significa che ogni soluzione dell'equazione $*$ è ~~un punt~~ la terna delle coordinate di un punto del piano e viceversa se un punto appartiene al piano le sue coordinate sono una soluzione dell'equazione $*$

Vi ho suggerito, per esercizio, data un'equazione $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, di dimostrare che si tratta dell'equazione di un piano in questo modo:

- prendiamo tre soluzioni, ad esempio se $\alpha \neq 0$ $\beta \neq 0$ e $\gamma \neq 0$ possono essere $(0, 0, -\delta/\gamma)$, $(0, -\frac{\delta}{\beta}, 0)$ e $(-\delta/\alpha, 0, 0)$

- scriviamo le equazioni parametriche del piano che passa per le 3 soluzioni
- eliminiamo i parametri t e s.
- otteniamo un'equazione di grado 1
- verifichiamo che si tratta dell'equazione da cui siamo partiti o, forse, un suo multiplo. Tanto le soluzioni di

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$$

sono le stesse di $k(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0$ se k è un numero reale $\neq 0$.

Se eliminiamo il parametro t dalle equazioni parametriche della retta per $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$

$$\begin{cases} x = x_0 + t(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + t(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + t(z_1 - z_0) \end{cases}$$

otteniamo le equazioni di due piani che si intersecano nella retta.
Se $x_1 - x_0 \neq 0$ (altrimenti lo saranno o $(y_1 - y_0)$ o $(z_1 - z_0)$, visto che $P_1 \neq P_0$) scriviamo

$$\begin{cases} t = \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0} \\ y = y_0 + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \dfrac{x - x_0}{x_1 - x_0}(z_1 - z_0) \end{cases}$$

I due piani hanno equazioni

$$f = (y_1 - y_0)x - (x_1 - x_0)y + y_0(x_1 - x_0) + x_0(y_1 - y_0) = 0$$

e

$$g = (z_1 - z_0)x - (x_1 - x_0)z - x_0(z_1 - z_0) + z_0(x_1 - x_0) = 0$$

Dunque la retta r è data dall'intersezione

$$\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

Ma per una retta passano infiniti piani, come li trovo?

Se a, b sono due numeri reali, non entrambi nulli, l'equazione

$$af + bg = 0$$

ha grado 1 e quindi rappresenta un piano che passa per r. Infatti se $P \in r$ $f(P) = 0$, $g(P) = 0$ e quindi anche $(af + bg)(P) = 0$

Un piano per r ha per forza un'equazione di questo tipo, cioè $\exists\, a, b$ tali che l'equazione $af + bg = 0$ è l'equazione del piano? SI Infatti

Prendiamo un punto $Q = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ che non appartiene alla retta r.

~~Quindi almeno una tra f e g non si an~~

Quindi almeno una tra f e g non ha $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ come soluzione. Ora cerchiamo a, b tali che $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ sia soluzione di $af + bg = 0$

e e b devono verificare

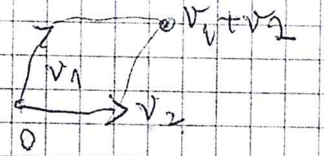
$$a f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + b g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0$$

Possiamo prendere $a = g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ $b = -f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ e abbiamo trovato l'equazione del piano per r e per Q.

Vettori

Se ho un segmento $P_1 - P_0$ orientato da P_0 verso P_1 ci sono tanti segmenti uguali a lui. Si trovano su rette parallele ad lui con lo stesso lunghezza e lo stesso verso. Tra questi ce ne è uno solo che ha come primo estremo O. Un segmento P - O si chiama VETTORE

• i vettori si sommano con la regola del parallelogramma



e si possono moltiplicare per un numero reale.
Ad esempio $U_1 - O = e_1$, $U_2 - O = e_2$, $U_3 - O = e_3$ sono vettori e se $\vec{v} = P - O = (x, y, z)$ si ha

$$\vec{v} = x e_1 + y e_2 + z e_3$$

Lo abbiamo provato quando abbiamo definito le coordinate: P è il vertice opposto a O nel parallelepipedo che ha come lati $x e_1 = (x, 0, 0)$ $y e_2 = (0, y, 0)$ e $z e_3 = (0, 0, z)$. Per la regola del parallelogramma $\vec{v} = x e_1 + y e_2 + z e_3$

Come calcoliamo la lunghezza di $\vec{v}$, che indichiamo con $|\vec{v}|$?
Pitagora ci aiuta:

La diagonale del parallelepipedo è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo che ha come cateti la diagonale del rettangolo di lati xe_1 e ye_2 e il segmento ze_3.
Dunque $|\vec{v}|^2 = (x^2+y^2)+z^2 = x^2+y^2+z^2$

Non solo: possiamo calcolare la distanza tra due punti $P=(a,b,c)$ e $Q=(\alpha,\beta,\gamma)$

$$d(P,Q) = \sqrt{(a-\alpha)^2+(b-\beta)^2+(c-\gamma)^2}$$

e possiamo definire la distanza tra P e un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^3$

$$d(P,A) = \min_{Q\in A} (d(P,Q)) \quad \text{o meglio}$$

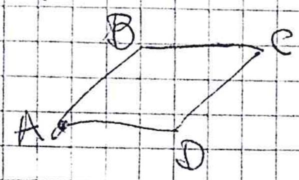
$$d(P,A) = \inf_{Q\in A} d(P,Q)$$

Prodotto scalare

Cominciamo con una osservazione:
Possiamo proiettare $\mathbb{R}^3$ su un piano π in questo modo: se $P\in\mathbb{R}^3$ c'è un'unica retta perpendicolare a π che passa per P. Tale retta interseca π in un punto P'. $P' = \mu(P)$ è la proiezione di P su π.

