Lezione 15.12.2021

Riprendiamo il discorso del polinomio minimo

<u>Teorema</u> $T: V \longrightarrow V$ endomorfismo e sia m_T il polinomio minimo di T (e di tutte le matrici associate a T nelle varie basi di V).

Allora T è diagonalizzabile $\Longleftrightarrow$ m_T ha solo radici reali e di molteplicità 1

<u>prova</u> $\Longrightarrow$ Se T è diagonalizzabile gli autovalori $\lambda_1 - \lambda_k$ di T sono tutti reali e $V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \cdots V_{\lambda_k}$ quindi V ha una base di autovettori di T

Consideriamo il polinomio

$$m(x) = (x-\lambda_1) \cdots (x-\lambda_k)$$

Vogliamo provare che $m(x)$ è il pol. minimo di T, con il che $\Rightarrow$ sarà provato.

1. $m(T) = (T-\lambda_1 id) \circ (T - \lambda_2 id) \cdots \circ (T-\lambda_k id)$ si annulla sulla base di autovettori di V e quindi è l'applicazione nulla.

Infatti sia $(v_1, \ldots, v_n)$ la base di autovettori.

Prendiamo v_i e supponiamo $T(v_i) = \lambda_j v_i$

Allora $(T - \lambda_k id) v_i = (\lambda_j - \lambda_k) v_i$

$$(T - \lambda_{k-1} id)(\lambda_j - \lambda_k) v_i = (\lambda_j - \lambda_{k-1})(\lambda_j - \lambda_k) v_i$$

e così via fino a j:

$$(T - \lambda_j id) \left[(\lambda_j - \lambda_{j+1})(\lambda_j - \lambda_{j+2}) \cdots (\lambda_j - \lambda_k) v_i \right] =$$

$$= (\lambda_j - \lambda_j)(\lambda_j - \lambda_{j+1}) \cdots (\lambda_j - \lambda_k) v_i = 0$$

Questo è vero per ogni $v_i \in \{v_1 - v_n\}$ quindi $m(T) = 0$. Ma ogni autovalore di T è radice del pol. minimo, cioè m è proprio quello minimo

$\Leftarrow$ Supponiamo tutti gli autovalori reali e che

$$m_T(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k)$$

Proviamo per induzione su k che:

$*$ Se $W \subset V$ è un sottospazio di V invariante per T e $m_{T|_W}$ ha solo radici reali e di molteplicità 1 allora $T|_W$ è diagonalizzabile.

<u>prova</u> se $k = 1$ $\quad m_{T|_W} = (x - \lambda_1) \Rightarrow T - \lambda_1 id = 0$

cioè $T = \lambda_1 id$ e T è diagonale.

supponiamo vero $*$ per $k-1$ e lo proviamo per k.

$$m_T(x) = (x - \lambda_1) \cdots (x - \lambda_k)$$

$$m_T(T) = 0 = (T - \lambda_1 id) \circ (T - \lambda_2 id) \cdots (T - \lambda_k id) = 0$$

Quindi $Im(T - \lambda_k id) \subset W = \ker[(T - \lambda_1 id) \cdots (T - \lambda_{k-1} id)]$

ed ha dimensione minore $\dim Im(T - \lambda_k id) < \dim W$

Sommiamo ad ambo i membri $\dim \ker(T-\lambda_k id)$ ③
$= \dim V_{\lambda_k}$. Otteniamo

$$n = \dim V_k + \dim Im(T-\lambda_k id) \leq$$
$$\leq \dim V_k + \dim W.$$

Ora $V_k \cap W = \{0\}$. Infatti se ci fosse $v \neq 0$

$T(v) = \lambda_k v$ perché $v \in V_k$ e

$$(T-\lambda_1 id)(\quad) - - (T-\lambda_{k-1} id) v =$$
$$= (\lambda_k - \lambda_1)(\lambda_k - \lambda_2) \cdots (\lambda_k - \lambda_{k-1}) v \neq 0$$ quindi $v = 0$

dunque $\dim V_k + \dim W = \dim (V_k \oplus W) \leq n$

$n \leq \dim(V_k \oplus W) \leq n$ ci dice che

$$V = V_k \oplus W.$$

- Ora W è invariante per T

infatti $w \in W \Rightarrow (T-\lambda_1 id) — (T-\lambda_{k-1} id)(w) = 0$

quindi $T(w)$ verifica

$$(T-\lambda_1 id) \quad (T-\lambda_{k-1} id) T(w) =$$

$$= T(T-\lambda_1 id) \cdots (T-\lambda_{k-1} id)(w) = T(0) = 0$$

perché T commuta con i fattori $T-\lambda_j id$.

