Ritorniamo al diagramma della scorsa lezione

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & V \arrow[r, "T"] \arrow[dl, "F_{\mathcal{B}'}"'] \arrow[d, "F_{\mathcal{B}}"] & W \arrow[d, "F_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, "F_{\mathcal{C}'}"] & \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "M"] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^s & \mathbb{R}^s \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}$$

Osserviamo che dato T e basi $\mathcal{B}$ di V e $\mathcal{C}$ di W si trova A. Ma dato A e le basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ A definisce l'applicazione lineare $T: V \to W$ data da

$$T = F_{\mathcal{C}}^{-1} \circ A \circ F_{\mathcal{B}}$$

Analogamente i cambi di base M e N ci danno $A' = N^{-1} A M$ che è la matrice associata a T nelle basi $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$.

Ma ogni B equivalente ad A è associata a T in basi opportune. Infatti se $B = N_1^{-1} A M_1$ N_1 ed M_1 sono matrici quadrate invertibili, N_1 ha s righe e s colonne mentre M_1 è $n \times n$.
Le colonne di M_1 ci danno n vettori indipendenti di V che sono combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}$ con i coefficienti della corrispondente colonna di M_1. Questi n vettori sono una base $\mathcal{B}_1$ di V.
Analogamente N_1 ci dà s vettori indipendenti di W che formano una base $\mathcal{C}_1$ di W
La matrice associata a T nelle basi $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{C}_1$ è B

Proposizione. Ogni matrice $A \in M(s, n, \mathbb{R})$ di rango r è equivalente alla matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M(s, n)$$

prova Sia A di rango r. Quindi $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ e $\dim \operatorname{Im} A = r$. Quindi $\dim \operatorname{Ker} A = n - r$.
Prendiamo una base

$(u_1, \dots, u_{n-r})$ di $\operatorname{Ker} A$ e completiamola

a base $(\underbrace{u_1, \dots, u_{n-r}, v_1 - v_r}_{\mathcal{B}})$ di $\mathbb{R}^n$

Come base di $\mathbb{R}^s$ prendiamo un completamento $\mathcal{C}$ a base di $T(v_1) \dots T(v_r)$ (che sono indipendenti come abbiamo visto nel teorema della dimensione).
La matrice associata all'applicazione lineare $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ è

$$\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = N_{\mathcal{C}}^{-1} A M$$

dove M ha per colonne gli elementi di $\mathcal{B}$ e N ha per colonne gli elementi di $\mathcal{C}$.

Esercizio sia $p(x)$ il polinomio

$$p(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \qquad \text{con } \alpha \neq \beta$$

e sia $A \in M(n, n, \mathbb{R})$ tale che $p(A) = 0$.
Dimostrare che A è simile ad una matrice diagonale.

Solutione: $(A - \alpha I)(A - \beta I) = 0$ significa che $\mathrm{Im}(A-\beta I) \subseteq \mathrm{Ker}(A-\alpha I)$. Quindi

$$\dim \mathrm{Im}(A-\beta I) \leq \dim \mathrm{Ker}(A-\alpha I)$$

Sommiamo ad ambo i membri il numero $\dim \mathrm{Ker}(A-\beta I)$ otteniamo

$$n = \dim \mathrm{Ker}(A-\beta I) + \dim \mathrm{Im}(A-\beta I) \leq$$
$$\dim \mathrm{Ker}(A-\beta I) + \dim \mathrm{Ker}(A-\alpha I) \leq n$$

- $\mathrm{Ker}(A-\beta I) \cap \mathrm{Ker}(A-\alpha I) = \{0\}$

infatti se $v \in$ $\quad Av-\beta v=0$, cioè $Av=\beta v$
$\quad Av-\alpha v=$, cioè $Av=\alpha v$ $\quad \alpha\neq\beta \Rightarrow v=0$

- quindi $\dim\left[\mathrm{Ker}(A-\beta I) + \mathrm{Ker}(A-\alpha I)\right] =$
$= \dim \mathrm{Ker}(A-\beta I) + \dim \mathrm{Ker}(A-\alpha I) \leq n$

- dalla disuguaglianza si desume

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(A-\beta I) \oplus \mathrm{Ker}(A-\alpha I)$$

