Lezione del 4. Novembre 2021

Conseguenze del teorema del completamento

1) due basi $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi

infatti se $\mathcal{B}_1 = (v_1, -, v_n)$ e $\mathcal{B}_2 = (w_1, -, w_k)$, se supponiamo $k < n$

Per il teorema del completamento ci sono $n-k$ vettori in $\mathcal{B}_1$ che aggiunti a $\mathcal{B}_2$ danno una base di V. Ma questo contraddice che $w_1 - w_k$ sia un insieme massimale di vettori indipendenti. Quindi non è vero che $k < n$, lo stesso argomento mostra che non può essere $n < k$. Dunque $n = k$

2. Quindi possiamo definire
$\dim V$ = numero di elementi di una base

per esempio: $\dim \mathbb{R}^n = n$, $\dim M(p,q,\mathbb{R}) = p \cdot q$

$M(p,q,\mathbb{R})$ = {matrici a p righe e q colonne}

$\dim \mathbb{R}[t] = \infty$

$\dim \{X \in \mathbb{R}^q : AX = 0 \in \mathbb{R}^p\} = q -$ numero di righe indipendenti di $A = q -$ numero pivots

3. Se $\dim V = n$,
n vettori indipendenti di V sono una base di V

Infatti:

Quando facciamo le mosse di Gauss, lo span delle righe di A rimane invariato.
Alla fine le righe rimaste sono quelle che portano i pivots, le altre sono nulle.
Quindi $\dim \operatorname{span}(A_1, -, A_p) =$ numero dei pivots $= s$

Quindi le soluzioni di $AX = 0$ dipendono dalle $q-s$ variabili che non corrispondono ai pivots che possono assumere qualunque valore.
Quindi lo spazio delle soluzioni è intersezione di s iperpiani indipendenti e ha dimensione $q-s$.

Se $\dim V = n$ e prendo n vettori indipendenti $w_1, -, w_n$, per il completamento $(w_1, -, w_{n-1}, v_n)$ sono una base di V con $v_n \in \mathcal{B} =$ base di V

Ora $w_n = a_1 w_1 + - + a_{n-1} w_{n-1} + a_n v_n$
e $a_n \neq 0$ perché w_n è indipendente da $w_1, \dots w_{n-1}$
per cui $v_n = -a_1 w_1 \quad - a_{n-1} w_{n-1} + a_n^{-1} w_n$
e questo prova che $(w_1, -, w_n)$ è base di V.

Allo stesso tempo $n+1$ vettori in V sono dipendenti. Il massimo numero di vettori indipendenti è n.

4. Se $W \subset V$ è un sottospazio, $\dim W \leq \dim V$ e se le dimensioni sono uguali $W = V$

infatti se $(w_1, \dots, w_k)$ è una base di W e $W \subsetneq V$

allora c'è un vettore di V che non appartiene a W, quindi i vettori indipendenti $w_1, \dots, w_k$ non sono una base di V. Quindi

$k < n = \dim V$.

Se $k = n$ allora $w_1, \dots, w_n$ è un insieme di vettori indipendenti massimale, quindi è una base di V e $W = V$

<u>Osservazione</u>. Se U e W sono sottospazi di V

$U \cap W$ è anche lui un sottospazio.

Invece $U \cup W$ in generale NON è un sottospazio. $\mathrm{Span}(U \cup W)$ è un sottospazio

$\mathrm{Span}(U \cup W) = \{$comb. lineari di vettori in $U \cup W\}$

sia $v \in \mathrm{Span}(U \cup W)$. Allora $v = a_1 u_1 + \dots + a_j u_j +$

$+ b_1 w_1 + \dots + b_e w_e = u + w$ dove $u = \sum_{i=1} a_i u_i$ e

$w = \sum_{j=1}^{e} b_j w_j$. Per questo $\mathrm{span}(U \cup W) = U + W$

Definizione: Se $W \subset V$ è un sottospazio, un SUPPLEMENTARE di W è un sottospazio U che verifica $U \cap W = \{0\}$ $U + W = V$.

5. Se $W \subset V$ e $W \neq V$, allora W ha un supplementare.

Infatti sia $\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_k\}$ una base di W completiamo a base di V $\mathcal{B}_1 = (w_1 \dots w_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$ e sia

$$U = \text{span}(v_{k+1}, \dots, v_n)$$

Allora $U \cap W = \{0\}$ e $U + W = V$. Provate a dimostrarlo prima di leggere la prova

prova Sia $v \in U \cap W$ allora $v = a_1 w_1 + \dots + a_k w_k =$

$= b_{k+1} v_{k+1} + \dots + b_n v_n$ perché $v \in W$ e $v \in W$

Quindi $0 = v - v = a_1 w_1 + \dots + a_k w_k - \cancel{(b_{k+1} v_{k+1} + \dots + b_n)}$
$- (b_{k+1} v_{k+1} + \dots + b_n v_n)$

Questa è una combinaz. lineare degli elementi di $\mathcal{B}_1$ = base di V che dà il vettore nullo. quindi $a_1 = \dots = a_k = 0$ e $b_{k+1} = \dots = b_n = 0$

Ma allora $v = 0$, cioè $W \cap U = \{0\}$
L'unione di una base di W e di una base di U dà una base di V. Quindi $U + W = V$.

Il Teorema di Grassmann lega $\dim U$, $\dim W$, $\dim U \cap W$ e $\dim (U + W)$ quando U e W sono sottospazi di V.