- Gli autovalori di $T|_W : W \to W$ sono solo $k-1$

perché λ_k non è autovalore di $T|_W$.
Per ipotesi induttiva $W = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_{k-1}}$ e

quindi $V = W \oplus V_{\lambda_k} = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ e T è diagonalizzabile. $\square$

Criterio di Triangolabilità

Teorema Sia $T : V \to V$ un endomorfismo che ha solo autovalori reali. Allora T è triangolabile

Dim: Sia v_1 un autovettore di V di autovalore λ_1. Completiamo (v_1) a base di V $(v_1 - v_n)$
La matrice associata a T in questa base è

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

e $P_T(x) = \det(A - xI_n) = (\lambda_1 - x)\det(B - xI_{n-1})$
Quindi anche B ha solo autovalori reali.
B è la matrice associata all'endomorfismo di $\mathrm{span}(v_2, \dots, v_n)$ data da

$p_2 \circ T|_{\mathrm{span}(v_2 - v_n)}$ dove p_2 è la proiezione

$$p_2 : V = \mathrm{span}\, v_1 \oplus \mathrm{span}(v_2 - v_n) \to \mathrm{span}(v_2 \cdots v_n)$$

Poiché dim span$(v_2, \dots, v_n) < n$ e
B ha tutti gli autovalori reali $\exists N$ invertibile
$(n-1)\times(n-1)$ tale che $N^{-1}BN$ è triangolare superiore

Allora $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & N \\ 0 & \end{pmatrix}$ verifica

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & N^{-1} \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ e } M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & N^{-1}BN \\ 0 & \end{pmatrix} \text{ è}$$

triangolare superiore. $\square$

Matrici ortogonali

Definizione $P \in M(n,n,\mathbb{R})$ è ORTOGONALE se $\forall v, w \in \mathbb{R}^n$ $\langle Pv, Pw\rangle = \langle v, w\rangle$

Ora troviamo alcuni fatti

1) Le colonne di P sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, infatti $\langle Pe_i, Pe_i\rangle = 1$ e se $j \neq i$ $\langle Pe_i, Pe_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = 0$.

2) Quindi P^T, che ha come righe le colonne di P, verifica $P^TP = I$ e quindi $PP^T = I$ perché P^T è l'inversa di P.

3) anche P^T è ortogonale. Infatti

$\langle P^Tv, P^Tw\rangle = \langle PP^Tv, PP^Tw\rangle$ perché P è ortogonale, quindi $\langle P^Tv, P^Tw\rangle = \langle v, w\rangle$

4) Quindi sia le righe che le colonne di P sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

5) Troviamo in $\mathbb{C}^n$ una specie di prodotto scalare che rispetti Pitagora cioè la lunghezza dei vettori. Ora

$$z \in \mathbb{C} \quad |z|^2 = x^2+y^2 = (x+iy)(x-iy) = z \cdot \bar{z}$$

Analogamente $\|(z_1 - z_n)\| = z_1\bar{z}_1 + \quad + z_n\bar{z}_n$

Definiamo allora per $z, w \in \mathbb{C}^n$

$$\langle z, w \rangle = z^T \bar{w} = z_1 \bar{w}_1 + \cdot + z_n \bar{w}_n$$

in modo che $\langle z, z \rangle = \|z\|^2 = z_1\bar{z}_1 + - + z_n\bar{z}_n$

6) Anche in $\mathbb{C}^n$ si ha $\langle Pz, Pw \rangle = \langle z, w \rangle$

Basta calcolare $(Pz)^T \bar{P}\bar{w} = z^T \underbrace{P^T P}_{= I} \bar{w} =$

$= z^T \bar{w} = \langle z, w \rangle$

7) Gli autovalori di P (reali o complessi) hanno tutti modulo 1.

