GEOMETRIA 2
Compito del 30 Gennaio 2015

Esercizio 1.
Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua non costante e monotona non decrescente. Si consideri la relazione di equivalenza definita da f su $\mathbb{R}$, cioè t è equivalente a s se e solo se $f(t) = f(s)$. Sia X il quoziente di $\mathbb{R}$ rispetto a questa relazione di equivalenza. Si domanda:

- Se X, dotato della topologia quoziente, sia connesso, compatto, di Hausdorff.
- Se esista un omeomorfismo di X con $\mathbb{R}$.

Esercizio 2.
Si considerino in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ due piani distinti di equazione rispettivamente $l_1 = 0$, $l_2 = 0$ e sia Q una quadrica non degenere che non incontra nessuno dei due piani, di equazione $q = 0$.

- Quale è il tipo topologico di Q?
- Si supponga $l_1 = x_1 - cx_0, l_2 = x_1 + cx_0 \quad c > 1$ e si determini l'equazione q di una quadrica Q che non intersechi nessuno dei due piani.
- Al variare dei parametri omogenei a, b si consideri la quadrica $Q_{[a,b]}$ di equazione $a(l_1 l_2) + bq = 0$. Per ogni scelta dei parametri si determini il tipo topologico della quadrica $Q_{[a,b]}$.

Esercizio 3.
Sia T^2 un toro, $p_0 \in T^2$ e D un intorno aperto di p_0 in T^2 omeomorfo ad un disco. Dimostrare che:

- T^2 è un quoziente di $I \times I$.
- $T^2 \setminus D$ si retrae per deformazione su un sottoinsieme di T^2 omeomorfo ad una coppia di circonferenze che si intersecano in un solo punto.