Teorema (Grassmann) U, W sottospazi di V allora

$$\dim U + \dim W = \dim U \cap W + \dim (U+W)$$

prova. Sia $\mathcal{B}$ = base di $U \cap W = (v_1, \dots, v_l)$. Completiamo $\mathcal{B}$ a base $\mathcal{B}_1$ di U e $\mathcal{B}_2$ di W

$$\mathcal{B}_1 = (v_1, \dots, v_l, u_{l+1}, \dots, u_k)$$

$$\mathcal{B}_2 = (v_1, \dots, v_l\ w_{l+1}, \dots, w_s)$$

1. $v_1 \dots v_l, u_{l+1} \dots u_k; w_{l+1}, \dots w_s$ generano $U+W$ perché contengono una base di U e una base di W

2. Basta allora provare che sono indipendenti, perché in questo caso

$$\dim (U+W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W).$$

e il teorema è provato.

Prendiamo una comb. lineare e poniamola $=0$

$$0 = a_1 v_1 + \cdot + a_l v_l + b_{l+1} u_{l+1} + \dots + b_k u_k + c_{l+1} w_{l+1} + \dots + c_s w_s$$

Quindi

$$a_1 v_1 + \quad + a_l v_l + b_{l+1} u_{l+1} + \dots + b_k u_k =$$
$$= -(c_{l+1} w_{l+1} + \cdot + c_s w_s) \in U \cap W$$

Dunque questo vettore $-(c_{l+1} w_{l+1} + \quad + c_j w_1)$ è combinazione lineare dei vettori della base di $U \cap W$

$$-(c_{l+1} w_{l+1} + \cdots + c_j w_1) = d_1 v_1 + \cdot + d_l v_l$$

Pertanto $d_1 v_1 + \cdots + d_l v_l + c_{l+1} w_{l+1} + \cdots + c_j w_j = 0$

Ma questa è una combinazione lineare degli elementi di una base di W che sono indipendenti

Dunque $c_{l+1} = \cdots = c_j = 0$, $d_1 = \cdots = d_l = 0$

Quindi la combinazione originaria diventa

$$0 = c_1 v_1 + \cdot + c_l v_l + b_{l+1} u_{l+1} + \cdots + b_k u_k$$

che è una comb. lineare degli elementi di una base di U. Quindi tutti i coefficienti sono 0 e il teorema è dimostrato.

$\dashv$

Applicazioni lineari.

<u>Definizione</u> V, W spazi vettoriali

$T: V \to W$ è LINEARE se

1) $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$
2) $T(a v) = a T(v) \quad \forall a \in \mathbb{R}, v \in V$

Esempi:

1. $A \in M(p,q,\mathbb{R})$ $\quad A : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ è lineare

2. $v_0 \in \mathbb{R}^n$ $\quad x \to \langle x, v_0 \rangle$ è lineare

3. $M(p,q,\mathbb{R}) \longrightarrow M(q,p,\mathbb{R})$
   $A \longrightarrow A^T$ è lineare

Se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,p \\ j=1,\dots,q}}$ $\quad A^T = (b_{hk})_{\substack{h=1,\dots,q \\ k=1,\dots,p}}$

dove $b_{hk} = a_{kh}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Sia V l'insieme delle funzioni $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente derivabili

$D : V \to V \quad D(f) = f'$ è lineare

Se $T : V \to W$ è lineare $\quad \ker T = \{ v \in V : T(v) = 0 \}$ è un sottospazio di V

$\operatorname{Im} T = \{ w \in W \mid \exists v \in V : T(v) = w \}$ è un sottospazio di W.

prova: $\ker T$ è chiaramente un sottospazio. Per $\operatorname{Im} T$ si può ragionare così.

Sia $\mathcal{B} = \{ v_1, \dots, v_n \}$ una base di V. Se $v \in V$ $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ quindi

$$T(v) = a_1 T(v_1) + \dots + a_n T(v_n)$$

Questo prova che $\mathrm{Im}\,T = \mathrm{span}(T(v_1), \dots, T(v_n))$ e quindi è un sottospazio di W.

Esempio : $T: M(n,n,\mathbb{R}) \to M(n,n,\mathbb{R})$

$$T(A) = A + A^T$$

$\ker T = \{A \mid T(A) = 0\}$

quindi se $A = (a_{ij})_{i,j=1 \dots n}$ si deve avere

- $2a_{ii} = 0 \Rightarrow$ la diagonale di A è fatta di zeri

- $a_{ij} + a_{ji} = 0$ per $j \neq i$

quindi A è antisimmetrica $A^T = -A$

$\mathrm{Im}\,T = \{$matrici simmetriche$\}$

A simmetrica se $A = A^T$ cioè $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i \neq j$

Ma $(A + A^T)^T = A^T + A = A + A^T$

Quindi l'immagine di T è fatta di matrici simmetriche

$\{A \mid A = A^T\}$ è un sottospazio di $M(n,n)$
$\{A \mid A = -A^T\}$ è un sottospazio di $M(n,n)$

Esercizio: dimostrare che sono supplementari.

<u>Definizione</u> diremo che $U + W$ è una <u>somma diretta</u> se $U \cap W = \{0\}$ e scriviamo

$$U \oplus W$$

Allora l'esercizio chiede di provare che

$$M(n, n) = \{\text{matrici simmetriche}\} \oplus \{\text{matrici antisimmetriche}\}$$