- reali v autovettore di P

$$\langle v, v \rangle = \langle Pv, Pv \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle$$

$$\Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

- complessi $z \in \mathbb{C}^n$ autovettore di P

$$\langle z, z \rangle = \langle Pz, Pz \rangle = \langle \lambda z, \lambda z \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle z, z \rangle$$

Quindi $|\lambda|^2 = \lambda\bar{\lambda} = 1$.

<u>Corollario</u> $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con solo autovalori reali. Allora $\exists$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ rispetto a cui la matrice è triangolare superiore, cioè $P^T A P$ è triangolare superiore

<u>prova</u> sia v_1 un autovettore di A con $\langle v_1, v_1 \rangle = 1$
Completiamo v_1 a una base ortonormale $(v_1, v_2 - v_n)$. Quindi

$$P'^T A P' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_2 - a_n \\ 0 & \\ | & B \\ 0 & \end{pmatrix}$$

anche B ha solo autovalori reali e

$$B = pr \circ A|_{span(v_2 - v_n)} : v_1^\perp \to v_1^\perp$$
$$\shortparallel$$
$$v_1^\perp$$

per ipotesi induttiva (il passo base $n = 1$ è banale) B è triangolabile tramite una base ortonormale cioè

$$Q^T B Q = T \text{ triang sup.}$$

Allora $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 - 0 \\ 0 & \\ | & Q \\ 0 & \end{pmatrix}$ è ortogonale e

$$P^T = \begin{matrix} 1 & 0 - 0 \\ 0 & \\ | & Q^T \\ 0 & \end{matrix}$$

quindi

$$P^T P'^T A P' P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ 0 & & & \\ \vdots & & T & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \text{ è triangolare sup.}$$

□

Matrici simmetriche

Sia $A = A^T$ e $v_1, v_2 \in \mathbb{C}^n$

allora $\langle Av_1, v_2 \rangle = \langle v_1, Av_2 \rangle$ infatti

$$v_1^T A^T v_2 = v_1^T A v_2 = \langle v_1, Av_2 \rangle$$

Inoltre se $z, w \in \mathbb{C}^n$

$$\langle Az, w \rangle = z^T A^T w = z^T A w = z^T \bar{A} \bar{w} =$$

$$= \langle z, Aw \rangle.$$

Per le matrici simmetriche vale

Teorema spettrale

A è simmetrica $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n$ ha una base ortonormale di autovettori di A

prova $\Leftarrow$ Se $\mathbb{R}^n$ ha una base ortonormale di autovettori di A $\Rightarrow$

$P^T A P = D$ matrice diagonale

quindi $A = PDP^T$ e $A^T = PD^TP^T$

ma $D^T = D$ e $A = A^T$

$\Rightarrow$ Dimostriamo che gli autovalori di A sono reali. Sia λ autovalore e $z \in \mathbb{C}^n$ autovettore

$$\langle Az, z\rangle = \langle \lambda z, z\rangle = \lambda \langle z, z\rangle = \langle z, Az\rangle =$$
$$= \langle z, \lambda z\rangle = \bar{\lambda}\langle z, z\rangle, \quad \langle z, z\rangle \neq 0 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

e λ è reale.

Avendo solo autovettori reali, A è triangolabile con una matrice ortogonale, cioè

$P^TAP = T$ è triangolare superiore

Ma $T^T = P^TA^TP = P^TAP = T$. Dunque T è simmetrica e quindi T è diagonale. Il teorema spettrale è provato.

<u>Corollario</u> $A = A^T \Rightarrow \mathbb{R}^n = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ e la somma è ortogonale, cioè $V_{\lambda_1} = (V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k})^\perp$

e questo ~~vale~~ per tutti i V_{λ_j}. In altri termini autovettori di A con autovalori diversi sono ortogonali.

