Nome **Matricola**

ALGEBRA LINEARE

Primo appello 12/1/2022

Esercizio 1.

Sia $T : V \to V$ un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ i suoi autovalori reali. Dimostrare che se la somma delle molteplicità algebriche di tali autovalori è pari allora n è pari mentre se è dispari allora n è dispari. In particolare se T non ha nessun autovalore reale allora n è pari.

Esercizio 2.

Costruire, se possibile un endomorfismo $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ con le seguenti proprietà:

1. $T(1,1,1,1,1) = (1,-1,1,-1,0)$
2. Se W è il sottospazio ortogonale a $(1,1,1,1,1)$, W è invariante per T e $T : W \to W$ è un isomorfismo.

Dimostrare che $KerT$ ha dimensione 1 e determinare la matrice associata a T rispetto ad una opportuna base di $\mathbb{R}^5$.

Esercizio 3. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali, tale che è diagonalizzabile tramite un cambiamento di base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Dimostrare che A è simmetrica.