

Nome

Matricola

ALGEBRA LINEARE

Primo appello 12/1/2023

Esercizio 1.

Nello spazio V dei polinomi di grado minore o uguale a 4 si considerino il sottospazio U generato dai 3 monomi di grado pari $\{1, x^2, x^4\}$ e il sottospazio $W = \text{span}(1 + x + x^2 + x^3 + x^4, 1 + x, x^3 - x^2)$.

Calcolare le dimensioni di $U + W$ e di $U \cap W$ e trovare una base di $U \cap W$.

Esercizio 2. Sia U un sottospazio di \mathbb{R}^5 di dimensione 3 e sia $V = U^\perp$.

Costruire, se possibile, un endomorfismo ortogonale $T : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ con le seguenti proprietà:

1. U e V sono invarianti per T .
2. $T|_U$ è diagonalizzabile, ma non è l'identità di U .
3. $T|_V$ non è diagonalizzabile.

Esercizio 3.

Sia $T : \mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}[x]$ l'applicazione lineare definita da

$$T(p(x)) = p(x) + p(-x).$$

- Dimostrare che $\mathbb{R}[x]$ è somma diretta del nucleo di T e dell'immagine di T .
- Dimostrare che $T^2 \neq T$.
- Determinare autovettori ed autovalori di T .