Osservazione

Se $A = \begin{pmatrix} a & b & \alpha & \beta \\ c & d & \gamma & \delta \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$

allora $\det A = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$

prova per la prima colonna

$$\det A = a \det\begin{pmatrix} d & \gamma & \delta \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{pmatrix} - c\det\begin{pmatrix} b & \alpha & \beta \\ 0 & e & f \\ 0 & g & h \end{pmatrix}$$

$$= ad \det\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} - cb \det\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} =$$

$$= (ad - bc) \det\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \cancel{\det} \quad \square$$

Esercizio Si consideri la matrice

$$B_t = \begin{pmatrix} 1 & -t & t-1 & t^2 \\ -1 & t+1 & 2t-2 & -t \\ 0 & 0 & t+1 & 1-t \\ 0 & 0 & 1 & t \end{pmatrix}$$

1. Per quali t, B_t ha solo autovalori reali?
2. Per quali t B_t è diagonalizzabile?

Calcoliamo il polinomio caratteristico di B_t

$$B_t - xI = \begin{pmatrix} 1-x & -t & t-1 & t^2 \\ -1 & t+1-x & 2t-2 & -t \\ 0 & 0 & t+1-x & 1-t \\ 0 & 0 & 1 & t-x \end{pmatrix}$$

$$\det B_t - xI = \left[(1-x)(t+1-x) - t\right]\left[(t+1-x)(t-x) + t - 1\right]$$

$$= \left[x^2 - (t+1+1)x + t+1-t\right]\left[x^2 - (t+t+1)x + t(t+1) + t-1\right]$$

$$= \left(x^2 - (t+2)x + 1\right)\left(x^2 - (2t+1)x + t^2 + 2t - 1\right)$$

gli autovalori sono reali ~~per~~ se i 2 discriminanti

Δ_1 e Δ_2 sono ≥ 0

$$\Delta_1 = (t+2)^2 - 4 = t^2 + 4t + 4 - 4 = t(t+4)$$

$$\Delta_2 = (2t+1)^2 - 4(t^2 + 2t - 1) = \cancel{4t^2} + 4t + 1 - \cancel{4t^2} - 8t + 4$$

$$= 5 - 4t$$

Quindi $\Delta_1 \geq 0$ per $t \leq -4$ o $t \geq 0$ mentre

$\Delta_2 \geq 0$ se $t \leq \frac{5}{4}$

Dunque sono entrambi ≥ 0 per $0 \leq t \leq \frac{5}{4}$

Se $0 \leq t \leq 5/4$ B_t ha tutti gli autovalori reali.

Calcoliamo gli autovalori

$$\lambda_1 = \frac{t+2+\sqrt{\Delta_1}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{t+2-\sqrt{\Delta_1}}{2}$$

$$\lambda_3 = \frac{2t+1+\sqrt{\Delta_2}}{2}$$

$$\lambda_4 = \frac{2t+1-\sqrt{\Delta_2}}{2}$$

se sono 4 valori distinti B_t è diagonalizzabile.

Certamente per $0 \leq t \leq 5/4$ se $\Delta_1 = 0$ $\lambda_1 = \lambda_2$ e se $\Delta_2 = 0$ $\lambda_3 = \lambda_4$.

Vediamo se B_0 e $B_{5/4}$ sono diagonalizzabili

$t = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ $\lambda_3 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_4 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

Dobbiamo calcolare

$r_k(B_0 - I) = 4 - \dim V_1$ per vedere se $\dim V_1 = 2 = m_a(1)$

$$B_0 - I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \cancel{-R_4+R_2+R_4} =$$

$\cancel{(0\,1\,0\,0}$

dovrebbe essere di rango 3 : 1°, 3°, 4° colonna sono indip.

Quindi B_0 non è diagonalizzabile perché V_1 ha dim $1 < m_a(1)$.

Vediamo $B_{5/4}$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \frac{5/2 + \frac{2}{2}}{2} = \frac{7}{4}$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ perche $\Delta_1 \neq 0$.

