Lezione 10.11.2021

Proprietà delle applicazioni lineari

$$T: V \longrightarrow W$$

$\mathrm{Ker}\,T = \{v \in V \mid T(v) = 0\}$ è un sottospazio di V

$\mathrm{Im}\,T = \{w \in W \mid \exists v \in V \mid T(v) = w\}$ è un sottospazio di W

T è surgettiva $\iff \mathrm{Im}\,T = W$ (chiaro)

T è iniettiva $\iff \mathrm{Ker}\,T = \{0\}$

infatti se T è iniettiva c'è un solo $v \in V$ tale che $T(v) = 0$, ma $T(0) = 0$ quindi $v = 0$

Se $\mathrm{Ker}\,T = \{0\}$ siano $v_1, v_2 \in V$ tali che, per assurdo, $T(v_1) = T(v_2)$. Allora $T(v_1) - T(v_2) = 0 =$
$= T(v_1 - v_2) \Rightarrow v_1 - v_2 \in \mathrm{Ker}\,T = \{0\} \Rightarrow v_1 - v_2 = 0$ e $v_1 = v_2$

Se $(v_1 - v_n)$ è una base di V, allora

$$\mathrm{Im}\,T = \mathrm{span}(T(v_1), -, T(v_n))$$

infatti ogni v è combinazione lineare di $v_1 - v_n$ quindi $T(v)$ è combinazione lineare di $T(v_1), -, T(v_n)$

Definizione: si chiama rango di T $\mathrm{rk}\,T$ la dimensione di $\mathrm{Im}\,T$.

Quindi: $\mathrm{rk}\,T = \dim W \iff T$ è surgettiva

$\mathrm{rk}\,T = \dim V \iff T$ è iniettiva

~~infatti $\mathrm{rk}\,T = \dim V$ vuol dire che una base di V ha~~

infatti in questo caso, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base di V, $T(v_1), \dots, T(v_n)$ sono indipendenti e quindi una base di $\mathrm{Im}\,T$.

Se $v \in V$ ~~non è il vettore~~ $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$

$T(v) = x_1 T(v_1) + \dots + x_n T(v_n)$.

Se $T(v) = 0$, essendo $T(v_1) \dots T(v_n)$ indipendenti si deve avere $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ e $v = 0$.

Esempio $A : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ se $\mathrm{rk}\,A = q$, le colonne di A sono indipendenti in $\mathbb{R}^p$, $\Rightarrow p \geq n$

Se $\dim V = \dim W$ allora T è iniettiva $\Leftrightarrow$ è surgettiva. E' iniettiva se $\mathrm{rk}\,T = \dim V = \dim W = \dim \mathrm{Im}\,T$, cioè è surgettiva.

Se $\mathrm{Im}\,T = W$ ~~dim~~ $\mathrm{rk}\,T = \dim W = \dim V$ e quindi è iniettiva.

Teorema della dimensione

$T : V \to W$ lineare. Allora

$$\dim \mathrm{Ker}\,T + \dim \mathrm{Im}\,T = \dim V.$$

<u>prova</u> Siano $(v_1, \dots, v_k)$ una base di $\mathrm{Ker}\,T$,

completiamo a base di $(V : v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$

Allora $\mathrm{Im}\,T = \mathrm{span}\,(T(v_1), \dots, T(v_k), T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)) =$
$= \mathrm{span}\,(T(v_{k+1}), \dots, T(v_n))$ perché
$T(v_1) = \dots = T(v_k) = 0$

Quindi basta provare che $T(v_{k+1}), \dots, T(v_n)$ sono indipendenti.

Scriviamo una combinazione lineare ③

$$a_{k+1}T(v_{k+1}) + \dots + a_n T(v_n) = 0$$
$$= T(a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_n v_n) \text{ perché } T \text{ è lineare}$$

quindi $a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_n v_n \in \ker T$, quindi

$$a_{k+1}v_{k+1} + \dots + a_n v_n = b_1 v_1 + \dots + b_k v_k$$

dunque $b_1 v_1 + \dots + b_k v_k - a_{k+1}v_{k+1} - \dots - a_n v_n = 0$

Ma $v_1, \dots, v_n$ sono indipendenti quindi

$$b_1 = b_2 = \dots = b_k = 0 = a_{k+1} = \dots = a_n$$

e dunque $(T(v_{k+1}) \dots T(v_n))$ è una base di $\operatorname{Im} T$

e pertanto $k + n - k = n$ e il teorema è provato.