- La proiezione su π porta parallelogrammi in parallelogrammi (eventualmente degeneri)

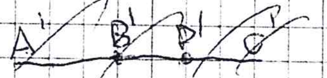
È una conseguenza del teorema di Talete:



segmenti uguali su rette parallele si proiettano in segmenti uguali su rette parallele.

Questo significa che $pr(\vec{v_1}+\vec{v_2}) = pr(\vec{v_1}) + pr(\vec{v_2})$
e $pr(a\vec{v}) = a\, pr(\vec{v})$

Lo stesso succede nella proiezione ortogonale su una retta: l'immagine di un parallelogramma è un parallelogramma degenere $A'B'C'D'$



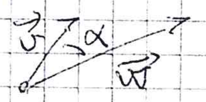
con $\overline{A'B'} = \overline{D'C'}$ e $\overline{A'D'} = \overline{B'C'}$

per cui $pr_2(\vec{v_1}+\vec{v_2}) = pr_2(\vec{v_1}) + pr_2(\vec{v_2})$

$$pr_2(a\vec{v}) = a\, pr_2(\vec{v})$$

Ora definiamo il prodotto scalare

$$<\vec{v},\vec{w}> = |\vec{v}||\vec{w}|\cos\alpha \in R$$

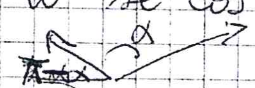


$<\vec{v},\vec{w}>$ è un numero reale. Come si calcola?

Osserviamo che il prodotto scalare è commutativo. Dunque ciò che proviamo nella prima variabile vale anche per la seconda.

$|\vec{v}|\cos\alpha$ è la lunghezza della proiezione di $\vec{v}$ sulla retta di $\vec{w}$ se $\cos\alpha > 0$ cioè se α è acuto

Se α è ottuso



$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

Quindi la lunghezza di $pr(v)$ è $|v|\,|\cos\alpha|$ ma se $\cos\alpha < 0$ $pr(v)$ non appartiene alla semiretta di w.

Lo possiamo dire meglio. Sia $w' = \frac{w}{|w|}$

w' è lungo 1 e appartiene alla semiretta che contiene w. Allora $\overrightarrow{pr(v)} = (|v| \cos\alpha)\, w'$

Ora, poiché $\overrightarrow{pr(v_1+v_2)} = \overrightarrow{pr(v_1)} + \overrightarrow{pr(v_2)}$ e

$pr(a\vec{v}) = a\,\overrightarrow{pr(v)}$, si ha: se $v = v_1 + v_2$

$\overrightarrow{pr\, v} = |v| \cos\alpha\, w'$, $pr(v_1) = |v_1| \cos\alpha_1\, w'$, ~~$pr(v_2)$~~

$\overrightarrow{pr\, v_2} = |v_2| \cos\alpha_2\, w'$

Dunque $|v| \cos\alpha = |v_1| \cos\alpha_1 + |v_2| \cos\alpha_2$ a prescindere dal segno di $\cos\alpha$, $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$.

Poiché $pr(a\vec{v}) = a\,\overrightarrow{pr(v)}$ si ha

$pr(a\vec{v}) = \cancel{a v \cos}\; a\, pr(\vec{v}) = a\,|v|\, w'$

Dunque $\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle$

$\langle av, w\rangle = a \langle v, w\rangle$

e per commutatività

$\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$

Ora supponiamo $v = (a, b, c)$ e $w = (a', b', c')$.

Quindi

$\vec{v} = a\vec{e_1} + b\,\vec{e_2} + c\,\vec{e_3}$

$\vec{W} = a'\vec{e_1} + b'\vec{e_2} + c'\vec{e_3}$

e

$\langle v, w\rangle = \langle a e_1 + b e_2 + c e_3,\; a' e_1 + b' e_2 + c' e_3\rangle$

Ricordiamo che $\langle e_1, e_1\rangle = \langle e_2, e_2\rangle = \langle e_3, e_3\rangle = 1 \cdot 1 \cos 0 = 1$

mentre $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = \langle e_2, e_3\rangle = 1 \cdot 1 \cos\frac{\pi}{2} = 0$

Ora calcoliamo

$$\boxed{\langle v, w \rangle} = \langle a e_1, a' e_1 + b' e_2 + c e_3 \rangle + \langle b e_2, a' e_1 + b' e_2 + c' e_3 \rangle$$

$$+ \langle c e_3, a' e_1 + b' e_2 + c' e_3 \rangle =$$

$$= aa' + ab' \cancel{\langle e_1, e_2 \rangle} + ac' \cancel{\langle e_1, e_3 \rangle} +$$

$$+ ba' \cancel{\langle e_2, e_1 \rangle} + bb' + bc' \cancel{\langle e_2, e_3 \rangle} +$$

$$+ ca' \cancel{\langle e_3, e_1 \rangle} + cb' \cancel{\langle e_3, e_2 \rangle} + cc' =$$

$$= \boxed{aa' + bb' + cc'}$$

ora sì che sappiamo calcolare!

Conseguenze

1) $\vec{v}$ è perpendicolare a $\vec{w} \iff \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

2) Dato il piano π di equazione $ax + by + cz = 0$ il vettore $\vec{v} = (a, b, c) = a e_1 + b e_2 + c e_3$ è perpendicolare a π. Infatti

$ax + by + cz = \langle v, (x, y, z) \rangle = 0$ se $P = (x, y, z)$ è un punto di π.