Allora una base $\mathcal{B}_1$ di $\mathrm{Ker}(A-\beta I)$ unita a una base $\mathcal{B}_2$ di $\mathrm{Ker}(A-\alpha I)$ ci dà una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$

Rispetto a questa base la matrice associata diventa

$$D = \begin{pmatrix} \beta & & & & \\ & \ddots & & & 0 \\ & & \beta & & \\ & 0 & & \alpha & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \alpha \end{pmatrix}$$ che è simile ad A

perché è associata ad $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.
Se M ha per colonne i vettori di $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ allora

$$D = M^{-1} A M$$

Lezione del 25.11.2021

Sia $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ e $A' = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$AA' = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$$

quindi A è invertibile $\Leftrightarrow ad-bc \neq 0$. Infatti

A invertibile. Se $ad-bc=0$ A è divisore di 0, ma una matrice invertibile non può essere divisore di 0

$$\left(AB=0 \quad A^{-1}AB = A^{-1}0 = 0 \Rightarrow B=0 \right)$$

quindi $ad-bc \neq 0$.
Se $ad-bc \neq 0$, A ha come inversa $\frac{1}{ad-bc} A'$

Per $n=2$ abbiamo trovato $d: M(2,2) \to \mathbb{R}$ tale che $d(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ è invertibile
Inoltre:
1. Se A ha 2 righe uguali $d(A)=0$
2. d è lineare sulle ogni righe (verificare!)

3) $d(I_2) = 1$.

Cerchiamo $d: M(n,n) \to \mathbb{R}$ che verifichi 1, 2, 3 lineare nelle righe di A significa

• se $A_i = A_i' + A_i''$ $\quad d\begin{pmatrix}A_1\\ A_i\\ A_n\end{pmatrix} = d\begin{pmatrix}A_1\\ A_i'\\ A_n\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}A_1\\ A_i''\\ A_n\end{pmatrix}$

• se $A_i = \lambda A_i'$ $\quad d\begin{pmatrix}A_1\\ A_i\\ A_n\end{pmatrix} = \lambda d\begin{pmatrix}A_1\\ A_i'\\ A_n\end{pmatrix}$

Queste 3 proprietà danno alcune conseguenze

1) Se A ha una riga nulla $d(A) = 0$
infatti se $A_i = (0 - 0) = 0\,(1, -, 1)$ e quindi

$$d\begin{pmatrix}A_1\\ A_i\\ A_n\end{pmatrix} = 0 \cdot d\begin{pmatrix}A_1\\ 1-1\\ A_n\end{pmatrix} = 0$$

2) Se sostituisco A_i con $A_i + kA_j$ d non cambia. Infatti

$$d\begin{pmatrix}A_1\\ A_i + kA_j\\ A_j\\ A_n\end{pmatrix} = d\begin{pmatrix}A_1\\ A_i\\ A_j\\ A_n\end{pmatrix} + k\,\cancel{d\begin{pmatrix}A_1\\ A_j\\ A_j\\ A_n\end{pmatrix}} = d\begin{pmatrix}A_1\\ \\ A_n\end{pmatrix}$$

2 righe uguali

3 se si scambiano 2 righe d cambia segno

$$0 = d\begin{pmatrix}A_1\\ A_i+A_j\\ A_i+A_j\\ A_n\end{pmatrix} = \cancel{d\begin{pmatrix}A_1\\ A_i\\ A_i\\ A_n\end{pmatrix}} + d\begin{pmatrix}A_1\\ A_i\\ A_j\\ A_n\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}A_1\\ A_j\\ A_i\\ A_n\end{pmatrix} + \cancel{d\begin{pmatrix}A_1\\ A_j\\ A_j\\ A_n\end{pmatrix}}$$

cancello quelli con 2 righe uguali e ho la tesi

4) se S è una scala di A $d(A) = (-1)^{\sigma} d(S)$
dove σ è il numero di scambi di riga.
Infatti 2 e 3 sono le mosse di Gauss

5) se le righe di A sono dipendenti $d(A)=0$
Infatti ogni scala di A ha almeno una riga nulla.