Lezione 11.11.2021

Corollario 1 $AX = B$ è risolubile $\iff$ $rk A = rk AB$

Corollario 2 $rk A = \dim \operatorname{span}(A^1, \dots, A^q) = \dim \operatorname{Im} A$
$= \dim \operatorname{span}(A_1, \dots, A_p)$

prova $A : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ $\operatorname{span}(A^1, \dots, A^q) = \operatorname{Im} A$

$\dim \operatorname{span}(A_1 \dots A_p) = \#\text{ pivots} = s$

$\Rightarrow \dim \ker A = q - s$

$\dim \operatorname{Im} A = r$

Ma deve essere $q - s + r = q \Rightarrow s = r$

Def: si indica con $\mathcal{L}(V, W)$ l'insieme delle applicazioni lineari di V in W.

Proposizione $\mathcal{L}(V,W)$ è uno spazio vettoriale di dimensione $\dim V \times \dim W$

prima definiamo se $S,T : V \to W$ sono lineari

$$(S+T)(v) = S(v) + T(v)$$

$$(aS)(v) = a\,S(v)$$

dobbiamo provare che $S+T$ e aS sono lineari

- $(S+T)(v_1+v_2) \underset{\text{per definizione}}{=} S(v_1+v_2) + T(v_1+v_2) =$

$= S(v_1)+S(v_2)+T(v_1)+T(v_2) =$ (perché S e T sono lineari)

$= S(v_1)+T(v_1)+S(v_2)+T(v_2) =$

$= (S+T)(v_1) + (S+T)(v_2)$

$(S+T)(av) = S(av) + T(av) = a\,S(v) + a\,T(v)$

$= a\left[S(v)+T(v)\right] = a\,(S+T)(v)$ OK

$(aS)(v_1+v_2) \overset{\text{per def.}}{=} a\,S(v_1+v_2) = a\left[S(v_1)+S(v_2)\right]$

$= a\,S(v_1) + a\,S(v_2) = (aS)v_1 + (aS)v_2$

$aS(bv) = a\left(S(bv)\right) = a\left(b\,S(v)\right) =$

$= a\,b\,S(v) = b\,(aS)(v)$ □

Esempio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p) = M(p,q,\mathbb{R})$

infatti $M(p,q,\mathbb{R}) \subset \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$

viceversa sia $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^p)$ e sia $A = (T(e_1) \ldots T(e_q))$

$A \in M(p,q,\mathbb{R})$ e verifico $A(e_i) = T(e_i)$

Dunque $AX = T(X)\ \forall X \in \mathbb{R}^q$ e dunque $T = A$.

Osservazione: Non abbiamo calcolato $\dim \mathcal{L}(V, W)$

lo faremo presto, forse già la prossima settimana.

Sia ora data la situazione seguente

$$V \xrightarrow{T} W \xrightarrow{S} U$$

dove T e S sono lineari. Ci chiediamo se

$S \circ T : V \longrightarrow U$ sia lineare. Proviamolo

$(S \circ T)(v) = S(T(v))$. Quindi:

$$(S \circ T)(v_1 + v_2) = S(T(v_1 + v_2)) = S(T(v_1) + T(v_2)) =$$

$$= S(T(v_1)) + S(T(v_2)) = (S \circ T)(v_1) + (S \circ T)(v_2)$$

$$S \circ T(a v) = S(T(a v)) = S(a T(v)) = a S(T(v)) =$$

$$= a (S \circ T)(v)$$

Quindi $S \circ T$ è lineare

Esercizio $rk(S \circ T) \leq rk S, rk T$

1) $\operatorname{Im} S \circ T \subset \operatorname{Im} S \Rightarrow rk(S \circ T) \leq rk S$

2) In generale se $T : V \to W$ $rk T \leq rk V$ visto che data $\mathcal{B} = \{v_1 - v_n\}$ base di V $\operatorname{Im} T = \operatorname{span}(T(v_1) \ldots T(v_n))$.

Ora $\operatorname{Im} S\circ T = S(T(V)) = \operatorname{Im}(S|_{\operatorname{Im}T} : \operatorname{Im}T \to U)$

quindi $\operatorname{rk} S\circ T = \dim\left(\operatorname{Im} S|_{\operatorname{Im}T}\right) \leq \dim \operatorname{Im}T = \operatorname{rk}T$

e quindi $\operatorname{rk}(S\circ T) \leq \operatorname{rk} T$.