Dobbiamo vedere $rk\left(B_{5/4} - \frac{7}{4} I\right)$

$$\begin{pmatrix} \frac{4}{4} - \frac{3}{4} & \frac{5}{4} & 1 & \frac{25}{16} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ha rango 3 perché $R_4 = 2 R_3$

quindi $B_{5/4}$ non è diagonalizzabile

Resta da vedere se per $t \leq 5/4$ si può avere $\lambda_1 = \lambda_3$ o $\lambda_1 = \lambda_4$ oppure $\lambda_2 = \lambda_3$ o $\lambda_2 = \lambda_4$

Queste 4 verifiche ci portano ad equazioni di grado 4 difficilmente valutabili

Per esempio $\lambda_1 = \lambda_3$ ci porta a questo conto.

$$\frac{t+2+\sqrt{t(t+4)}}{\cancel{2}} = \frac{2t+1+\sqrt{5-4t}}{\cancel{2}}$$

semplifichiamo

$$t-2t+2-1 = \sqrt{5-4t}-\sqrt{t(t+4)}$$

$$\sqrt{t(t+4)}+1-t = \sqrt{5-4t} \qquad \text{quadriamo}$$

$$\sqrt{t(t+4)} = \sqrt{5-4t}+t-1 \qquad \text{se } t<1$$

$$5-4t>1$$

quindi il 2° membro è >0 per $t>0$

$$t(t+4) = 5-4t+t^2-2t+1+2(t-1)\sqrt{5-4t}$$

$$\cancel{t^2}+4t = \cancel{6}-6t+\cancel{t^2}+2(t-1)\sqrt{5-4t}$$

$$\overset{5}{\cancel{10}}t-\overset{3}{\cancel{6}} = \cancel{2}(t-1)\sqrt{5-4t}$$

$$\frac{5t-3}{t-1} = \sqrt{5-4t} \qquad \text{quadriamo}$$

(sperando $\frac{5t-3}{t-1}>0$) se no non è mai $\lambda_1=\lambda_3$

$$\left(\frac{5t-3}{t-1}\right)^2 = 5-4t$$

$$25t^2-30t+9 = (t-1)^2(5-4t)$$

$$\overset{12}{\cancel{25}}t^2-\overset{16}{\cancel{30}}t+\overset{4}{\cancel{9}} = (t^2-2t+1)(5-4t) =$$

$$= 5t^2-10t+5-4t^3+8t^2-4t$$

$$= \cancel{13t^2}-\cancel{14t}+\cancel{5}-4t^3$$

$$4t^3+12t^2-16t+4$$

t^3+3t^2-4t+1 ha una radice reale compresa tra 0 e $5/4$)

si può calcolare per $t = 0$ e per $t = 5/4$ e vedere se cambia segno (15)

per $t = 0$ il polinomio vale 1

per $t = 5/4$ il polinomio vale

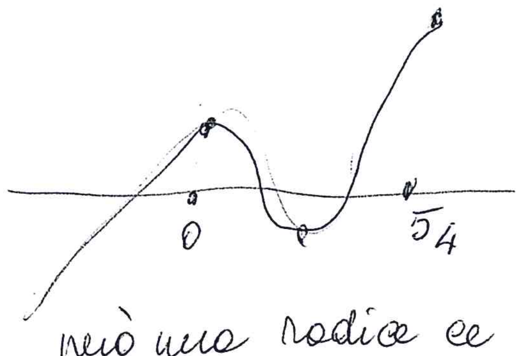
$$\left(\frac{5}{4}\right)^3 + 3\,\frac{25}{16} - 5 + 1 =$$

$$\frac{125}{64} + \frac{75}{16} - 4$$

$$\frac{125 + 300}{16} - \cancel{\frac{64}{16}} - \frac{64}{16} =$$

$$\frac{425 - 64}{16} > 0 \quad \text{non cambia segno}$$

non siamo sicuri ci sia una radice o no



però una radice ce la ha prima di 0, che non ci interessa, potrebbe averne altre 2 nell'intervallo, ma allora si annullerebbe la derivata

$3t^2 + 6t - 4$ $\quad \Delta = 36 - 48 < 0$ la derivata non si annulla quindi il polinomio non ha radici per $0 < t < 5/4$

Conti analoghi per vedere se

$$\lambda_1 = \lambda_4 \quad \lambda_2 = \lambda_3 \quad o \quad \lambda_2 = \lambda_4$$

questi ve li fate da voi