ALGEBRA LINEARE

Quinto appello 13/06/2017

Esercizio 1
Sia A una matrice a n righe e a n colonne a coefficienti reali. Supponiamo che valga la seguente formula.

$$A^2 - A - 2I = 0$$

dove I è la matrice identrica.

1. Calcolare gli autovalori (reali e complessi) di A.
2. Dimostrare che A è diagonalizzabile.

Esercizio 2.
Sia $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ una applicazione lineare con 5 autovalori reali e distinti e sia W un sottospazio di $\mathbb{R}^5$ di dimensione 2 invariante per f (ossia $f(W) \subset W$). Dimostrare che la restrizione di f a W, come applicazione lineare di W in W, è diagonalizzabile.

Suggerimento: considerare una base di autovettori di f, $v_1, \ldots, v_5$ e usare il teorema del completamento per completare una base di W a base di $\mathbb{R}^5$. Poi scrivere la matrice associata a f in questa base $\{w_1, w_2, v_i, v_j, v_k\}$ dove v_i, v_j, v_k sono i tre autovettori che completano a base la base di W.

Esercizio 3.

1. Costruire, se possibile, una applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ con queste proprietà:
   - $f(e_1) \neq 0$.
   - $< f(e_1), e_1 >= 0$.
   - $f(span\{e_2, e_3, e_4\})$ è lo spazio dei vettori ortogonali a $f(e_1)$.
2. Dimostrare che l'applicazione f costruita è invertibile.