Nel caso particolare

$$\mathbb{R}^q \xrightarrow{A} \mathbb{R}^p \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n$$

l'applicazione $B\circ A$ deve essere una matrice $C \in M(n,q)$

Osserviamo che le righe di B sono lunghe p cioè $B_i \in \mathbb{R}^p$ e che le colonne di A, anche loro stanno in $\mathbb{R}^p$, quindi noi possiamo costruire la matrice $D \in M(n,q)$ fatta così:

$$D = (d_{hk}) = (\langle B_h, A^k \rangle) \quad \text{dove } h = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, q$$

Ora calcoliamo C. Le colonne di C sono le immagini di $e_1, \dots, e_q$ sotto l'appl. lineare $B\circ A$

$$B(A(e_j)) = BA^j = a_{1j}B^1 + \dots + a_{qj}B^p$$

$$= \begin{pmatrix} \langle B_1, A^j \rangle \\ \langle B_2, A^j \rangle \\ \vdots \\ \langle B_n, A^j \rangle \end{pmatrix}$$

Quindi $C = D =$ prodotto righe per colonne $B\cdot A$

Proprietà del prodotto righe x colonne

- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $(\lambda A)B = A \cdot \lambda B = \lambda (A \cdot B)$
- $(AB)C = A(BC)$
- $AI = A$, $IA = A$, $AO = O$ $OA = O$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Sono tutte chiare, tranne la propr. associativa e l'ultima

$$(AB)C = (A \circ B) \circ C = A \circ B \circ C$$
$$A(BC) = A \circ (B \circ C) = A \circ B \circ C$$

Per la trasposta:

$$(AB)^T = C^T \text{ dove } C = (c_{ij}) \text{ e } c_{ij} = \langle A_i, B^j \rangle$$

Quindi se $C^T = (c'_{ij})$ si ha $c'_{ij} = c_{ji} = \langle A_j, B^i \rangle =$

$= \langle B^i, A_j \rangle$

Ma B^i è una riga di B^T e A_j è una colonna di A^T

Quindi $C^T = (AB)^T = B^T \cdot A^T$

In particolare in $M(n,n)$ oltre alla struttura di spazio vettoriale c'è il prodotto righe x colonne con le sue proprietà.

C'è anche un elemento neutro per il prodotto. $I = I_n$. Però attenzione il prodotto non è commutativo

Def $A \in M(n,n)$ è invertibile se $\exists B \in M(n,n)$ tale che $AB = I_n$ $BA = I_n$

B è unico, se ci fosse un altro inverso B' si avrebbe

$$B' = B' I_n = B'(AB) = (B'A)B = I_n B = B$$

Poniamo $B = A^{-1}$

Osservazione se A è invertibile si ha

$$\mathbb{R}^n \underset{A^{-1}}{\overset{A}{\rightleftarrows}} \mathbb{R}^n$$

poiché A^{-1} è l'applicazione inversa A è iniettiva e quindi surgettiva. In particolare le righe di A sono indipendenti e così le colonne

Calcolo di A^{-1} Con Gauss! Sia $X = A^{-1}$

$$AX = I \quad \text{cioè} \quad AX^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; AX^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \dots AX^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vuol dire n sistemi lineari con la stessa matrice A che si possono risolvere simultaneamente con Gauss applicato ad $A|I$ alla fine otteniamo la scala

$S|C$ S è triang. sup con i pivots sulla diagonale

Facciamo Gauss all'incontrario.

Cioè modifichiamo la penultima riga di S con l'ultima, in modo da ottenere

$$\begin{matrix} a_{n-1\,n-1} & 0 \\ & a_{nn} \end{matrix}$$

e così via su tutte le righe. Otteniamo

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n} \end{pmatrix} = \quad D | C'$$

dove D è diagonale

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Non resta che dividere la riga i di $D|C'$ per a_{ii}, $i = 1, \dots, n$

e otteniamo la soluzione

$$I | A^{-1}$$

provare per credere

Osservazione: questo procedimento applicato a una matrice qualunque E ci dice se E è invertibile. Se E è invertibile ho n pivots e il procedimento ci da E^{-1}. Se E non è invertibile la scala S ha alcune righe nulle e il procedimento si stoppa