Vediamo che se d verifica tutte queste proprietà sappiamo calcolare d sulle matrici diagonali e su quelle triangolari superiori

Sia A diagonale $A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_n \end{pmatrix}$

Per omogeneità su ogni riga $d(A) = a_1 \cdots a_n \, d\, I =$

$= a_1 \cdot \ldots \cdot a_n.$

Se A è triangolare superiore

$A_1 = a_{11} - a_{1n} = a_1(1, - , 0) + (0, a_{12} \; a_{1n})$

$A_i = (0 - 0 \; a_{ii} \; a_{ii+1} - a_{in}) = a_{ii}(0 - 0 \overset{\text{diposto } i}{1} 0 - 0) +$

$+ (0 — 0 \; a_{ii+1} \; a_{in})$

Sostituiamo A_i e osserviamo che il secondo addendo ~~ha~~ è una matrice con una colonna nulla (la prima) $\Rightarrow$ le righe sono dipendenti.

Quindi $d(A) = d\begin{pmatrix} a_{11} & 0 — & 0 \\ & a_{22} & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$

~~Sostituisco A_2 il secondo~~

Sostituisco A_2, il 2° addendo ha la seconda colonna nulla. Quindi

$$d(A) = d\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \text{—} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \text{—} \; 0 \\ & \dots & & \end{pmatrix}$$

andando avanti a sostituire fino alla fine ottengo

$$d(A) = d\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \text{—} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \text{—} \; 0 \\ & & & \\ 0 & \text{—} & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdots a_{nn}$$

Quindi: se d esiste lo posso calcolare su una scala di A che è triangolare superiore.
Questo ci dà l'unicità ma non l'esistenza.

Esistenza (per ricorrenza, ce lo abbiamo per $n=1$)

Consideriamo

$$d_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, d_{n-1} A_{ij}$$

dove A_{ij} si ottiene da A togliendo A_i e A^j

Se dimostriamo che d_n verifica le proprietà 1, 2, 3 (e quindi anche le loro conseguenze) abbiamo finito. Nota che d_{n-1} verifica 1, 2, 3 per ipotesi induttiva)

Cominciamo dalla 3

Se $A = I$ $d_n(A) = 1$

$$d_n(I) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, d_{n-1} I_{ij}$$

se $i \neq j$ $a_{ij} = 0$ quindi $d_n I = (-1)^{j+j} 1 \, d_{n-1} I_{jj}$

Ma $I_{jj} = I \in M(n-1, n-1)$ quindi $d_{n-1}(I_{jj}) = 1$

per ipotesi induttiva e $d_n(I) = 1$

Se A ha 2 righe uguali $A_{i_0} = A_{j_0}$

Allora $d_n(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \, d_{n-1} A_{ij}$

se $i \neq i_0, j_0$ A_{ij} ha 2 righe uguali. Per ipotesi induttiva $d_{n-1}(A_{ij}) = 0$. Quindi

$$d_n(A) = (-1)^{i_0+j} a_{i_0 j} \, d_{n-1} A_{i_0,j} + (-1)^{j_0+j} a_{j_0 j} \, d_{n-1}(A_{j_0 j})$$

ora • $a_{i_0 j} = a_{j_0 j}$

• $A_{i_0 j}$ e $A_{j_0 j}$ hanno le stesse righe in ordine diverso. Supponiamo $i_0 < j_0$. Quanti scambi devo fare per portare la riga i_0 al posto j_0? Precisamente $\boxed{j_0 - i_0 - 1}$

e quando $(-1)^{i_0+j} = (-1)^{j_0+j}$?
Precisamente se $j_0 - i_0$ è pari

quindi

$j_0 - i_0$ pari $\Leftrightarrow$ $j_0 - i_0 - 1$ dispari

$j_0 - i_0$ dispari $\Leftrightarrow$ $j_0 - i_0 - 1$ pari

Questo vuol dire che in ogni caso

$$(-1)^{i_0+j} d_{n-1} A_{i_0 j} + (-1)^{j_0+j} d_{n-1} A_{j_0 j} = 0$$

qualunque siano $i_0 \neq j_0$ perché o $d_{n-1}(A_{j_0 j}) = -d_{n-1}(A_{i_0 j})$

e i segni $(-1)^{i_0+j}$ $(-1)^{j_0+j}$ sono uguali o viceversa

Quindi $d(A) = 0$.

Resta la linearità

$$A_{i_0} = A'_{i_0} + A''_{i_0}$$

Scriviamo $A' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A'_{i_0} \\ A_n \end{pmatrix}$ $\quad A'' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A''_{i_0} \\ A_n \end{pmatrix}$

$$d_n(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \left[d(A'_{ij}) + d(A''_{ij}) \right] +$$

$$+ (-1)^{i_0+j} \left(a'_{i_0 j} + a''_{i_0 j} \right) d_{n-1} A_{i_0 j}$$

perché se $i \neq i_0$ A_{ij} ha la riga i_0 che è somma di $A'_{i_0} + A''_{i_0}$

mentre per $i = i_0$ $A_{i_0 j}$ non ha la riga i_0, ma $a_{i_0 j} = a'_{i_0 j} + a''_{i_0 j}$

quindi $d(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{n} (-1)^{i+j} a'_{ij} d(A'_{ij}) + (-1)^{i_0+j} a'_{i_0 j} \cdot d(A_{i_0 j})$

$+ \sum_{i \neq i_0} (-1)^{i+j} a_{ij} d(A''_{ij}) + (-1)^{i_0+j} a''_{i_0 j} d(A_{i_0 j}) =$

$= d(A') + d(A'')$

In modo analogo ma più semplice si ottiene l'omogeneità

Quindi d esiste e si chiama <u>determinante</u>

<u>Osservazione</u> Abbiamo usato la formula di Laplace "sviluppo per la colonna j"

E' chiaro che funziona allo stesso modo per tutte le colonne: $j=1, j=2, \ldots, j=n$

Esercizio Sia $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione lineare tale che $T^3 = T \circ T \circ T = 0$, ma $T^2 \neq 0$.

Dimostrare che $\ker T \subsetneq \ker T^2 \subsetneq \ker T^3 = \mathbb{R}^n$ e che T non è invertibile.

Soluzione. T non è invertibile. Se lo fosse anche T^2 e T^3 lo sarebbero, mentre $T^3 = 0$.
$\ker T^2 \subsetneq \ker T^3 = \mathbb{R}^3$ perché T^2 non è 0 e quindi $\ker T^2 \neq \mathbb{R}^3$.

Si ha sempre $\operatorname{Ker} T \subseteq \operatorname{Ker} T^2$. Dobbiamo provare che $\operatorname{Ker} T \neq \operatorname{Ker} T^2$

Se si avesse $\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker} T^2$, per il teorema della dimensione, poiché $\operatorname{Im} T \supseteq \operatorname{Im} T^2$, si avrebbe $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^2$. Quindi $T : \operatorname{Im} T \to \operatorname{Im} T^2$ sarebbe un isomorfismo e quindi anche

~~$T: \operatorname{Im}$~~ $\left(T|_{\operatorname{Im} T}\right)^2 : \operatorname{Im} T \to \operatorname{Im} T^3$ sarebbe un isomorfismo e questa è una contraddizione perché $\operatorname{Im} T^3 = \{0\}$ mentre $\operatorname{Im} T^2$ non è $\{0\}$ perché $T^2 \neq 0$.

<u>Osservazione</u> Questo vale in generale

se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ verifica $T^k = 0$, ma $T^{k-1} \neq 0$

tutte le inclusioni $\operatorname{Ker} T^i \subset \operatorname{Ker} T^{i+1}$ $i = 1, \dots, k-1$ sono inclusioni strette.

Se fosse $\operatorname{Ker} T^i = \operatorname{Ker} T^{i+1}$ si avrebbe che

$T|_{\operatorname{Im} T^i} : \operatorname{Im} T^i \to \operatorname{Im} T^{i+1}$ sarebbe un isomorfismo e le sue potenze darebbero isomorfismi con $\operatorname{Im} T^j$ per $j \geq i+1$

e questo non è possibile perché $\operatorname{Im} T^{k-1} \neq \{0\}$ mentre $\operatorname{Im} T^k = \{0\}$